Partielle Differentialgleichungen – WS 01/02
Lösungen der Übungsbeispiele

Inhalte

1 Herleitung einer Wellengleichung **1**

2 Herleitung einer Wärmeleitungsgleichung **3**

3 Herleitung einer Spannungsfeld-Gleichung **5**

4 Herleitung einer Konvektionsgleichung der Wahrscheinlichkeiten **9**

5 Zwei-Punkt-Randwertproblem zweiter Ordnung **12**

6 Greensche Funktion des Zwei-Punkt-Randwertproblems **12**

7 Randbedingungen der Poisson Gleichung **15**

8 Herleitung einer partiellen Differentialgleichung eines Lieblingssystems **16**

9 Nicht-viskose Burgersche Gleichung **16**

10 Greensche Formeln **19**

11 Volumen und Oberfläche der Einheitskugel **20**

12 Lösung einer Wellengleichung **22**

13 Lösung einer Wärmeleitungsgleichung **23**

14 Lösung einer Feldergleichung **24**

15 Viskose Burgersche Gleichung **29**

16 Allgemeine Lösungsform einer Transportgleichung **35**

17 Rotationsinvarianz des Laplace-Operators **36**

18 Gegenbeispiel für ein Maximumprinzip **36**

19 *A Priori* Schranke für die Poisson Gleichung **37**

20 Maximumprinzip für den Laplace-Operator **38**

21 Subharmonische Funktionen **40**

22 Poissonsche Formel für den Halbraum **42**

23 Ungerade harmonische Extention **43**

24 Invarianz des Typs einer PDG **44**

25 Allgemeine Lösungsform einer Wärmeleitungsgleichung **45**

26 Sublösungen einer Wärmeleitungsgleichung **48**

27 Die d'Alembertsche Formel **52**

28 Erhaltungseigenschaften einer Wellengleichung **53**

29 Energiedämpfung einer Wellengleichung **55**

30 Quasilineare Gleichungen erster Ordnung **56**

31 Koordinaten Transformationen **57**

32 Tangentiale Koordinatensysteme **58**

33 Charakteristische Flächen **59**

34 Schlecht gestelltes inverses Problem **60**

1 Herleitung einer Wellengleichung

Problem: Betrachte eine elastische Kette, die kleine längslaufende Schwingungen durchläuft. Nimm an, daß die Querschnittsfläche A und die Dichte in der Ruhelage ρ_0 konstant sind, und daß die Querschnitte während der Schwingungen eben bleiben. Sei $x+u(x,t)$ die Lage des Querschnitts zur Zeit t, der an der Lage x im Ruhezustand war. Setze voraus, daß das Hookesche Gesetz gültig ist, d.h. für einen konstanten Elastizitätsmodul ist die Kraft die auf den Querschnitt in x wirkt gegeben durch $T = AEu_x$. Zeige, daß die Schwingungen durch die partielle Differentialgleichung $\rho u_{tt} = Eu_{xx}$ beschrieben werden. (cf. Guenther & Lee, p. 5)

Lösung: Die Annahmen sind:

a. Die Schwingungen sind nur längslaufend.

b. Die Querschnittsfläche A ist immer konstant.

c. Die Dichte in der Ruhelage ρ_0 ist konstant.

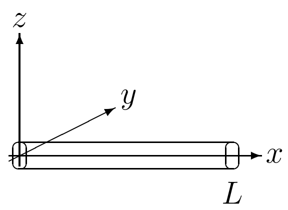
d. Die Querschnitte bleiben immer eben.

e. Die Kette ist so flexibel, daß die Belastungen nur orthogonal zur den Querschnitten übertragen werden.

f. Das Hookesche Gesetz gilt: Die Querschnitt-Kraft $T = AEu_x$, und der Elastizitätsmodul E ist konstant.

- Die PDG wird aus dem Newtonschen Gesetz gebaut: Die Änderungsrate des Impulses = der Summe der Kräfte.

- Das Kettengebiet: $0 \le x \le L$



- Die Lage des Querschnitts: $s(x,t) = x + u(x,t)$.

  * $u(x,t)$ bedeutet Kompression/Expansion.
  * $s_x > 0 \Rightarrow 1 + u_x > 0 \Rightarrow u_x > -1$.

- $\rho(x,t)$ = Dichte (Masse pro Volumeneinheit) an $(s(x,t),t)$. (b)-(e) $\Rightarrow \rho(x,y,z,t) = \rho(x,t)$.

- Die Masse zwischen x_1 und x_2:

$$\begin{aligned} m(x_1, x_2) &= \rho_0 A(x_2 - x_1) = A \int_{x_1}^{x_2} \rho_0 dx \\ \text{beim Massenerhaltungssatz} &= A \int_{s(x_1,t)}^{s(x_2,t)} \rho ds = A \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial s}{\partial x} dx \\ &= A \int_{x_1}^{x_2} \rho(1 + u_x) dx \end{aligned}$$

  x_1, x_2 beliebig $\Rightarrow$

$$\rho_0 = \rho(1 + u_x)$$

  eine punktweise Verwirklichung des Massenerhaltungssatzes.

- Der Impuls zwischen x_1 und x_2:

$$M(x_1, x_2, t) = A \int_{s(x_1,t)}^{s(x_2,t)} \rho u_t ds = A \int_{x_1}^{x_2} \rho(1 + u_x) u_t dx = A \int_{x_1}^{x_2} \rho_0 u_t dx$$

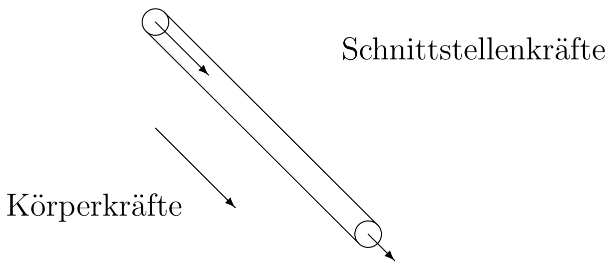
  ρu_t = Masse $\times$ Geschwindigkeit (verteilt, d.h. es gibt ein Kontinuum statt einer diskreten Menge der Massen.)

- Die Änderungsrate des Impulses zwischen x_1 und x_2:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} A \int_{x_1}^{x_2} \rho_0 u_t dx = A \int_{x_1}^{x_2} \rho_0 u_{tt} dx$$

- Die Summe der Kräfte, zwei Typen:

  * Schnittstellenkräfte: Druckspannung, Scherspannung, usw.
  * Körperkräfte: Schwerkraft, elektromagnetische Kräfte, äußere Belastungen, usw.



- Schnittstellenkräfte:

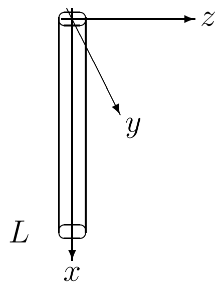
  * (e) $\Rightarrow$ Spannungen T nur orthogonal zu den Querschnitten.
  * (b)-(e) $\Rightarrow T = T(x, t)$.
  * Nettospannung auf der Kette zwischen x_1 und x_2 ist:

$$S(x_1, x_2, t) = T(x_2, t) - T(x_1, t) = AE[u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)].$$

- Körperkräfte-Schwerkraft:

* $*$ (a) $\Rightarrow$ Körperkräfte wirken nur längslaufend.
* $*$ Nimm an, daß die Kette vertikal in einem Schwerkraftsfeld ist (oder in einer ähnlichen Weise in irgendeinem Feld liegt).
* $*$ Das Gewicht der Kette zwischen x_1 und x_2 ist:

$$W(x_1, x_2) = A \int_{s(x_1,t)}^{s(x_2,t)} \rho g ds = A \int_{x_1}^{x_2} \rho g \frac{\partial s}{\partial x} dx = A \int_{x_1}^{x_2} \rho_0 g dx = A\rho_0 g(x_2 - x_1)$$



$\boldsymbol{F}_g = g\langle 1, 0, 0\rangle$,
g ist eine Konstante > 0,
Schwerkraft pro Masseneinheit

- Körperkräfte-Belastung:
  * $*$ Nimm an, daß eine äussere Kraft pro Masseneinheit f längslaufend wirkt.
  * $*$ Die Belastung zwischen x_1 und x_2 ist:

$$L(x_1, x_2, t) = A \int_{s(x_1,t)}^{s(x_2,t)} \rho f ds = A \int_{x_1}^{x_2} \rho f \frac{\partial s}{\partial x} dx = A \int_{x_1}^{x_2} \rho_0 f dx$$

- Newtonsche Gesetz:

$$\frac{dM}{dt} = S + W + L$$

oder:

$$A \int_{x_1}^{x_2} \rho_0 u_{tt} dx = AE[u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)] + A\rho_0 g(x_2 - x_1) + A \int_{x_1}^{x_2} \rho_0 f dx$$

x_1 und x_2 beliebig $\Rightarrow$

$$\rho_0 u_{tt} = E u_{xx} + \rho_0(g + f)$$

- Einfache Randbedingungen: Keine Schwingungen an den Enden, Enden sind befestigt:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

2 Herleitung einer Wärmeleitungsgleichung

Problem: Leite eine partielle Differentialgleichung her, die den Wärmefluss in einer dünnen Stange mit einer konstanten Querschnittsfläche beschreibt. Nimm an, daß die Stange isoliert ist und Wärmequellen enthalten könnte. (cf. Guenther & Lee, p. 8)

Lösung: Die Annahmen sind:

a. Energieerhaltungssatz: Die Änderungsrate der Energie in einem Volumen V = dem Nettofluß über den Rand ∂V + der Rate der erzeugten Energie in V.

b. Die Stange ist isoliert, d.h. der Wärmefluß am Rand der Stange ist null.

c. Es gibt mögliche Wärmequellen in der Stange.

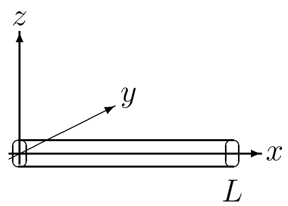
d. Die Querschnittsfläche A ist immer konstant.

e. Die Stange ist so dünn, daß die Materialeigenschaften in einem Querschnitt konstant sind.

f. Die Stange ist starr und bewegungslos, also:

  * Wärmeenergie ist der einzige Energietyp.
  * Die Dichte ist konstant.

- Das Stangengebiet: $0 \leq x \leq L$



- Energie:
  * (f) $\Rightarrow$ keine kinetische Energie.
  * Die innere Energie pro Masseneinheit: e.
  * Die Energie in einem Volumen $V = A \times [x_1, x_2]$:

$$E = \int_V \rho e dx dy dz = \text{...durch (d) und (e)...} = A \int_{x_1}^{x_2} \rho e dx$$

  * Die Änderungsrate der Energie:

$$\frac{dE}{dt} = A \int_{x_1}^{x_2} \rho e_t dx$$

- Der Wärmefluß $\boldsymbol{q}$ pro Flächeneinheit zeigt von höheren zu niedrigeren Temperaturen. Der Nettofluß in V hinein:

$$\begin{aligned} F &= (\text{hinein}) - \int_{\partial V} \boldsymbol{q} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} d\sigma \\ \text{(b),(e)} \Rightarrow \boldsymbol{q} = \langle q, 0, 0 \rangle, q = q(x)... &= -A[q(x_2) - q(x_1)] \end{aligned}$$

- Die Rate der erzeugten Energie pro Volumeneinheit: f. Die Summe in V:

$$S = \int_V f dx dy dz = \text{...(e)} \Rightarrow f = f(x)\text{...} = A \int_{x_1}^{x_2} f dx$$

- Energieerhaltungssatz:

$$\frac{dE}{dt} = F + S$$

  oder:

$$A \int_{x_1}^{x_2} \rho e_t dx = -A[q(x_2) - q(x_1)] + A \int_{x_1}^{x_2} f dx$$

  x_1, x_2 beliebig $\Rightarrow$

$$\rho e_t = -q_x + f$$

- Verbindung mit der Temperatur u?
- Thermodynamische Beziehungen: In der Ruhelage (oder fast der Ruhelage) ist eine thermodynamische Variable von zwei anderen bestimmt, z.B.

$$e = e(u, \rho), \qquad de = e_u du + e_\rho d\rho.$$

- Vielfach gebäuchlich:
  * $e_\rho = 0$.
  * $e_\rho = c$, die Wärmekapazität oder die spezifische Wärme.
  * Nimm an, daß $c =$ Konstante.
- Beziehung zwischen dem Wärmefluß und der Temperatur: Fouriersche Gesetz.
  * Wärme fließt von höheren zu niedrigeren Temperaturen:

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla u$$

  * Nimm an, $k =$ konstante Wärmeleitfähigkeit.
  * (e) $\Rightarrow$ $\nabla u = \langle u_x, 0, 0\rangle$, $\boldsymbol{q} = \langle q, 0, 0\rangle$.
- Zusammenfassung:

$$\rho c u_t = k u_{xx} + f$$

- Randbedingungen:

$$\boldsymbol{q} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(L) = 0.$$

3 Herleitung einer Spannungsfeld-Gleichung

Problem: Sei w die Auslenkung eines Trommelfells, d.h. einer zweidimensionalen Membran, das mit einer Kraft pro Flächeneinheit f belastet ist. Setze voraus, daß das Trommelfell über ein kreisförmiges Gebiet C straff aufgespannt ist und am Rand ∂C befestigt ist, so daß nur kleine Auslenkungen w aus der Belastung f resultieren. Nimm an, daß die Auslenkung w die potentielle Energie minimiert, unter allen glatten Auslenkungen, die am Trommelfellrand verschwinden. (cf. Segel, p. 537)

a. Setze voraus, daß die potentielle Energie V_s, die durch die Spannung der Membran erzeugt wird, eine Funktion der Differenz des verformten und des unverformten Flächeninhalts des Trommelfells ist. Für kleine Auslenkungen w, die auf $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ definiert werden, zeige, daß der Unterschied D zwischen der verformten und der unverformten Trommelfelloberfläche folgendermaßen angenähert wird:

$$D = \tfrac{1}{2} \int_C (w_x^2 + w_y^2) dxdy.$$

Gib Bedingungen an unter welchen $V_s = TD$ für eine Konstante T gilt. Erkläre die Rolle von T als die Spannung, d.h. die tangentiale Kraft, in der Membran.

b. Was ist der folgende Beitrag zur potentiellen Energie?

$$V_w = -\int_C w(x,y) f(x,y) dxdy$$

Denke an mechanische Arbeit.

c. Durch Minimieren der potentiellen Energie $V = V_s + V_w$, leite eine partielle Differentialgleichung her, die die kleinen Auslenkungen einer kreisförmigen Membran beschreibt, die am Rand befestigt ist.

Lösung: Der verformte (D_w) und der unverformte Flächeninhalt (D_0) des Trommelfells:

$$D_w = \int_C |\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y| dxdy = ... \boldsymbol{r} = \langle x, y, w(x,y) \rangle ... = \int_C (1 + w_x^2 + w_y^2)^{\frac{1}{2}} dxdy, \qquad D_0 = \int_C dxdy$$

- Da $(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2$ (weil $1 + \varepsilon^2 \approx 1 + \varepsilon^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^4$):

$$D = D_w - D_0 \approx \frac{1}{2} \int_C (w_x^2 + w_y^2) dxdy$$

  wenn $|\nabla w|$ ausreichend klein ist.

- Gegeben: $V_s = V_s(D)$. Wenn D ausreichend klein ist, ist $V_s \approx V_s(0) + TD$. Weil wir uns immer nur für potentielle Energie Differenzen interessieren, kann die potentielle Energie an einem gewissen Punkt beliebig definiert werden. Nimm $V_s(0) = 0$.

- Einfache Erklärung von T:

  * Die potentielle Energie stellt das Potential dar, Arbeit zu machen, kinetische Energie zu erzeugen.
  * Je gespannter das Trommelfell ist (d.h. die Spannung T ist höher), desto höher ist das Potential des Trommelfells, zurück zur Ruhelage zu kehren.
  * Daher passt: $V_s = TD$.

- Beziehung zwischen der kinetischen Energie K, der potentiellen Energie V, der Arbeit W, und der Kraft F:

  * Energieerhaltungssatz:

$$K + V = \text{Konstante}, \qquad \Delta K + \Delta V = 0.$$

* Arbeit geleistet von einer Kraft F für eine Versetzung s:

$$W = F \times s$$

* Arbeit–Energiesatz:

$$W = \Delta K$$

* Zusammenfassung:

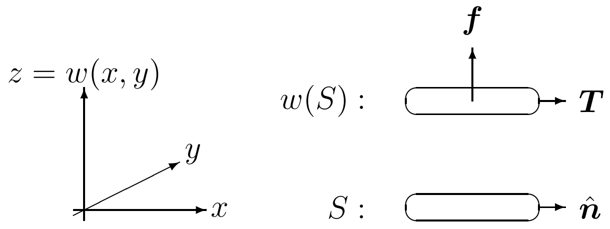
$$\Delta V = -\Delta K = -W = -F \times s$$

* Im Trommelfell ist der Beitrag von f zur potentiellen Energie:

$$V_w = -\int_C f w dx dy$$

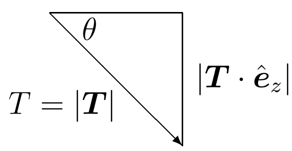
$$\begin{array}{rcl} f & = & \text{einer verteilten Kraft pro Flächeneinheit} \\ w & = & \text{einer verteilten Versetzung} \end{array}$$

- Detailliertere Erklärung von T. Die Schnittstellenkräfte und die Körperkräfte, die auf einem Flächenelement $w(S)$ des Trommelfells wirken:



$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{f} & = & f\hat{\boldsymbol{e}}_z \\ \boldsymbol{T} & = & T\hat{\boldsymbol{\nu}}, \quad |\hat{\boldsymbol{\nu}}| = 1 \end{array}$$

* $\boldsymbol{f}$ ist die vertikale belastende Kraft pro Flächeneinheit.
* $\boldsymbol{T}$ ist die tangentiale spannende Kraft pro Längeneinheit.
  (Trotz der Dehnung, nimm an, daß T konstant ist.)
* Die vertikale Komponente von $\boldsymbol{T}$:



$$|\boldsymbol{T} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z| = T \sin\theta$$
$$\text{...}|\nabla w| \text{ ausreichend klein...}$$
$$\approx T \tan\theta = T\frac{\partial w}{\partial n}$$

* Die Summe der vertikalen Kräfte für S:

$$F_S = \int_S f dx dy + \int_{\partial S} T \frac{\partial w}{\partial n} dl$$

* Satz von Gauß (u, v, $\partial\Omega$ sind ausreichend glatt):

$$\int_\Omega v \nabla^2 u d\Omega + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u d\Omega = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma$$

* Daher:

$$\int_{\partial S} T\frac{\partial w}{\partial n}dl = \int_S T\nabla^2 w dxdy \quad \Rightarrow \quad F_S = \int_S (f + T\nabla^2 w)dxdy, \;\; \forall S \subset C$$

* Die potentielle Energie erfüllt:

$$\Delta V = -F \times s \quad \text{oder} \quad \frac{dV}{ds} = -F.$$

Wir müssen irgendwie F nach s integrieren, um V zu finden. Mit:

$$V = -\int_C fwdxdy + \frac{1}{2}T\int_C \nabla w \cdot \nabla wdxdy$$

sehen wir zunächst, daß $\frac{\delta V}{\delta w} = -F_C$...

- Um die potentielle Energie

$$V = -\int_C fwdxdy + \frac{1}{2}T\int_C (w_x^2 + w_y^2)dxdy$$

zu minimieren, setzt man die variationelle Ableitung null:

$$0 = \frac{\delta V}{\delta w} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d}{d\varepsilon}V(w + \varepsilon h).$$

- Hier ist h eine (glatte) Störung der minimierenden Auslenkung w, die auf dem Rand ∂C verschwinden muss.
- Die variationelle Ableitung:

$$\begin{aligned}
V(w+\varepsilon h) &= -\int_C f(w+\varepsilon h)dxdy + \frac{1}{2}T\int_C [(w+\varepsilon h)_x^2 + (w+\varepsilon h)_y^2]dxdy \\
\frac{d}{d\varepsilon}V(w+\varepsilon h) &= -\int_C fhdxdy + T\int_C [(w+\varepsilon h)_x h_x + (w+\varepsilon h)_y h_y]dxdy \\
\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{d}{d\varepsilon}V(w+\varepsilon h) &= -\int_C fhdxdy + T\int_C \nabla w \cdot \nabla hdxdy
\end{aligned}$$

- Mit dem Satz von Gauß:

$$\int_C \nabla w \cdot \nabla hdxdy = -\int_C h\nabla^2 wdxdy + \int_{\partial C} h(=0)\frac{\partial w}{\partial n}dl = \int_C h\nabla^2 wdxdy$$

und:

$$\frac{\delta V}{\delta w}(w;h) = -\int_C (f + T\nabla^2 w)hdxdy \qquad (= -F_C)$$

wie eine Richtungsableitung.

- Die Euler-Lagrange Gleichung:

$$\frac{\delta V}{\delta w}(w;h) = 0, \;\; \forall h \quad \Rightarrow \quad f + T\nabla^2 w = 0, \;\; \forall (x,y) \in C$$

weil der Träger von h beliebig klein sein kann.

- Randbedingungen: Das Trommelfell ist am Rand befestigt:

$$w = 0, \quad \partial C.$$

- Eine alternative Methode: Kräftebilanz,

$$F_S = \int_S (f + T\nabla^2 w) dxdy = 0, \ \ \forall S \subset C \quad \Rightarrow \quad f + T\nabla^2 w = 0, \ \ \forall (x,y) \in C.$$

4 Herleitung einer Konvektionsgleichung der Wahrscheinlichkeiten

Problem: Sei $p_n(t)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß, nachdem die Zeit t mit Korrekturlesen eines ermüdenden Texts verbracht wurde, der Entwurf noch immer n Fehler enthält. Nimm an, daß, mit Wahrscheinlichkeit $\mu n p_n(t)\delta t$, noch n Fehler zur Zeit t bleiben, *und* genau ein Fehler im Zeitintervall $(t, t+\delta t)$ gefunden wird. (cf. Ockendon et al., p. 7)

a. Bemerke, daß ein Entwurf mit n Fehlern zur Zeit $t+\delta t$ nur aus jenen resultieren kann, die zur Zeit t entweder n oder $n+1$ Fehler enthalten haben. Benutze bedingte Wahrscheinlichkeiten, um zu zeigen, daß:

$$p_n(t+\delta t) = \mu(n+1)p_{n+1}(t)\delta t + (1 - \mu n \delta t)p_n(t).$$

b. Definiere die Zufallsvariable $\nu(t)$ als die Zahl der Fehler, die nach der Zeit t gefunden werden. Die erzeugende Funktion für $\nu(t)$ ist $p(x,t) = E[x^{\nu(t)}] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)x^n$. Zeige, daß, für $\delta t \to 0$, die Funktion $p(x,t)$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dp_n}{dt} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [\mu(n+1)p_{n+1} - \mu n p_n] x^n$$

und daß daher:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mu(x-1)\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

c. Nimm an, daß es N Anfangsfehler gibt, und zeige, daß das obige Modell zu der folgenden Lösung führt:

$$p(x,t) = (1 + (x-1)e^{-\mu t})^N.$$

Interpretiere dieses Resultat durch die Beziehung zwischen $p(x,t)$ und $\{p_n\}$.

Lösung: Definiere die Ereignisse:

$$\begin{aligned} A_n &= n \text{ Fehler bleiben zur Zeit } t \\ B_n &= n \text{ Fehler bleiben zur Zeit } t + \delta t \end{aligned}$$

- Bemerke:

$$B_n = (B_n \cap A_n) \cup (B_n \cap A_{n+1}), \qquad A_n \cap A_{n+1} = \emptyset$$

und daher auf Grund der Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$p(B_n) = p(B_n \cap A_n) + p(B_n \cap A_{n+1})$$

- Gegeben: Die Wahrscheinlichkeit, daß zur Zeit t noch immer n Fehler bleiben und daß zur Zeit $t + \delta t$ noch immer $(n-1)$ Fehler bleiben, ist $\mu n p_n(t)\delta t$, d.h.

$$p(B_{n-1} \cap A_n) = \mu n p_n(t)\delta t \quad \text{und} \quad p(B_n \cap A_{n+1}) = \mu(n+1)p_{n+1}(t)\delta t.$$

- Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$p(B_{n-1} \cap A_n) = p(B_{n-1}|A_n) \cdot p(A_n) \quad \text{oder} \quad p(B_{n-1}|A_n) = \frac{\mu n p_n(t)\delta t}{p_n(t)} = \mu n \delta t.$$

- Weil:

$$A_n = (A_n \cap B_n) \cup (A_n \cap B_{n-1}), \qquad B_n \cap B_{n-1} = \emptyset$$

  gilt:

$$\begin{aligned} p(A_n) &= p(A_n \cap B_n) + p(A_n \cap B_{n-1}) \\ &= p(B_n|A_n) \cdot p(A_n) + p(B_{n-1}|A_n) \cdot p(A_n) \end{aligned}$$

  Also:

$$p(B_n|A_n) = 1 - p(B_{n-1}|A_n) = 1 - \mu n \delta t$$

- Daher:

$$p(B_n \cap A_n) = p(B_n|A_n) \cdot p(A_n) = (1 - \mu n \delta t) \cdot p_n(t)$$

- Zusammenfassung:

$$\begin{aligned} p_n(t+\delta t) = p(B_n) &= p(B_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_n) \\ &= \mu(n+1)p_{n+1}(t)\delta t + (1 - \mu n \delta t)p_n(t). \end{aligned}$$

- Daher:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(t+\delta t) - p_n(t)}{\delta t} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} [\mu(n+1)p_{n+1}(t) - \mu n p_n(t)]x^n \\ \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dp_n(t)}{dt} x^n &= \mu \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1}(t) \frac{d}{dx} x^{n+1} - \mu x \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \frac{d}{dx} x^n \end{aligned}$$

- Weil es nur eine endliche Zahl der Fehler gibt (die *a priori* bekannt werden könnte), sind die Summen endlich. Deshalb ist die Reihenfolge der Differentiation und der Summierung austauschbar, und es folgt, daß

$$p_t = \mu p_x - \mu x p_x$$

- Zu einer gegebenen Konstante a, besitzt die PDG,

$$p_t + a p_x = 0$$

  eine Lösung von der Form:

$$p(x,t) = g(t - x/a).$$

  Probe:

$$p_t + a p_x = g'(t - x/a) + a[-\frac{1}{a} g'(t - x/a)] = 0.$$

Weil wir den Koeffizienten $\mu(x-1)$ statt a haben, können wir vernünftigerweise eine Lösung der folgenden Form suchen:

$$p(x,t) = g(t + f(x)).$$

Probe:

$$p_t + \mu(x-1)p_x = g'(t+f(x)) + \mu(x-1)f'(x)g'(t+f(x)).$$

Damit die rechte Seite null ist, muss $f(x)$ erfüllen:

$$f'(x) = \frac{1}{\mu(1-x)} \quad \text{oder} \quad f(x) = \log(1-x)^{-\frac{1}{\mu}}.$$

- Die Anfangsbedingung:

$$p_n(0) = \begin{cases} 0 & n \neq N \\ 1 & n = N \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad p(x,0) = x^N$$

erfordert, daß

$$g(\log(1-x)^{-\frac{1}{\mu}}) = x^N \;\; \text{oder} \;\; g(z) = (1 - e^{-\mu z})^N$$

und:

$$p(x,t) = \{1 - \exp[-\mu(t + \log(1-x)^{-\frac{1}{\mu}})]\}^N = (1 + (x-1)e^{\mu t})^N.$$

- Weil:

$$p_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n p(t)}{\partial x^n}\bigg|_{x=0}$$

gilt:

$$p_n(t) = \frac{1}{n!}\left[\prod_{m=0}^{n-1}(N-m)\right](1-e^{\mu t})^{N-n}e^{n\mu t}, \;\; n \leq N, \qquad p_n(t) = 0, \;\; n > N.$$

Insbesondere:

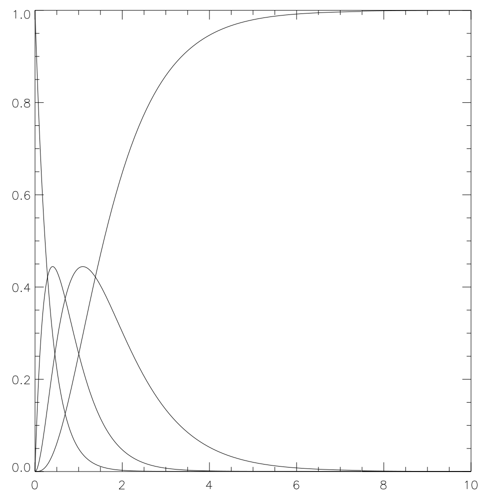
$$p_N(t) = e^{-N\mu t}, \qquad p_0(t) = (1 - e^{-\mu t})^N$$

und:

$$p_n(0) = \begin{cases} 0 & n \neq N \\ 1 & n = N \end{cases} \qquad p_n(\infty) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

und $p_n(t)$ für $0 < n < N$ spitzen zwischen $t = 0$ und $t = \infty$.

- Für $N = 3$, $\mu = 1$, bemerke die Welle:



$$\begin{aligned} p_3(t) &= e^{-3t} \\ p_2(t) &= 3(1-e^{-t})e^{-2t} \\ p_1(t) &= 3(1-e^{-t})^2 e^{-t} \\ p_0(t) &= (1-e^{-t})^3 \end{aligned}$$

5 Zwei-Punkt-Randwertproblem zweiter Ordnung

Problem: Zu gegebenen $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ und stetigem f konstruiere eine Lösung des Zwei-Punkt-Randwertproblems:

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad u(0) = \alpha, \;\; u(1) = \beta.$$

Lösung: Durch Integrieren,

$$-u'(x) + u'(0) = -\int_0^x u''(\xi) d\xi = \int_0^x f(\xi) d\xi$$

noch einmal:

$$-u(x) + u(0)(=\alpha) + xu'(0) = -\int_0^x u'(\xi) d\xi + \int_0^x u'(0) d\xi = \int_0^x \int_0^\xi f(\eta) d\eta d\xi$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \alpha + xu'(0) - \int_0^x \int_0^\xi f(\eta) d\eta d\xi$$

$$\beta = u(1) = \alpha + u'(0) - \int_0^1 \int_0^\xi f(\eta) d\eta d\xi$$

$$\Rightarrow \quad u'(0) = \beta - \alpha + \int_0^1 \int_0^\xi f(\eta) d\eta d\xi$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \alpha + x \left[\beta - \alpha + \int_0^1 \int_0^\xi f(\eta) d\eta d\xi \right] - \int_0^x \int_0^\xi f(\eta) d\eta d\xi.$$

Probe:

$$u(0) = \alpha, \;\; u(1) = \alpha + \beta - \alpha + \int_0^1 \int_0^\xi f(\eta) d\eta d\xi - \int_0^1 \int_0^\xi f(\eta) d\eta d\xi = \beta$$

$$u'(x) = \beta - \alpha + \int_0^1 \int_0^\xi f(\eta) d\eta d\xi - \int_0^x f(\eta) d\eta, \quad u''(x) = -f(x)$$

6 Greensche Funktion des Zwei-Punkt-Randwertproblems

Problem: Betrachte das Randwertproblem:

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

für eine stetige Funktion f, und bestimme die dazugehörige Greensche Funktion G, mit der die Lösung in der Form:

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y) dy$$

dargestellt werden kann (cf. Tveito-Winther, p. 42). Benütze diese Darstellung zur Berechnung der Lösung für $f(x) = x^2$.

Lösung: Ein Techniker-Ansatz. Zu einer gegebenen Differentialgleichung,

$$\mathcal{D} u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$$

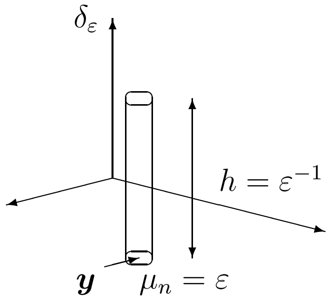
wird die Greensche Funktion $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ (die *grundlegende Lösung* oder *Fundamentallösung*) definiert durch:

$$\mathcal{D}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

in der die Diracsche Delta (Pseudo) Funktion δ (eine *verallgemeinerte Funktion* oder *Distribution*) ist:

$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y} \\ \infty & \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y} \end{cases} \qquad \text{so daß} \qquad \int_{\boldsymbol{R}^n} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})v(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = v(\boldsymbol{x})$$

für ausreichende glatte Funktionen v. Es gibt keine solche Funktion $\delta \in L^p$, aber es gibt Approximationen:



$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \delta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = 1$$

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \delta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})v(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} v(\boldsymbol{x})$$

und G kann aus den Approximationen konstruiert werden:

$$\mathcal{D}G_\varepsilon(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \delta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \qquad G_\varepsilon \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} G.$$

Mit dieser Greenschen Funktion G, konstruiert man:

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{R}^n} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

so daß:

$$\mathcal{D}u(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{R}^n} \mathcal{D}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \int_{\boldsymbol{R}^n} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}).$$

- Es gibt hier viele Fragen über die Konvergenz wenn $\varepsilon \to 0$ (verschoben). Wir können auf jeden Fall diesen Ansatz benutzen, um einen Lösungskandidat zu konstruieren.

- Insbesondere betrachte:

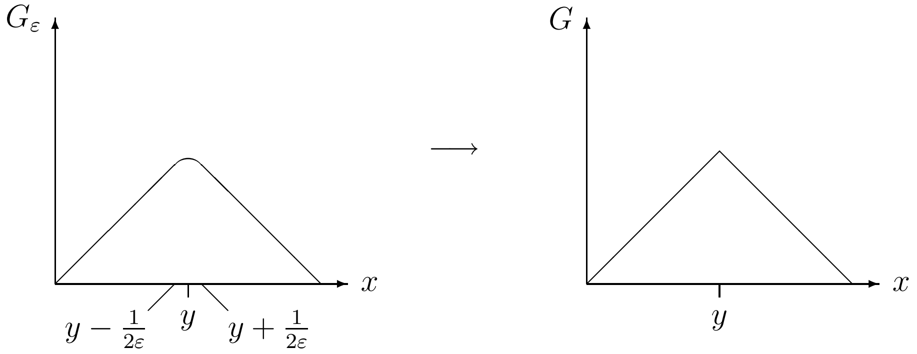
$$-u''(x) = f(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

und:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}G_\varepsilon(x,y) = \delta_\varepsilon(x-y) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le y - \frac{1}{2\varepsilon} \\ \frac{1}{\varepsilon}, & y - \frac{1}{2\varepsilon} \le x \le y + \frac{1}{2\varepsilon} \\ 0, & y + \frac{1}{2\varepsilon} \le x \le 1, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} G_\varepsilon(0,y) = 0, \\ G_\varepsilon(1,y) = 0. \end{array}$$

Also:

$$G_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} (1-y)x, & 0 \leq x \leq y - \dfrac{1}{2\varepsilon} \\[2ex] -\dfrac{x^2}{2\varepsilon} + \left[\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right) y\right] x - \dfrac{(\varepsilon - 2y)^2}{8\varepsilon}, & y - \dfrac{1}{2\varepsilon} \leq x \leq y + \dfrac{1}{2\varepsilon} \\[2ex] y(1-x), & y + \dfrac{1}{2\varepsilon} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$$G_\varepsilon \to G(x,y) = \begin{cases} (1-y)x, & 0 \leq x \leq y \\ y(1-x), & y \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} (1-y), & 0 \leq x < y \\ -y, & y < x \leq 1. \end{cases}$$

- Definiere:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 G(x,y)f(y)dy = \int_{y \leq x} G(x,y)f(y)dy + \int_{x \leq y} G(x,y)f(y)dy \\ &= (1-x)\int_0^x yf(y)dy + x\int_x^1 (1-y)f(y)dy \end{aligned}$$

- Probe:

$$u'(x) = -\int_0^x yf(y)dy + (1-x)xf(x) + \int_x^1 (1-y)f(y)dt - x(1-x)f(x)$$
$$u''(x) = -xf(x) - (1-x)f(x) = -f(x).$$

- Insbesondere mit $f(x) = x^2$, ist u natürlich wie folgt gegeben:

$$u''(x) = -f(x) = -x^2 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = -\frac{x^3}{3} + a, \quad u(x) = -\frac{x^4}{12} + ax + b$$

$$0 = u(0) \;\Rightarrow\; b = 0, \qquad 0 = u(1) \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{12}, \quad u(x) = \frac{x - x^4}{12}.$$

Mit der Greenschen Funktion,

$$\begin{aligned}
u(x) &= (1-x)\int_0^x y f(y)dy + x\int_x^1 (1-y)f(y)dy \\
&= (1-x)\int_0^x y^3 dy + x\int_x^1 (1-y)y^2 dy \\
&= (1-x)\frac{x^4}{4} + x\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_x^1 \\
&= \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{4} + \frac{x}{12} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{4} = \frac{x - x^4}{12}.
\end{aligned}$$

7 Randbedingungen der Poisson Gleichung

Problem: Betrachte die Poisson Gleichung mit Neumann Randbedingungen:

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad u'(0) = u'(1) = 0.$$

Zeige, daß die Mittelwertbedingung an f, $\int_0^1 f(x)dx = 0$, notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung ist. Weiters beweise, dass die Mittelwertbedingung an u, $\int_0^1 u(x)dx = 0$, die Eindeutigkeit einer Lösung garantiert.

Lösung: Sei u eine Lösung.

- Notwendig:

$$\int_0^1 f(x)dx = -\int_0^1 u''(x)dx = -u'(1) + u'(0) = 0$$

- Hinreichend: Durch Integrieren, definiere:

$$u(x) = u(0) - \int_0^x \int_0^\eta f(\xi)d\xi d\eta$$

  Also:

$$\begin{aligned}
u'(x) &= -\int_0^x f(\xi)d\xi \quad \Rightarrow \quad u'(0) = u'(1) = 0 \\
u''(x) &= -f(x)
\end{aligned}$$

  Daher ist u eine Lösung.

- Nimm an, daß u_1, u_2 zwei Lösungen sind, die die Mittelwertbedingung,

$$\int_0^1 u(x)dx = 0$$

erfüllen. Dann gilt:

$$u_2''(x) - u_1''(x) = 0$$

$$u_2'(x) - u_1'(x) = c \in \boldsymbol{R}$$

$$0 = u_2'(0) - u_1'(0) \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2(x) - u_1(x) = b \in \boldsymbol{R}$$

$$0 = \int_0^1 [u_2(x) - u_1(x)]dx = \int_0^1 bdx \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_2(x) = u_1(x).$$

8 Herleitung einer partiellen Differentialgleichung eines Lieblingssystems

Problem: Leite eine partielle Differentialgleichung her, durch die Modellierung eines Lieblingssystems. Verzeichne Annahmen und gib eine einfache Lösung, die die qualitative Natur der PDG zeigt (z.B. Wellen, Diffusion, Felder).

Lösung: Schriftliche Aufgabe.

9 Nicht-viskose Burgersche Gleichung

Problem: Finde eine Lösung der skalaren Erhaltungsgleichung (Burgerschen Gleichung):

$$u_t + uu_x = 0, \quad x \in \boldsymbol{R}, t > 0; \qquad u(x,0) = \begin{cases} +s, & x \leq 0 \\ -s, & x > 0 \end{cases}$$

für die zwei Fälle, $s = \pm 1$. (cf. LeVeque, p. 28)

Lösung: Bemerke, daß die Lösung der Konvektionsgleichung:

$$u_t + cu_x = 0$$

die folgende Form hat:

$$u(x,t) = g(x - ct)$$

weil:

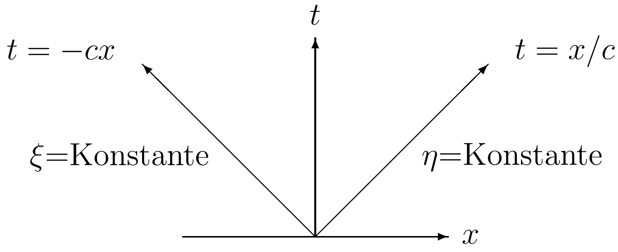
$$u_t + cu_x = -cg'(x - ct) + cg'(x - ct) = 0.$$

Das heißt, u ist konstant entlang den charakteristischen Kurven, $x - ct =$ Konstante.

- Solche charakteristischen Flächen sind analog zu Eigenräume in der Linearen Algebra, d.h. Information fließt nicht von einer charakteristischen Fläche, und ein Teil der PDG wohnt streng darin.

- Insbesondere mit:

$$
\begin{aligned}
\xi &= t + cx \\
\eta &= ct - x
\end{aligned}
$$



$$
\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & +1 \\ -1 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{1+c^2} \begin{bmatrix} c & -1 \\ +1 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}.
$$

Mit der Kettenregel,

$$
\begin{aligned}
u_\xi &= u_x x_\xi + u_t t_\xi = (1+c^2)^{-1}(cu_x + u_t) = 0 \\
u_\eta &= u_x x_\eta + u_t t_\eta = (1+c^2)^{-1}(cu_t - u_x)
\end{aligned}
$$

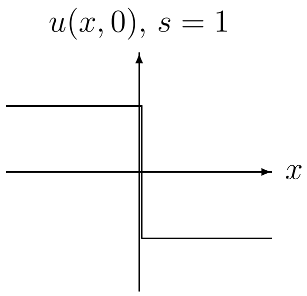
Daher wohnt die PDG:

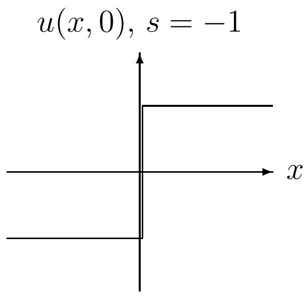
$$
\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad \text{auf} \quad \eta = ct - x = \text{Konstante.}
$$

- Für die Burgersche Gleichung, gibt es am Anfang:

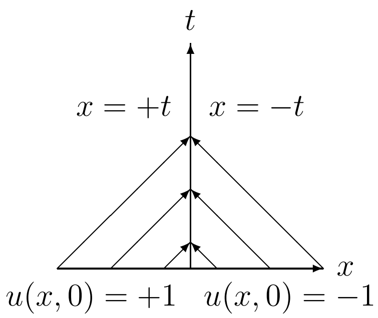
$$
u_t + u(x,0)u_x = 0
$$

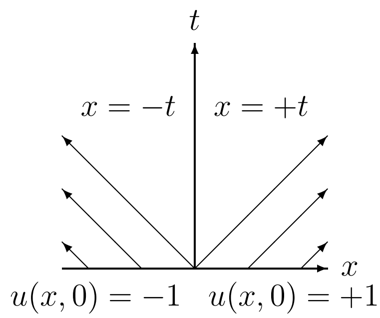
in welcher:



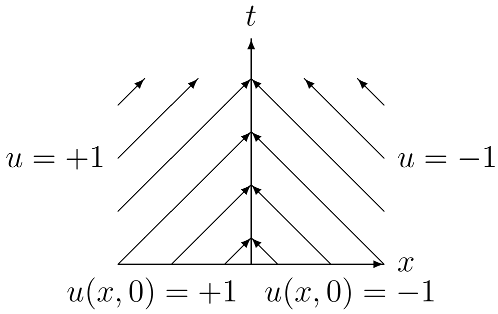


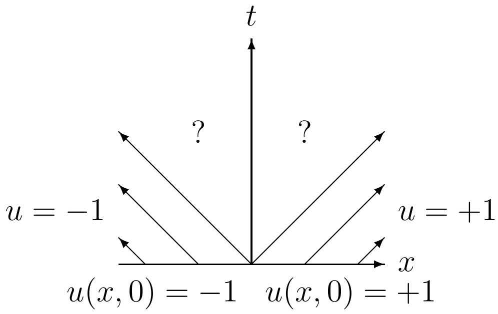
- Deshalb gibt es die folgenden anfänglichen charakteristischen Kurven:



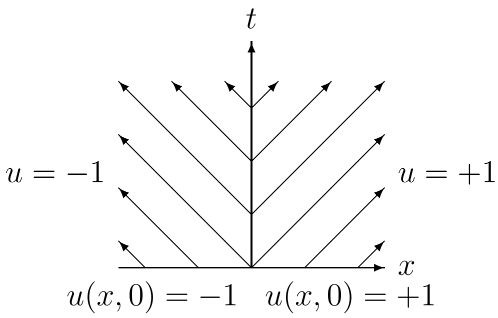


- Weil u in diesem einfachen Problem konstant entlang der charakteristischen Kurven bleibt, bleiben die (meisten) charakteristischen Kurven dieselben für $t > 0$:





- Im zweiten Fall, nimm eine einfache Lösung:



- In beiden Fällen, gibt es Unstetigkeiten an $x = 0$, $t \geq 0$. Um diese Lösungen zu überprüfen, überlege die schwache Form, die von der Divergenzform hergeleitet werden kann:

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0$$

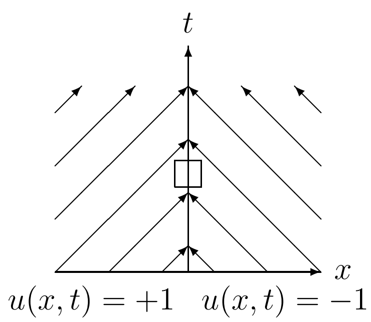
Für beliebige x_1, x_2:

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(x,t)dx + \frac{1}{2}[u^2(x_2,t) - u^2(x_1,t)] = 0$$

Für beliebige t_1, t_2:

$$\int_{x_1}^{x_2} [u(x,t_2) - u(x,t_1)]dx + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} [u^2(x_2,t) - u^2(x_1,t)]dt = 0$$

- Probe mit der Testzelle $[-\varepsilon, +\varepsilon] \times [t_1, t_2]$:



$$\int_{-\varepsilon}^{0} [u(x,t_2)_{=+1} - u(x,t_1)_{=+1}]dx +$$

$$\int_{0}^{+\varepsilon} [u(x,t_2)_{=-1} - u(x,t_1)_{=-1}]dx +$$

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} [u^2(+\varepsilon,t)_{=(-1)^2} - u^2(-\varepsilon,t)_{=(+1)^2}]dt = 0$$

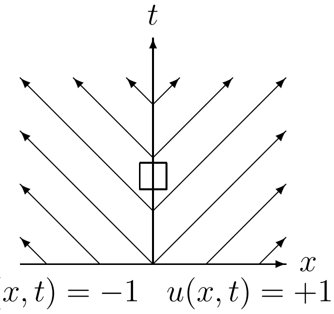
und andere Testzellen sind tatsächlich einfacher.

- Probe mit der Testzelle $[-\varepsilon, +\varepsilon] \times [t_1, t_2]$

$$\int_{-\varepsilon}^{0}[u(x,t_2)_{=-1}-u(x,t_1)_{=-1}]dx+$$

$$\int_{0}^{\varepsilon}[u(x,t_2)_{=+1}-u(x,t_1)_{=+1}]dx+$$

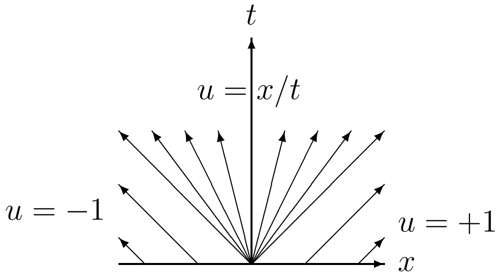
$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}[u^2(+\varepsilon,t)_{=(+1)^2}-u^2(-\varepsilon,t)_{=(-1)^2}]dt=0$$



und andere Testzellen sind tatsächlich einfacher.

- Wir werden später sehen, daß die folgende Lösung natürlicher im zweiten Fall ist:

$$u(x,t)=\begin{cases} -1, & x \le -t \\ x/t, & -t \le x \le t \\ +1, & t \le x \end{cases}$$



10 Greensche Formeln

Problem: Mit dem Satz von Gauß,

$$\int_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{F}d\Omega=\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}d\Gamma$$

bestätige die Greenschen Formeln:

$$\int_\Omega v\nabla^2ud\Omega+\int_\Omega\nabla v\cdot\nabla ud\Omega=\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma$$

$$\int_\Omega[u\nabla^2v-v\nabla^2u]d\Omega=\int_{\partial\Omega}[u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}]d\Gamma$$

Lösung: Definiere $\boldsymbol{F}=v\nabla u$, so:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{F} &= \nabla\cdot(v\nabla u)=v\nabla^2u+\nabla v\cdot\nabla u\\ \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} &= v\nabla u\cdot\hat{\boldsymbol{n}}=v\frac{\partial u}{\partial n}.\end{aligned}$$

Daher:

$$\int_\Omega v\nabla^2ud\Omega+\int_\Omega\nabla v\cdot\nabla ud\Omega=\int_\Omega\nabla\cdot\boldsymbol{F}d\Omega=\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}d\Gamma=\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma$$

Nun erhält man durch Subtraktion:

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\nabla^2ud\Omega+\int_\Omega\nabla v\cdot\nabla ud\Omega &= \int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma\\ \int_\Omega u\nabla^2vd\Omega+\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla vd\Omega &= \int_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial n}d\Gamma\\ \Rightarrow\quad \int_\Omega[v\nabla^2u-u\nabla^2v]d\Omega &= \int_{\partial\Omega}[v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}]d\Gamma\end{aligned}$$

11 Volumen und Oberfläche der Einheitskugel

Problem: Leite das Volumen und die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel her. (cf. Forster, p. 145)

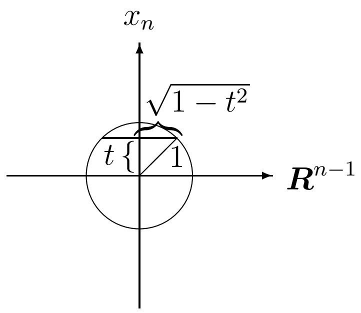
Lösung: Sei τ_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel.

- Bemerke, daß die Kugeln:
$$K_n(r) = \{x \in \boldsymbol{R}^n : \|x\| \le r\}$$
die Formel:
$$\mathrm{Vol}(K_n(r)) = r^n \mathrm{Vol}(K_n(1))$$
erfüllen. Diese Formel gilt, weil eine affin-lineare Abbildung $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ die Formel $\mathrm{Vol}(f(K)) = |\det(A)|\mathrm{Vol}(K)$ erfüllt, und daher $\mathrm{Vol}(K_n(r)) = |\det(rI)|\mathrm{Vol}(K_n(1))$.

- Da $K_1(1) = [-1, 1]$, folgt $\tau_1 = 2$. Für $n > 1$, wird τ_n mit dem Cavalierischen Prinzip berechnet:
$$K_t = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n-1} : (\boldsymbol{x}, t) \in K\}, \qquad \mathrm{Vol}(K) = \int_{\boldsymbol{R}} \mathrm{Vol}_{n-1}(K_t)dt.$$

- Nun gilt für die Schnittmengen:

$$K_n(1)_t = \begin{cases} K_{n-1}(\sqrt{1-t^2}), & |t| < 1 \\ \emptyset, & |t| > 1 \end{cases}$$



- Also:
$$\begin{aligned} \tau_n = \mathrm{Vol}(K_n(1)) &= \int_{-1}^{1} \mathrm{Vol}(K_{n-1}(\sqrt{1-t^2}))dt \\ &= \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-t^2})^{n-1} \mathrm{Vol}(K_{n-1}(1))dt = \tau_{n-1} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt \end{aligned}$$

- Weil:
$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = ...t = \cos(x),\ dt = -\sin(x),\ 1 - t^2 = \sin^2(x)... \\ &= \int_{\pi}^{0} \sin^{n-1}(x)(-\sin(x))dx = \int_0^{\pi} \sin^n(x)dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx \\ &= \begin{cases} \pi \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{n-1}{n}\right], & n \text{ gerade} \\ 2 \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{n-1}{n}\right], & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{oder} \quad c_n \cdot c_{n-1} = \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$
erfüllen die τ_n die Rekursionsformel:
$$\tau_n = c_n \tau_{n-1} = c_n c_{n-1} \tau_{n-2} = \frac{2\pi}{n} \tau_{n-2}.$$

- Weil $\tau_2 = \pi$,
$$\tau_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \quad \text{und} \quad \tau_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1\cdot 3\cdots(2k+1)}.$$
- Mit der Gamma Funktion:
$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt \\
\Gamma(k+1) &= k! \\
\Gamma(k+\tfrac{3}{2}) &= (k+\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \cdots = \left[\tfrac{2k+1}{2}\tfrac{2k-1}{2}\cdots\tfrac{1}{2}\right]\Gamma(\tfrac{1}{2}) \\
\Gamma(\tfrac{1}{2}) &= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$
bekommt man die günstigen Formeln:
$$\left.\begin{aligned}
\tau_{n=2k} &= \frac{\pi^k}{k!} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \\
\tau_{n=2k+1} &= \frac{\pi^{\frac{2k+1}{2}}}{\left[\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2k+1}{2}\right]\sqrt{\pi}} = \frac{\pi^{\frac{2k+1}{2}}}{\Gamma(k+\frac{3}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}
\end{aligned}\right\} \quad \text{oder} \quad \tau_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$
- Die Oberfläche ω_n der n-dimensionalen Einheitskugel $S_{n-1} = \partial K_n(1)$ wird mit dem folgenden Satz berechnet:
$$\int_{\boldsymbol{R}^n} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_0^\infty \left[\int_{\|\boldsymbol{x}\|=r} f(\boldsymbol{x})dS(\boldsymbol{x})\right]dr = \int_0^\infty \left[\int_{\|\boldsymbol{\xi}\|=1} f(r\boldsymbol{\xi})dS(\boldsymbol{\xi})\right]r^{n-1}dr.$$
Mit $f(\boldsymbol{x}) = \chi_{K_n(1)}(\boldsymbol{x})$,
$$\begin{aligned}
\tau_n = \int_{\boldsymbol{R}^n} \chi_{K_n(1)}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \int_{\|\boldsymbol{x}\|\le 1} d\boldsymbol{x} = \int_0^1 \left[\int_{\|\boldsymbol{x}\|=r} dS(\boldsymbol{x})\right]dr \\
&= \int_0^1 \underbrace{\left[\int_{\|\boldsymbol{\xi}\|=1} dS(\boldsymbol{\xi})\right]}_{=\omega_n} r^{n-1}dr = \frac{\omega_n}{n}
\end{aligned}$$
und weil $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$, $(m = \frac{n}{2})$:
$$\omega_n = n\tau_n = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$
- Die Oberfläche ω_n kann auch mit dem Satz von Gauß berechnet werden. Mit $\boldsymbol{F}_i = \langle \ldots, x_i, \ldots \rangle$:
$$\int_{\|\boldsymbol{x}\|\le 1} d\boldsymbol{x} = \int_{\|\boldsymbol{x}\|\le 1} \nabla\cdot\boldsymbol{F}_i d\boldsymbol{x} = \int_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \boldsymbol{F}_i\cdot\hat{\boldsymbol{n}}d\boldsymbol{x} = \int_{\|\boldsymbol{x}\|=1} n_i d\boldsymbol{x}$$
in der n_i die Komponente i von $\hat{\boldsymbol{n}}$ ist. Weil $n_i = x_i$, gibt eine Summierung:
$$n\tau_n = n\int_{\|\boldsymbol{x}\|\le 1} d\boldsymbol{x} = \int_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \sum_{i=1}^n x_i n_i d\boldsymbol{x} = \int_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \sum_{i=1}^n x_i^2 d\boldsymbol{x} = \int_{\|\boldsymbol{x}\|=1} d\boldsymbol{x} = \omega_n.$$

12 Lösung einer Wellengleichung

Problem: Berechne die Lösung der Wellengleichung:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in \boldsymbol{R}, \quad t > 0; \qquad u_t(x,0) = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Lösung: Bemerke, daß die Lösung der Wellengleichung mit Anfangswerten:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \boldsymbol{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \boldsymbol{R} \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \boldsymbol{R} \end{cases}$$

die folgende Form hat:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi.$$

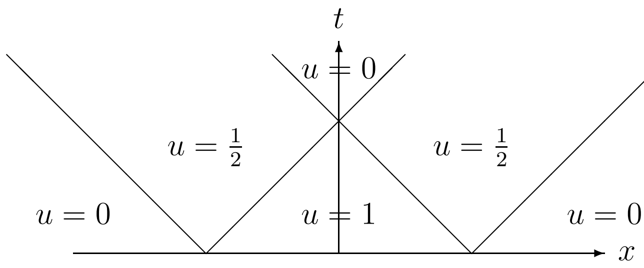
- Mit $g(x) = 0$ und:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

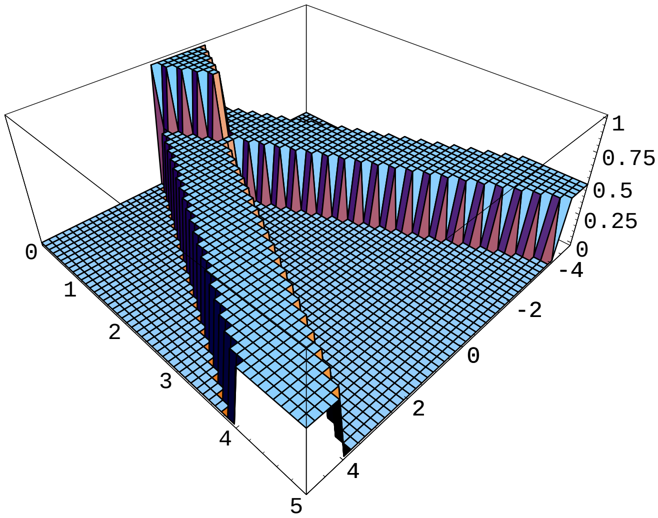
  ist:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] = \frac{1}{2}\begin{cases} 1, & |x+t| \leq 1 \\ 0, & |x+t| > 1 \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} 1, & |x-t| \leq 1 \\ 0, & |x-t| > 1 \end{cases}$$

- Von der Draufsicht sieht die Lösung wie folgt aus:



- Die drei-dimensionale Graphik ist wie folgt:



13 Lösung einer Wärmeleitungsgleichung

Problem: Zeige, daß

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)\right]$$

mit dem sogenannten Fehlerintegral (error function)

$$\operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^s e^{-t^2}\,dt$$

die Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \boldsymbol{R}, \quad t > 0; \qquad u(x,0) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Lösung: Für $t > 0$, gilt $u_t = u_{xx}$ weil:

$$\begin{aligned}
u_t &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)^2} \frac{x}{2}\left(-\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{x}{4\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\
u_x &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{4t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\
u_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\left(\frac{x^2}{4t}\right)} \left(-\frac{2x}{4t}\right) = -\frac{x}{4\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}}
\end{aligned}$$

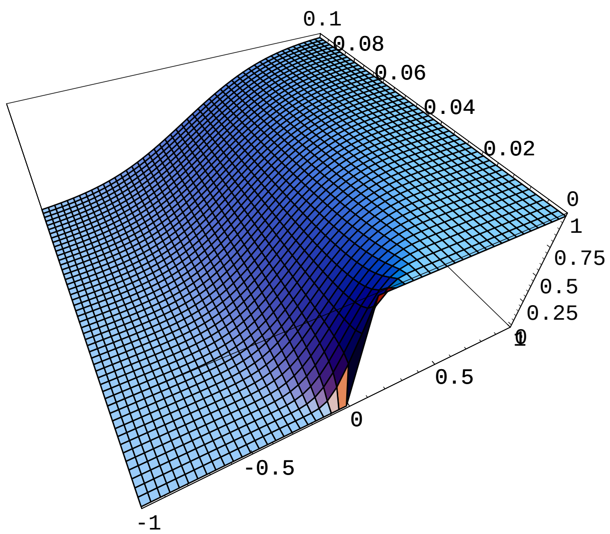
- Die Anfangsbedingungen werden erfüllt, weil:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} u(x,t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{t\to 0} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-\xi^2} d\xi \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi & ,\quad x > 0 \\ \frac{1}{2} & ,\quad x = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-\infty} e^{-\xi^2} d\xi & ,\quad x < 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0. \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

  Das heißt, $\mathrm{erf}(\pm\infty) = \pm 1$. Man kann auch diese Werte mit der Gamma Funktion wie folgt rechnen:

$$
-\int_0^{-\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \tfrac{1}{2} \int_0^{+\infty} \eta^{\frac{1}{2}-1} e^{-\eta} d\eta = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
$$

- Die drei-dimensionale Graphik der Lösung ist wie folgt:



14 Lösung einer Feldergleichung

Problem: Sei

$$
g(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi]
$$

die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion g am Kreis $K_\rho = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : x^2 + y^2 = \rho\}$ in der Laplace-Gleichung:

$$
\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u &=& 0, & \text{innerhalb von } K_\rho \\ u &=& g, & \text{auf } K_\rho. \end{array} \right.
$$

1. Mittels Separations-Ansatz $u(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$ in Polarkoordinaten bestimme eine (formale) Lösung. Hinweise:

(a) In Polarkoordinaten (r,ϕ),

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}.$$

(b) Die Lösungen $r^{-k}, k > 0$ und $\ln r$ (für $\lambda = 0$) der Gleichung

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$$

werden wegen der Forderung $\lim_{r\to 0} R(r) < \infty$ ausgeschlossen.

2. Als Anwendung erstelle eine Graphik der Lösung für $g(\phi) = \sin(3\phi)$.

Lösung: Mit einem Lösungskandidat $v(r,\theta) = R(r)\Phi(\phi)$:

$$0 = \Delta v = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\phi\phi} = R''(r)\Phi(\phi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\phi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\phi).$$

- Division durch $R(r)\Phi(\phi)/r^2$ ergibt:

$$-\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = \frac{R''(r)}{R(r)}r^2 + \frac{R'(r)}{R(r)}r.$$

Die linke Seite ist eine Funktion von ϕ, $f_1(\phi)$, und die rechte Seite ist eine Funktion von r, $f_2(r)$. Daher sind die beiden Funktionen konstant:

$$f_1(\phi) = f_2(r) = \lambda$$

und:

$$\Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0 \qquad r[rR'(r)]' - \lambda R(r) = r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0.$$

- Mit der Substitution $R(r) = F(\log(r))$:

$$R'(r) = F'(\log(r))\frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad [rR'(r)]' = F''(\log(r))\frac{1}{r}$$

und daher mit $s = \log(r)$:

$$F''(s) - \lambda F(s) = 0.$$

- Weil die Gleichungen für $\Phi(\phi)$ und $F(s)$ ähnliche Formen haben, machen wir eine Wiederholung von solchen gewöhnlichen Differentialgleichungen.

- Zu gegebenen stetigen Funktionen $p(x)$ und $q(x)$, seien u und v Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$w'' + p(x)w' + q(x)w = 0.$$

Nimm an, daß für irgendeinen Punkt x_0 die Vektoren $\langle u(x_0), u'(x_0)\rangle$ und $\langle v(x_0), v'(x_0)\rangle$ linear unabhängig sind. Dann, wenn y eine andere Lösung der Differentialgleichung in der Nähe von x_0 ist, gilt $y(x) = au(x) + bv(x)$ für zwei Konstanten a und b.

Daher, wenn zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung gefunden worden sind, dann sind durch lineare Kombinationen alle Lösungen gefunden worden.

- Nun suchen wir zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$w'' + pw' + qw = 0.$$

Weil die Differentialgleichung $w' = \mu w$ die Lösung $w(x) = e^{\mu x}$ hat, können wir vernünftigerweise erwarten, daß die obere Differentialgleichung Lösungen von der selben Form hat:

$$w(x) = e^{\mu x} \qquad \Rightarrow \qquad \mu^2 + p\mu + q = 0.$$

Das ist das charakteristische Polynom der Differentialgleichung mit den Wurzeln:

$$\mu = \frac{-p \pm \sqrt{d}}{2}, \qquad d = p^2 - 4q.$$

- Die Möglichkeiten sind wie folgt:

  * $d > 0$. Zwei linear unabhängige Lösungen sind:

  $$u(x) = \exp[\tfrac{1}{2}(-p + \sqrt{d})x] \quad \text{und} \quad v(x) = \exp[\tfrac{1}{2}(-p - \sqrt{d})x].$$

  * $d < 0$. Wegen der Eulerschen Formel:

  $$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta), \qquad i = \sqrt{-1}, \quad \theta \in \boldsymbol{R}$$

  gilt:

  $$\exp[\tfrac{1}{2}(-p \pm \sqrt{d})x] = \exp[\tfrac{1}{2}(-p \mp i\sqrt{|d|})x] = e^{-px/2}\cos(\tfrac{\sqrt{|d|}}{2}x) \mp e^{-px/2}\sin(\tfrac{\sqrt{|d|}}{2}x)$$

  und zwei linear unabhängige Lösungen sind:

  $$u(x) = e^{-px/2}\cos(\tfrac{\sqrt{|d|}}{2}x) \quad \text{und} \quad v(x) = e^{-px/2}\sin(\tfrac{\sqrt{|d|}}{2}x).$$

  * $d = 0$. Eine Lösung ist $u(x) = e^{-px}$. Mit der Methode der Variation der Parameter suchen wir eine zweite Lösung der Form $v(x) = u(x)c(x)$. Eine Summierung der folgenden Terme:

  $$\begin{aligned} qv(x) &= qc(x)e^{-px/2} \\ pv'(x) &= [pc'(x) - \tfrac{1}{2}p^2c(x)]e^{-px/2} \\ v''(x) &= [c''(x) - pc'(x) + \tfrac{1}{4}p^2c(x)]e^{-px/2} \end{aligned}$$

  gibt:

  $$0 = v'' + pv' + qv = e^{-px/2}[c''(x) - \tfrac{1}{4}(p^2 - 4q)_{=d}c(x)] \qquad \Rightarrow \qquad c(x) = ax + b$$

  und daher sind zwei linear unabhängige Lösungen:

  $$u(x) = e^{-px/2} \quad \text{und} \quad v(x) = xe^{-px/2}.$$

- Zurück zu Φ und F. Für eine bisher unbekannte Konstante λ, erfüllt $\Phi(\phi)$:

$$\begin{cases} \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0, & \phi \in [0, 2\pi] \\ \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi), & \Phi'(0) = \Phi'(2\pi). \end{cases}$$

  Aus dem bisher Gesagten, folgt nun, daß die allgemeine Lösung des obigen Gleichensystems:

$$\Phi(\phi) = A\cos(\sqrt{\lambda}\phi) + B\sin(\sqrt{\lambda}\phi)$$

  lautet, was günstiger mit exponentiellen Funktionen ausgedrückt wird, falls $\lambda < 0$. Um die Randbedingungen zu erfüllen, muss diese Lösung erfüllen:

$$\begin{cases} A\cos(2\sqrt{\lambda}\pi) & + & B\sin(2\sqrt{\lambda}\pi) & = & A \\ \\ -\sqrt{\lambda}A\sin(2\sqrt{\lambda}\pi) & + & \sqrt{\lambda}B\cos(2\sqrt{\lambda}\pi) & = & B\sqrt{\lambda} \end{cases}$$

  oder:

$$\begin{bmatrix} \cos(2\sqrt{\lambda}\pi) & \sin(2\sqrt{\lambda}\pi) \\ -\sin(2\sqrt{\lambda}\pi) & \cos(2\sqrt{\lambda}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.$$

  Wenn $\langle A, B\rangle \neq 0$, ist dieser Vektor ein Eigenvektor der Matrix M auf der linken Seite. Daher ist:

$$0 = \det(M - I) = (\cos(2\sqrt{\lambda}\pi) - 1)^2 + \sin^2(2\sqrt{\lambda}\pi) = 2 - 2\cos(2\sqrt{\lambda}\pi)$$

  und $\cos(2\sqrt{\lambda}\pi) = 1$ impliziert, daß:

$$2\sqrt{\lambda}\pi = 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

  Dadurch ist λ bestimmt. Mit diesem Resultat, definiere $\lambda_k = k^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ und:

$$\Phi_k(\phi) = A_k\cos(k\phi) + B_k\sin(k\phi), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Nun mit $\lambda = \lambda_k$ müssen die Funktionen $F_k(s)$ erfüllen:

$$F_k''(s) - \lambda_k F_k(s) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

  Von den oberen Tatsachen ist die allgemeine Lösung wie folgt:

$$\begin{aligned} F_0(s) &= C_0 + D_0 s, \quad k = 0 \\ F_k(s) &= C_k e^{+ks} + D_k e^{-ks}, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

  oder mit $R_k(r) = F(\log(r))$:

$$\begin{aligned} R_0(r) &= C_0 + D_0\log(r), \quad k = 0 \\ R_k(r) &= C_k e^{+k\log(r)} + D_k e^{-k\log(r)}, \\ &= C_k r^{+k} + D_k r^{-k}, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

- Jedes Produkt $\Phi_k(\phi)R_k(r)$ ist (mindestens irgendwo) harmonisch (erfüllt die Laplace Gleichung), und daher ist die folgende Summierung harmonisch:

$$v_N(r,\phi) = \sum_{k=0}^{N} R_k(r)\Phi_k(\phi).$$

Wir vermeiden die Fragen über die Konvergenz und nehmen $v = v_\infty$ als einen Kandidaten für die Lösung u. Damit v harmonisch innerhalb von K_ρ sein kann, muss v in diesem Gebiet glatt sein. Insbesondere ist:

$$\lim_{r\to 0} R_k(r) < \infty$$

und daher sind $D_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

- Damit v die Randbedinungen $v(\rho,\phi) = g(\phi)$ erfüllen, müssen die Koeffizienten erfüllen:

$$A_0C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k\rho^k[A_k\cos(k\phi) + B_k\sin(k\phi)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\phi) + b_k\sin(k\phi)]$$

oder:

$$A_0C_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad C_k\rho^k A_k = a_k, \qquad C_k\rho^k B_k = b_k.$$

Dann ist:

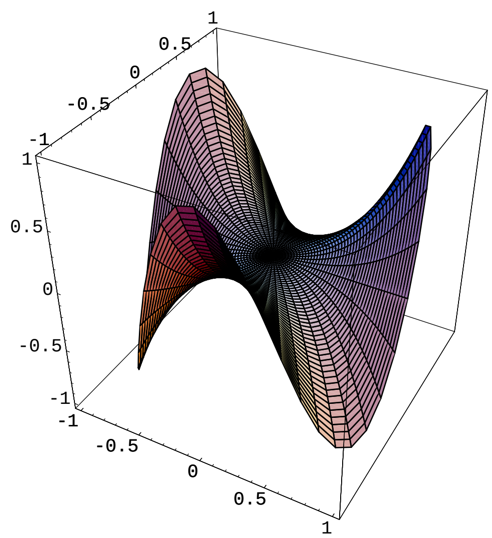
$$v(r,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^k [a_k\cos(k\phi) + b_k\sin(k\phi)]$$

- Wenn $g \in L^2([0, 2\pi])$, kann man zeigen, daß $\{v_N\}$ eine Cauchy Folge in einem gewissen Raum ist, der die Ableitungen zweiter Ordnung mißt. Daher hat $v = v_\infty$ Ableitungen zweiter Ordnung und $\Delta v = \lim_{N\to\infty}\Delta v_N = 0$. Da $v = g$ auf K_ρ, ist $u = v$ die (eindeutige) Lösung.

- Wenn $g = \sin(3\phi)$, ist die Lösung:

$$u(r,\phi) = \left(\frac{r}{\rho}\right)^3 \sin(3\phi)$$

mit der folgenden Graphik für $\rho = 1$:



- Wenn es nur bekannt ist, daß $g \in L^2([0, 2\pi])$, können wir wie folgt argumentieren.
  - Seien $\{f_k\}$ die Eigenfunktionen des regulären Sturm-Liouville Systems:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + [\lambda\kappa(x) - q(x)]u = 0$$

mit Randbedingungen:

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0, \qquad \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0 \qquad (\alpha_0\alpha_1 \neq 0 \neq \beta_0\beta_1)$$

oder:

$$u(a) = u(b), \qquad u'(a) = u'(b).$$

Das heißt, $p(x) > 0$, $\kappa(x) > 0$, und $q(x)$ sind glatt im Intervall $[a, b]$, und zu jeder Eigenfunktion f_k gibt es einen Eigenwert λ_k, so daß das Paar $\langle \lambda_k, f_k(x) \rangle$ das obere System erfüllt. Dann sind die Eigenfunktionen komplett, d.h. wenn:

$$\int_a^b \kappa(x) f(x)^2 dx < \infty$$

dann gibt es Konstanten $\{c_k\}$, so daß:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \kappa(x) \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k f_k(x)\right]^2 dx = 0.$$

  - Weil das System für Φ:

$$\begin{cases} \Phi''(\phi) + \lambda\Phi(\phi) = 0, & \phi \in [0, 2\pi] \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi), & \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases}$$

ein regulares Sturm-Liouville System ist, sind die Eigenfunktionen:

$$\{1, \cos(k\phi), \sin(k\phi)\} \qquad \text{(für die entsprechenden Eigenwerte } \{k^2\})$$

komplett. Daher gibt es Konstanten $\{a_0, a_k, b_k\}$, mit denen g wie folgt dargestellt werden kann:

$$g(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi].$$

Dann geht die Lösung, wie vorher gegeben.

15 Viskose Burgersche Gleichung

Problem: Nimm an, daß u das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung erfüllt:

$$\begin{cases} u_t &= \mu u_{xx}, \quad x \in \boldsymbol{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

a. Zeige, daß $v = -2\mu u_x/u$ die folgende viskose Burgersche Gleichung erfüllt:

$$v_t + vv_x = \mu v_{xx}, \qquad x \in \boldsymbol{R}, \quad t > 0.$$

Bemerkung: Das ist vielleicht der einzige bekannte Fall, in dem eine Lösung einer nichtlinearen PDG von einer Lösung einer linearen PDG bestimmt wird.

b. Mit diesem Resultat und der allgemeinen Lösungsform der Wärmeleitungsgleichung:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}\right] f(y)dy$$

zeige, daß die Lösung des Anfangswertproblems für die viskose Burgersche Gleichung:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} v_t + vv_x &=& \mu v_{xx}, & x \in \boldsymbol{R}, \quad t > 0 \\ v(x,0) &=& \kappa \cdot \operatorname{sgn}(x), & x \in \boldsymbol{R} \end{array} \right.$$

wie folgt ist:

$$v(x,t) = \kappa \cdot \frac{1 - h(x,t)}{1 + h(x,t)} \quad \text{mit} \quad h(x,t) = e^{\kappa x/\mu} \frac{1 - \operatorname{erf}\left(\dfrac{\kappa t + x}{\sqrt{4\mu t}}\right)}{1 - \operatorname{erf}\left(\dfrac{\kappa t - x}{\sqrt{4\mu t}}\right)}.$$

c. Mit diesem Resultat, bestätige die unteren Lösungen mit verschwindender Viskosität, die dem Limes $\mu \to 0$ entsprechen. Falls $\kappa = -1$, tritt die Druckwellenlösung auf:

$$\lim_{\substack{\mu \to 0 \\ \kappa = -1}} v(x,t) = -\operatorname{sgn}(x).$$

Falls $\kappa = +1$, tritt die Verdünnungwellenlösung auf:

$$\lim_{\substack{\mu \to 0 \\ \kappa = +1}} v(x,t) = \left\{ \begin{array}{rl} -1, & x \le -t \\ x/t, & |x| \le t \\ +1, & t \le x. \end{array} \right.$$

Lösung: Mit $v = -2\mu u_x/u$,

$$\begin{aligned} v_t &= -2\mu \frac{u_{xt}u - u_x u_t}{u^2} = 2\mu \frac{u u_x u_t - u^2 u_{xt}}{u^3} \\ vv_x &= -2\mu \frac{u_{xx}u - u_x^2}{u^2} \left(-2\mu \frac{u_x}{u}\right) = 2\mu^2 \frac{2u u_x u_{xx} - 2u_x^3}{u^3} \\ -\mu v_{xx} &= 2\mu^2 \frac{-3u u_x u_{xx} + u^2 u_{xxx} + 2u_x^3}{u^3} \end{aligned}$$

- Also erfüllt v die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} v_t + vv_x - \mu v_{xx} &= \frac{2\mu}{u^3}\left[u u_x u_t - u^2 u_{xt} - \mu u u_x u_{xx} + \mu u^2 u_{xxx}\right] \\ &= \frac{2\mu}{u^2}\left[u_x(u_t - \mu u_{xx}) - u(u_t - \mu u_{xx})_x\right] = 0. \end{aligned}$$

- Mit der Anfangsbedingung $v(x,0) = \kappa \cdot \mathrm{sgn}(x)$, ist die Anfangsbedingung für u wie folgt:

$$-2\mu \frac{u_x(x,0)}{u(x,0)} = \kappa \cdot \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -\kappa & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +\kappa & x > 0 \end{cases}$$

oder:

$$\log[u(x,0)] = \left\{ \begin{array}{rl} \dfrac{\kappa x}{2\mu}, & x < 0 \\ \\ 0, & x = 0 \\ \\ -\dfrac{\kappa x}{2\mu}, & x > 0 \end{array} \right\} \qquad \Rightarrow \qquad u(x,0) = \exp\left[-\frac{\kappa |x|}{2\mu}\right]$$

- Mit der allgemeinen Lösungsform ist

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}\right] u(y,0) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{0}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}\right] \exp\left[-\frac{\kappa y}{2\mu}\right] dy \\ &+ \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{0} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}\right] \exp\left[+\frac{\kappa y}{2\mu}\right] dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\mu t}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{4\mu t} \left(y + (\kappa t - x)\right)^2 + \frac{\kappa(\kappa t - 2x)}{4\mu}\right] dy \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\mu t}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{4\mu t} \left(y + (\kappa t + x)\right)^2 + \frac{\kappa(\kappa t + 2x)}{4\mu}\right] dy \end{aligned}$$

- Für diese Integrale, betrachte:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-a(y+b)^2+c} dy \overset{\xi=y+b}{=} \frac{2e^c}{\sqrt{\pi}} \int_b^\infty e^{-a\xi^2} d\xi \overset{\sqrt{a}\xi=\eta}{=} \frac{2e^c}{\sqrt{\pi a}} \int_{b\sqrt{a}}^\infty e^{-\eta^2} d\eta =$$

$$\frac{e^c}{\sqrt{a}} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{b\sqrt{a}} e^{-\eta^2} d\eta\right] = \frac{e^c}{\sqrt{a}} [\mathrm{erf}(\infty) - \mathrm{erf}(b\sqrt{a})] = \frac{e^c}{\sqrt{a}} [1 - \mathrm{erf}(b\sqrt{a})]$$

- Daher ist:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2} \exp\left[\frac{\kappa(\kappa t - 2x)}{4\mu}\right] \left(1 - \mathrm{erf}\left[\frac{\kappa t - x}{\sqrt{4\mu t}}\right]\right) \\ &+ \frac{1}{2} \exp\left[\frac{\kappa(\kappa t + 2x)}{4\mu}\right] \left(1 - \mathrm{erf}\left[\frac{\kappa t + x}{\sqrt{4\mu t}}\right]\right) \end{aligned}$$

- Weil:

$$\exp\left[\frac{\kappa(\kappa t + 2x)}{4\mu}\right] \partial_x \mathrm{erf}\left[\frac{\kappa t + x}{\sqrt{4\mu t}}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\mu t}\right] = -\exp\left[\frac{\kappa(\kappa t - 2x)}{4\mu}\right] \partial_x \mathrm{erf}\left[\frac{\kappa t - x}{\sqrt{4\mu t}}\right]$$

ist:

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \frac{\kappa}{4\mu}\exp\left[\frac{\kappa(\kappa t+2x)}{4\mu}\right]\left(1-\operatorname{erf}\left[\frac{\kappa t+x}{\sqrt{4\mu t}}\right]\right) \\ &- \frac{\kappa}{4\mu}\exp\left[\frac{\kappa(\kappa t-2x)}{4\mu}\right]\left(1-\operatorname{erf}\left[\frac{\kappa t-x}{\sqrt{4\mu t}}\right]\right) \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} v(x,t) = -2\mu\frac{u_x(x,t)}{u(x,t)} &= \kappa\frac{\left(1-\operatorname{erf}\left[\frac{\kappa t-x}{\sqrt{4\mu t}}\right]\right)-e^{\kappa x/\mu}\left(1-\operatorname{erf}\left[\frac{\kappa t+x}{\sqrt{4\mu t}}\right]\right)}{\left(1-\operatorname{erf}\left[\frac{\kappa t-x}{\sqrt{4\mu t}}\right]\right)+e^{\kappa x/\mu}\left(1-\operatorname{erf}\left[\frac{\kappa t+x}{\sqrt{4\mu t}}\right]\right)} \\ &= \kappa\cdot\frac{1-h(x,t)}{1+h(x,t)}, \qquad h(x,t)=e^{\kappa x/\mu}\frac{1-\operatorname{erf}\left[\frac{\kappa t+x}{\sqrt{4\mu t}}\right]}{1-\operatorname{erf}\left[\frac{\kappa t-x}{\sqrt{4\mu t}}\right]} \end{aligned}$$

- Nimm $\kappa=-1$. Entlang $x=ct$ ist:

$$\lim_{\mu\to 0}h(ct,t)=\lim_{\mu\to 0}e^{-ct/\mu}\frac{1-\operatorname{erf}\left[\frac{(-1+c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right]}{1-\operatorname{erf}\left[\frac{(-1-c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right]}$$

Für $c>0$:

$$\lim_{\mu\to 0}e^{-ct/\mu}=0 \quad \text{und} \quad \lim_{\mu\to 0}1-\operatorname{erf}\left[\frac{(-1-c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right]=2.$$

Für $0<c<1$:

$$\lim_{\mu\to 0}1-\operatorname{erf}\left[\frac{(-1+c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right]=2$$

und für $c>1$:

$$\lim_{\mu\to 0}1-\operatorname{erf}\left[\frac{(-1+c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right]=0.$$

Daher gilt $h\to 0$ und:

$$\lim_{\substack{\mu\to 0\\ \kappa=-1}} v(ct,t)=\kappa\frac{1-0}{1+0}=-1.$$

Für $c<0$:

$$\lim_{\mu\to 0}e^{-ct/\mu}=+\infty, \quad \text{und} \quad \lim_{\mu\to 0}1-\operatorname{erf}\left[\frac{(-1+c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right]=2.$$

Für $-1<c<0$:

$$\lim_{\mu\to 0}1-\operatorname{erf}\left[\frac{(-1-c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right]=2$$

und für $c<-1$:

$$\lim_{\mu\to 0}1-\operatorname{erf}\left[\frac{(-1-c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right]=0^+.$$

Daher gilt $h \to +\infty$ und:

$$\lim_{\substack{\mu \to 0 \\ \kappa = -1}} v(ct,t) = \kappa \cdot \frac{1-\infty}{1+\infty} = -\kappa = +1.$$

Für $c = 0$, $h = 1$ und $v = 0$.

- Nimm $\kappa = +1$. Entlang $x = ct$ ist:

$$\lim_{\mu\to 0} h(ct,t) = \lim_{\mu\to 0} e^{ct/\mu} \frac{1 - \operatorname{erf}\left[\dfrac{(1+c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right]}{1 - \operatorname{erf}\left[\dfrac{(1-c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right]}$$

Für $c \geq 1$:

$$\lim_{\substack{\mu \to 0 \\ c > 1}} 1 - \operatorname{erf}\left[\frac{(1-c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right] = 2, \qquad \lim_{\substack{\mu \to 0 \\ c = 1}} 1 - \operatorname{erf}\left[\frac{(1-c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right] = 1$$

und:

$$\lim_{\mu\to 0} \frac{1 - \operatorname{erf}\left[\dfrac{(1+c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right]}{\exp\left[-\dfrac{ct}{\mu}\right]} = \lim_{\mu\to 0} \frac{\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\dfrac{(1+c)^2 t}{4\mu}\right] \dfrac{(1+c)\sqrt{t}}{4\mu^{3/2}}}{\dfrac{ct}{\mu^2} \exp\left[-\dfrac{ct}{\mu}\right]}$$

$$= \lim_{\mu\to 0} \frac{1+c}{2c}\sqrt{\frac{\mu}{\pi t}} \exp\left[\frac{-(1-c)^2 t}{4\mu}\right] = 0.$$

Daher gilt $h \to 0$ und:

$$\lim_{\substack{\mu \to 0 \\ \kappa = +1}} v(ct,t) = \kappa \cdot \frac{1-0}{1+0} = \kappa = +1.$$

Für $c \leq -1$:

$$\lim_{\substack{\mu \to 0 \\ c < -1}} 1 - \operatorname{erf}\left[\frac{(1+c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right] = 2 \lim_{\substack{\mu \to 0 \\ c = 1}} 1 - \operatorname{erf}\left[\frac{(1+c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right] = 1$$

und:

$$\lim_{\mu\to 0} \frac{\exp\left[\dfrac{ct}{\mu}\right]}{1 - \operatorname{erf}\left[\dfrac{(1-c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right]} = \lim_{\mu\to 0} \frac{-\dfrac{ct}{\mu^2} \exp\left[\dfrac{ct}{\mu}\right]}{\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\dfrac{(1-c)^2 t}{4\mu}\right] \dfrac{(1-c)\sqrt{t}}{4\mu^{3/2}}}$$

$$= \lim_{\mu\to 0} \frac{2c}{c-1}\sqrt{\frac{\pi t}{\mu}} \exp\left[\frac{(1+c)^2 t}{4\mu}\right] = +\infty.$$

Daher gilt $h \to +\infty$ und

$$\lim_{\substack{\mu \to 0 \\ \kappa = +1}} v(ct,t) = \kappa \cdot \frac{1-\infty}{1+\infty} = -\kappa = -1.$$

Für $-1 < c < 0$:

$$\lim_{\mu\to 0} h(ct,t) =$$

$$\lim_{\mu\to 0} \frac{-\dfrac{ct}{\mu^2}\exp\left[\dfrac{ct}{\mu}\right]\left(1-\operatorname{erf}\left[\dfrac{(1+c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right]\right)+\exp\left[\dfrac{ct}{\mu}\right]\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\dfrac{(1+c)\sqrt{t}}{4\mu^{3/2}}\exp\left[-\dfrac{(1+c)^2t}{4\mu}\right]}{\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\dfrac{(1-c)\sqrt{t}}{4\mu^{3/2}}\exp\left[-\dfrac{(1-c)^2t}{4\mu}\right]}$$

$$= \lim_{\mu\to 0}\frac{2c}{c-1}\sqrt{\pi t}\frac{1-\operatorname{erf}\left[\dfrac{(1+c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right]}{\sqrt{\mu}\exp\left[-\dfrac{(1+c)^2t}{4\mu}\right]}+\frac{1+c}{1-c}$$

$$= \frac{1+c}{1-c}+\lim_{\mu\to 0}\frac{2c}{c-1}\sqrt{\pi t}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\dfrac{(1+c)\sqrt{t}}{4\mu^{3/2}}\exp\left[-\dfrac{(1+c)^2t}{4\mu}\right]}{\left[\dfrac{1}{2\sqrt{\mu}}+\dfrac{(1+c)^2t}{4\mu^{3/2}}\right]\exp\left[-\dfrac{(1+c)^2t}{4\mu}\right]}$$

$$= \frac{1+c}{1-c}+\lim_{\mu\to 0}\frac{2c}{c-1}\sqrt{\pi t}\frac{2(1+c)\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}[2\mu+(1+c)^2t]} = \frac{1+c}{1-c}+\frac{2c}{c-1}\frac{2}{1+c} = \frac{1-c}{1+c}$$

und:

$$\lim_{\substack{\mu\,\to\,0\\ \kappa\,=\,+1}} v(ct,t) = \frac{1-\dfrac{1-c}{1+c}}{1+\dfrac{1-c}{1+c}} = c = \frac{x}{t}.$$

Für $0 < c < 1$:

$$\lim_{\mu\to 0} h(ct,t) =$$

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\dfrac{(1+c)\sqrt{t}}{4\mu^{3/2}}\exp\left[-\dfrac{(1+c)^2t}{4\mu}\right]}{\dfrac{ct}{\mu^2}\exp\left[-\dfrac{ct}{\mu}\right]\left(1-\operatorname{erf}\left[\dfrac{(1-c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right]\right)+\exp\left[-\dfrac{ct}{\mu}\right]\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\dfrac{(1-c)\sqrt{t}}{4\mu^{3/2}}\exp\left[-\dfrac{(1-c)^2t}{4\mu}\right]}$$

$$= \left[\frac{1+c}{1-c}+\lim_{\mu\to 0}\frac{(1+c)\sqrt{\mu}\left(1-\operatorname{erf}\left[\dfrac{(1-c)\sqrt{t}}{2\sqrt{\mu}}\right]\right)}{2c\sqrt{\pi t}\exp\left[\dfrac{(1-c)^2t}{4\mu}\right]}\right]^{-1} = \left[\frac{1+c}{1-c}+0\right]^{-1} = \frac{1-c}{1+c}$$

und:

$$\lim_{\substack{\mu\,\to\,0\\ \kappa\,=\,+1}} v(ct,t) = \frac{1-\dfrac{1-c}{1+c}}{1+\dfrac{1-c}{1+c}} = c = \frac{x}{t}.$$

16 Allgemeine Lösungsform einer Transportgleichung

Problem: Nimm an, daß $c \in \boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$, und leite eine Formel der Lösung des folgenden Problems her:

$$\begin{cases} u_t + \boldsymbol{b} \cdot \nabla u + cu &= 0, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n, \quad t > 0 \\ u(\boldsymbol{x}, 0) &= g(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n. \end{cases}$$

Lösung: Definiere $z(s) = u(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{b}, t + s)$ so daß

$$\frac{dz}{ds} = \nabla u \cdot \boldsymbol{b} + u_t = -cu = -cz.$$

- Daher ist:

$$z(s) = \kappa e^{-cs}, \qquad \kappa = z(0) = u(\boldsymbol{x}, t).$$

- Mit der Anfangsbedingung:

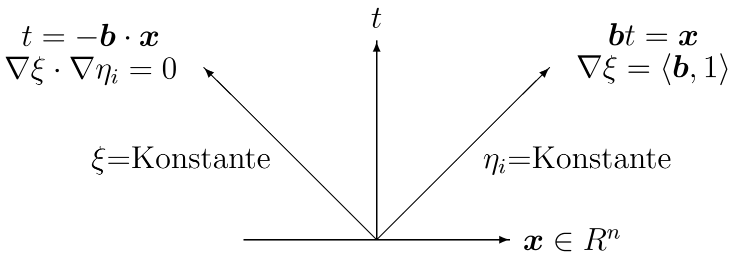
$$g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}t) = u(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}t, 0) = z(-t) = u(\boldsymbol{x}, t)e^{ct}$$

und:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = e^{-ct} g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}t).$$

- Betrachte die Methoden von Problem 9. Nun definiere:

$$\begin{aligned} \xi &= \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} + t \\ \eta_i &= x_i - b_i t \end{aligned}$$



- Mit der Kettenregel,

$$\begin{aligned} u_t &= u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_{\eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial t} &&= u_\xi - \sum_{i=1}^n u_{\eta_i} b_i \\ u_{x_j} &= u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n u_{\eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} &&= u_\xi b_j + u_{\eta_j} \\ \boldsymbol{b} \cdot \nabla u &= &&(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) u_\xi + \sum_{i=1}^n u_{\eta_i} b_i \end{aligned}$$

und:

$$u_t + \boldsymbol{b} \cdot \nabla u + cu = u_\xi (1 + |\boldsymbol{b}|^2) + cu = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{u_\xi}{u} = -\frac{c}{1 + |\boldsymbol{b}|^2}$$

Daher ist:

$$u(\boldsymbol{x}(\xi, \boldsymbol{\eta}), t(\xi, \boldsymbol{\eta})) = f(\boldsymbol{\eta}) \exp\left[-\frac{c\xi}{1 + |\boldsymbol{b}|^2}\right]$$

in welcher $\langle x(\xi, \boldsymbol{\eta}), t(\xi, \boldsymbol{\eta}) \rangle$ die Inverse der Transformation $\langle \xi, \boldsymbol{\eta} \rangle = \langle \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} + t, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}t \rangle$ darstellt.

- Mit den Substitutionen $\xi = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} + t$ und $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}t$ ergibt sich:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}t)\exp\left[-\frac{c(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} + t)}{1 + |\boldsymbol{b}|^2}\right]$$

- Mit der Anfangsbedingung bekommt man:

$$g(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x})\exp\left[-\frac{c\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}}{1 + |\boldsymbol{b}|^2}\right] \qquad \Rightarrow \qquad f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})\exp\left[\frac{c\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}}{1 + |\boldsymbol{b}|^2}\right]$$

  und:

$$u(\boldsymbol{x}(\xi, \boldsymbol{\eta}), t(\xi, \boldsymbol{\eta})) = g(\boldsymbol{\eta})\exp\left[\frac{c(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\eta} - \xi)}{1 + |\boldsymbol{b}|^2}\right]$$

  Mit den Substitutionen $\xi = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} + t$ und $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}t$ erhält man schließlich:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}t)\exp\left[\frac{c(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}t - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} - t)}{1 + |\boldsymbol{b}|^2}\right] = g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}t)e^{-ct}.$$

17 Rotationsinvarianz des Laplace-Operators

Problem: Beweise die Invarianz des Laplace-Operators im $\boldsymbol{R}^n$,

$$\Delta_y u(y) = \Delta_x u(Ax)$$

für Rotationen $y = Ax$ mit orthogonalen Matrizen A.

Lösung: Mit $u = u(y)$ und $y = Ax$,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}u(Ax) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial y_i}(Ax)\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial y_i}(y)a_{ik}$$

und:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}u(Ax) = \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial y_i}(Ax)a_{ik} = \sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i\partial y_j}(y)\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\right]a_{ik} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i\partial y_j}(y)a_{jk}a_{ik} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}$$

18 Gegenbeispiel für ein Maximumprinzip

Problem: Betrachte den folgenden Satz. Sei $\Omega \in \boldsymbol{R}^n$ ein beschränkter Bereich. Nimm an, daß $c \geq 0$ eine glatte Funktion ist, und definiere $u^+ = \max(u, 0)$ und $u^- = \min(u, 0)$. Dann :

$$\Delta u \geq cu \quad \Rightarrow \quad \max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}} u(\boldsymbol{x}) \leq \max_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} u^+(\boldsymbol{x}), \quad \text{und} \quad \Delta u \leq cu \quad \Rightarrow \quad \min_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}} u(\boldsymbol{x}) \geq \min_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} u^-(\boldsymbol{x}).$$

Insbesondere wenn $\Delta u = cu$, dann

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}} |u(\boldsymbol{x})| = \max_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} |u(\boldsymbol{x})|.$$

Nun finde ein Gegenbeispiel, das zeigt, daß dieses Resultat nicht gilt, wenn $c < 0$.

Lösung: Nimm:

$$c = -n, \qquad \Omega = (0, 2\pi)^n \quad \text{und} \quad u(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \sin x_k.$$

Dann gilt:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = -\sum_{i=1}^{n} u = -nu \quad \text{und} \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Aber es gibt Maxima und Minima in Ω: $u(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}) = 1$ und $u(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}) = -1$.

19 *A Priori* Schranke für die Poisson Gleichung

Problem: Wenn $B(0,1)$ als die abgeschlossene n-dimensionale Einheitskugel definiert ist, beweise, daß:

$$\max_{\boldsymbol{x} \in B(0,1)} |u(\boldsymbol{x})| \leq \max_{\boldsymbol{x} \in \partial B(0,1)} |g(\boldsymbol{x})| + \frac{1}{2n} \max_{\boldsymbol{x} \in B(0,1)} |f(\boldsymbol{x})|$$

wenn u eine glatte Lösung des folgenden Problems ist:

$$\begin{cases} \Delta u &= f, \quad \boldsymbol{x} \in B(0,1) \\ u &= g, \quad \boldsymbol{x} \in \partial B(0,1). \end{cases}$$

Hinweise:

i. Nimm an, daß $\Delta u \geq f$, und beweise, daß:

$$\max_{\boldsymbol{x} \in B(0,1)} u(\boldsymbol{x}) \leq \max_{\boldsymbol{x} \in \partial B(0,1)} g^+(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2n} \max_{\boldsymbol{x} \in B(0,1)} |f^-(\boldsymbol{x})|.$$

Dann folgt das Resultat, wenn diese Ungleichung mit u und $-u$ angewendet wird.

ii. Um die Ungleichung zu beweisen, definiere:

$$v(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{y} \in \partial B(0,1)} g^+(\boldsymbol{y}) + h(\boldsymbol{x}) \max_{\boldsymbol{y} \in B(0,1)} |f^-(\boldsymbol{y})|$$

für irgendein $h(\boldsymbol{x})$, so daß $v \geq u$ auf $\partial B(0,1)$ und $\Delta v \leq -\max |f^-| \leq \Delta u$ auf $B(0,1)$.

Lösung: Nimm an, daß $\Delta u \geq f$. Nun nimm:

$$h(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2n}(1 - |\boldsymbol{x}|^2)$$

so daß auf $\partial B(0,1)$,

$$v(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{y} \in \partial B(0,1)} g^+(\boldsymbol{y}) = \max_{\boldsymbol{y} \in \partial B(0,1)} u^+(\boldsymbol{y}) \geq \max_{\boldsymbol{y} \in \partial B(0,1)} u(\boldsymbol{y})$$

und in $B(0,1)$,

$$\Delta v = \max_{\boldsymbol{y} \in B(0,1)} |f^-(\boldsymbol{y})| \Delta h = -\max_{\boldsymbol{y} \in B(0,1)} |f^-(\boldsymbol{y})| \leq \Delta u.$$

Wegen dem Maximumprinzip ist $u \leq v$ in $B(0,1)$. Weil:

$$h(\boldsymbol{x}) \leq \frac{1}{2n}$$

in $B(0,1)$ ist:

$$\max_{\boldsymbol{x}\in B(0,1)} u(\boldsymbol{x}) \leq \max_{\boldsymbol{x}\in \partial B(0,1)} g^+(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2n} \max_{\boldsymbol{x}\in B(0,1)} |f^-(\boldsymbol{x})|.$$

Nun nimm an, daß $\Delta(-u) \geq (-f)$, so daß:

$$\max_{\boldsymbol{x}\in B(0,1)} [-u(\boldsymbol{x})] \leq \max_{\boldsymbol{x}\in \partial B(0,1)} [-g(\boldsymbol{x})]^+ + \frac{1}{2n} \max_{\boldsymbol{x}\in B(0,1)} |[-f(\boldsymbol{x})]^-|.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{x}\in B(0,1)} |u(\boldsymbol{x})| &= \max\{\max_{\boldsymbol{x}\in B(0,1)} u(\boldsymbol{x}), \max_{\boldsymbol{x}\in B(0,1)} [-u(\boldsymbol{x})]\} \\
&\leq \max\{\max_{\boldsymbol{x}\in \partial B(0,1)} g^+(\boldsymbol{x}), \max_{\boldsymbol{x}\in \partial B(0,1)} [-g(\boldsymbol{x})]^+\} \\
&+ \frac{1}{2n} \max\{\max_{\boldsymbol{x}\in B(0,1)} |f^-(\boldsymbol{x})|, \max_{\boldsymbol{x}\in B(0,1)} |[-f(\boldsymbol{x})]^-|\} \\
&= \max_{\boldsymbol{x}\in \partial B(0,1)} |g(\boldsymbol{x})| + \frac{1}{2n} \max_{\boldsymbol{x}\in B(0,1)} |f(\boldsymbol{x})|.
\end{aligned}$$

20 Maximumprinzip für den Laplace-Operator

Problem: Sei u eine Lösung der Gleichung $\Delta u = u^3 - u$ auf einem beschränkten Gebiet Ω. Nimm an, daß $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Beweise, daß $u \in [-1,1]$ überall in Ω. Kann u die Werte ± 1 erreichen?

Lösung: Nimm an, daß $u(x_0) = M > 1$ ein Maximum an $x_0 \in \Omega$ ist.

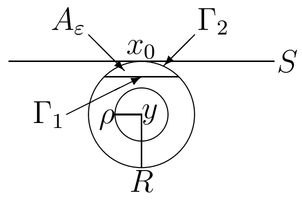
- Definiere K als die Zusammenhängskomponente von $\{x \in \Omega : u(x) > 1\}$, die x_0 enhält.
- Nun definiere die Funktion $v(x) = 1$. Dann gilt:

  $$\Delta v = 0 \leq u^3 - u = \Delta u \qquad \text{in } K$$

  und:

  $$v = 1 = u \quad \text{oder} \quad v \geq u \qquad \text{auf } \partial K.$$

- Wegen dem Maximumprinzip ist $u \leq v = 1$ in K, aber das widerspricht der Definition von K.
- Auf ähnliche Weise kann man zeigen, daß kein Minimum $u(x_0) = M < -1$ existieren kann. Daher ist $u(x) \in [-1,1]$ in Ω.
- Tatsächlich kann weder $u = -1$ noch $u = +1$ in Ω gelten. Das kann man wie folgt beweisen. Siehe das folgende Bild für die Geometrie:



- Nimm an, daß $u = 1$ auf einer Fläche S (oder an einem Punkt) in Ω.
- Weil u glatt ist, gibt es eine Kugel $B(y, R) \subset \Omega$, die S an einem Punkt $x_0 \in S$ berührt, und in der $u < 1$ gilt.
- Nun definiere A_ε als die Zusammenhängskomponente von $B(y, R)$, deren Abschluss x_0 enthält, und in der $1 - \varepsilon < u < 1$ gilt. Tatsächlich gilt $u = 1 - \varepsilon$ auf $\Gamma_1 = \partial A_\varepsilon \cap B(y, R)$. Für das Folgende, definiere auch $\Gamma_2 = \partial A_\varepsilon - \Gamma_1$.
- Nun definiere eine Hilfsfunktion:
$$w(x) = e^{-\alpha|x-y|^2} - e^{-\alpha R^2}.$$
- Wir werden die Parameter von w angemessen wählen, und zeigen, daß
$$1 - u \geq \varepsilon w \quad \text{auf } \partial A_\varepsilon \qquad \text{und} \qquad \Delta(1 - u) \leq \varepsilon \Delta w \quad \text{in } A_\varepsilon.$$
- Wähle R, α, und einen Wert ρ wie folgt:
$$\frac{e^{-2/3}}{2} > R^2, \quad \alpha = \frac{3}{2R^2} \quad \text{und} \quad \rho = \frac{2R}{3}.$$
- Dann gilt:
$$e^{-\alpha\rho^2} - e^{-\alpha R^2} = e^{-2/3} - e^{-3/2} < 1.$$
- Weil u glatt ist, kann ε klein genug gewählt werden, so daß $A_\varepsilon \subset A(y; \rho, R)$, wobei $A(y; \rho, R)$ den Ring mit dem Zentrum y, dem inneren Radius ρ, und dem äußeren Radius R darstellt.
- Weil die Funktion:
$$f(r) = e^{-\alpha r^2}[4\alpha^2 r^2 - 2\alpha]$$
ihr Maximum an $r = R$ hat, und weil:
$$f(\rho) = \frac{e^{-2/3}}{R^2} > 2$$
folgt nun:
$$\Delta w = e^{-\alpha|x-y|^2}[4\alpha^2|x - y|^2 - 2\alpha] = f(|x - y|) \geq 2 \quad \text{in } A(y; \rho, R).$$
- Weiterhin gilt:
$$w \leq e^{-\alpha\rho^2} - e^{-\alpha R^2} = e^{-2/3} - e^{-3/2} < 1 \quad \text{auf } \Gamma_1.$$

- Daher gilt:

$$\begin{array}{rcccl} 1-u & = & \varepsilon & \geq & \varepsilon w \quad \text{auf } \Gamma_1 \\ 1-u & \geq & 0 & = & \varepsilon w \quad \text{auf } \Gamma_2 \end{array}$$

  oder:

$$1-u \geq \varepsilon w \quad \text{auf } \partial A_\varepsilon.$$

- Weiterhin gilt:

$$\Delta u = u^3 - u \geq -\varepsilon(1-\varepsilon)(2-\varepsilon) \geq -2\varepsilon \geq -\varepsilon \Delta w \quad \text{in } A_\varepsilon$$

  oder:

$$\Delta(1-u) \leq \varepsilon \Delta w \quad \text{in } A_\varepsilon.$$

- Wegen dem Maximumprinzip ist $1-u \geq \varepsilon w$ in A_ε.

- Also gilt für $A_\varepsilon \ni x \to x_0$:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \leftarrow u(x_0) - u(x) \geq -\varepsilon[w(x_0) - w(x)] \to -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial n} > 0$$

  aber das ist ein Widerspruch, weil $u(x_0) = 1$ ein Maximum ist, und $\partial u / \partial n = 0$ gelten muss.

21 Subharmonische Funktionen

Problem: Eine Funktion v wird *subharmonisch* in U genannt, wenn:

$$-\Delta v \leq 0 \qquad \text{in } U.$$

a. Beweise, daß das Folgende gilt, wenn v subharmonisch ist:

$$v(x) \leq ⨍_{B(x,r)} v(y)dy \qquad \forall B(x,r) \subset U.$$

b. Beweise, daß daher $\max_{\bar{U}} v = \max_{\partial U} v$.

c. Sei $\phi : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ eine glatte und konvexe Funktion. Nimm an, daß u harmonisch ist, und daß $v = \phi(u)$ gilt. Beweise, daß v subharmonisch ist.

d. Beweise, daß $v = |\nabla u|^2$ subharmonisch ist, wenn u harmonisch ist.

Lösung: Definiere die Funktion:

$$\phi(r) = ⨍_{\partial B(x,r)} v(y)dy = ⨍_{\partial B(0,1)} v(x+rz)dz$$

- Nach der folgenden Rechnung ist $\phi'(r) \geq 0$.

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= ⨍_{\partial B(0,1)} \nabla v(x+rz) \cdot z dz &&= ⨍_{\partial B(x,r)} \nabla v(y) \cdot \frac{y-x}{r} dy \\ &= ⨍_{\partial B(x,r)} \frac{\partial v}{\partial n}(y) dy &&= \frac{1}{n\alpha(n) r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial v}{\partial n}(y) dy \\ &= \frac{r}{n} \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{B(x,r)} \Delta v(y) dy &&= \frac{r}{n} ⨍_{B(x,r)} \Delta v(y) dy \quad \geq \quad 0. \end{aligned}$$

Hier ist $\alpha(n)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel, und $y = x + rz$. Zwischen den letzten zwei Zeilen ist eine Greensche Formel benutzt worden.

- Weil $\phi'(r) \geq 0$, gilt:
$$\fint_{\partial B(x,r)} v(y)dy \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \fint_{\partial B(x,\varepsilon r)} v(y)dy = v(x).$$
Also:
$$\int_{B(x,r)} v(y) = \int_0^r \left[\int_{\partial B(x,s)} v(z)dz \right] ds \geq v(x) \int_0^r n\alpha(n)s^{n-1}ds = \alpha(n)r^n v(x).$$

- Nimm an, daß
$$v(x_0) = \max_{x \in \bar{U}} v(x) \equiv M$$
an einem Punkt $x_0 \in U$ gilt. Wegen des Teils (a) und der Ungleichung $v(y) \leq M$ in U, gilt die folgende Gleichung für $0 < r < \operatorname{dist}(x_0, \partial U) \equiv r_0$:
$$M = v(x_0) \leq \fint_{B(x,r)} v(y)dy \leq M = \fint_{B(x,r)} M dy$$
oder:
$$0 = \fint_{B(x,r)} [M - v(y)]dy.$$
Weil der Ausdruck in den Klammern niemals positiv in U ist, gilt $v(y) = M$ in $B(x_0, r)$. Insbesondere mit $x_1 \in \partial U$ und $\|x_1 - x_0\| = r_0$, gilt:
$$\max_{x \in \partial U} v = v(x_1) = \lim_{B(x_0,r_0) \ni y \to x_1} v(y) = M = \max_{x \in \bar{U}} v.$$

- Mit $v = \phi(u)$ gilt die folgende Ungleichung:
$$\begin{aligned} \Delta v = \sum_{k=1}^n v_{x_k x_k} &= \sum_{k=1}^n \partial_k \left[\phi'(u) u_{x_k}\right] = \sum_{k=1}^n \left[\phi''(u) u_{x_k}^2 + \phi'(u) u_{x_k x_k}\right] \\ &= \phi''(u)|\nabla u|^2 + \phi'(u)\Delta u = \phi''(u)|\nabla u|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

- Mit $v = |\nabla u|^2 = \nabla u \cdot \nabla u$ gilt die folgende Ungleichung:
$$\begin{aligned} \Delta v = \sum_{k=1}^n v_{x_k x_k} &= 2\sum_{k=1}^n \partial_k \left[\nabla u_{x_k} \cdot \nabla u\right] = 2\sum_{k=1}^n \left[\nabla u_{x_k x_k} \cdot \nabla u + \nabla u_{x_k} \cdot \nabla u_{x_k}\right] \\ &= 2\nabla(\Delta u) \cdot \nabla u + 2D^2 u : D^2 u = 2D^2 u : D^2 u \geq 0 \end{aligned}$$
wobei $D^2 u : D^2 u$ die Summe der Quadrate der zweifachen partiellen Ableitungen darstellt.

22 Poissonsche Formel für den Halbraum

Problem: Sei u eine Lösung des Problems:

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \boldsymbol{R}^n_+ \\ u &= g \quad \text{in } \partial\boldsymbol{R}^n_+ \end{cases}$$

wobei $\boldsymbol{R}^n_+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n : x_n > 0\}$, d.h. u ist durch die Poissonsche Formel für den Halbraum gegeben. Nimm an, daß g beschränkt ist, und daß $g(x) = |x|$ für $x \in \partial\boldsymbol{R}^n_+$, $|x| \le 1$. Beweise, daß ∇u *nicht* beschränkt in der Nähe von $x = 0$ ist. (Hinweise: mit $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$, schätze $[u(\lambda e_n) - u(0)]/\lambda$ ab.)

Lösung: Die Lösung u erfüllt die Poissonsche Formel für den Halbraum:

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\boldsymbol{R}^n_+} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dy$$

- Der Poissonsche Kern $K(x, y)$ erfüllt:

$$K(x,y) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)|x-y|^n}, \qquad \int_{\partial\boldsymbol{R}^n_+} K(x,y)dy = 1$$

  wobei $\alpha(n)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

- Daher erfüllt der Quotient $[u(\lambda e_n) - u(0)]/\lambda$ die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} \left|\frac{u(\lambda e_n) - u(0)}{\lambda}\right| &= \left|\int_{\partial\boldsymbol{R}^n_+} K(\lambda e_n, y)\frac{g(y) - g(0)}{\lambda} dy\right| \\ &= \left|\int_{\partial\boldsymbol{R}^n_+ \cap B(0,1)} K(\lambda e_n, y)\frac{|y|}{\lambda} dy + \int_{\partial\boldsymbol{R}^n_+ - B(0,1)} K(\lambda e_n, y)\frac{g(y)}{\lambda} dy\right| \\ &\ge \frac{2}{n\alpha(n)} \int_{\partial\boldsymbol{R}^n_+ \cap B(0,1)} \frac{|y|}{[\lambda^2 + |y|^2]^{\frac{1}{2}}} dy \\ &- \frac{2}{n\alpha(n)} \int_{\partial\boldsymbol{R}^n_+ - B(0,1)} \frac{|g(y)|}{[\lambda^2 + |y|^2]^{\frac{1}{2}}} dy \end{aligned}$$

  Wir werden zeigen, daß der letzte Term beschränkt ist, und daß der vorletzte Term nicht beschränkt ist.

- Zuerst betrachte das Gebiet ausserhalb von $B(0, 1)$:

$$\frac{2}{n\alpha(n)} \int_{\partial\boldsymbol{R}^n_+ - B(0,1)} \frac{|g(y)|}{[\lambda^2 + |y|^2]^{\frac{1}{2}}} dy \;\le\; \frac{2B}{n\alpha(n)} \int_{\partial\boldsymbol{R}^n_+ - B(0,1)} \frac{dy}{|y|^n} \;=$$

$$\frac{2B}{n\alpha(n)} \int_1^\infty \frac{dr}{r^n} \int_{\partial B_{n-1}(0,r)} d\sigma \;=\; \frac{2B}{n\alpha(n)} \int_1^\infty \frac{dr}{r^n} \Big[(n-1)r^{n-2}\alpha(n-1)\Big] \;=$$

$$\frac{2B(n-1)\alpha(n-1)}{n\alpha(n)} \int_1^\infty \frac{dr}{r^2} \;=\; \frac{2B(n-1)\alpha(n-1)}{n\alpha(n)} \;<\; \infty.$$

- Nun betrachte das Gebiet innerhalb von $B(0,1)$ in dem die Schranke $|g(y)| \leq B$ gilt:

$$\frac{2}{n\alpha(n)} \int_{\partial \boldsymbol{R}^n_+ \cap B(0,1)} \frac{|y|}{[\lambda^2 + |y|^2]^{\frac{1}{2}}} dy \quad = \quad \frac{2}{n\alpha(n)} \int_0^1 \frac{dr}{[\lambda^2 + r^2]^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial B_{n-1}(0,r)} d\sigma \quad =$$

$$\frac{2}{n\alpha(n)} \int_0^1 \frac{dr}{[\lambda^2 + r^2]^{\frac{n}{2}}} \left[(n-1) r^{n-2} \alpha(n-1)\right] \quad = \quad \frac{2(n-1)\alpha(n-1)}{n\alpha(n)} \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{[\lambda^2 + r^2]^{\frac{n}{2}}} dr.$$

Wähle $\varepsilon \in (0,1)$. Dann gilt der folgende Limes:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{r^{n-1}}{[\lambda^2 + r^2]^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{r} \qquad \varepsilon \leq r \leq 1$$

und daher gilt die folgende Ungleichung für jedes $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{[\lambda^2 + r^2]^{\frac{n}{2}}} dr \geq \lim_{\lambda \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{r^{n-1}}{[\lambda^2 + r^2]^{\frac{n}{2}}} dr = \int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r} = \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \to \infty.$$

23 Ungerade harmonische Extention

Problem: Sei U^+ die offene Halbkugel $\{x \in \boldsymbol{R}^n : |x| < 1, x_n > 0\}$. Nimm an, daß $u \in C(\bar{U}^+)$ harmonisch in U^+ ist, und daß $u = 0$ auf $\partial U^+ \cap \{x_n = 0\}$ gilt. Definiere:

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x_n \geq 0 \\ -u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n), & x_n < 0 \end{cases}$$

für $x \in U = B(0,1)$. Beweise, daß v harmonisch in U ist.

Lösung: Definiere die Funktion w durch die Poissonsche Formel für die Kugel:

$$w(x) = \frac{1 - |x|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{v(y)dy}{|x-y|^n}.$$

- Nach der folgenden Rechnung ist w eine ungerade Funktion von x_n.

$w(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$

$$= \frac{1-|x|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{v(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) dy_1 \cdots dy_{n-1} dy_n}{[(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 + (-x_n - y_n)^2]^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{1-|x|^2}{n\alpha(n)} \int_{-1}^1 \int_{\partial B(0, \sqrt{1-y_n^2})} \frac{v(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) dy_1 \cdots dy_{n-1} dy_n}{[(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 + (-x_n - y_n)^2]^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{1-|x|^2}{n\alpha(n)} \int_{-1}^1 \int_{\partial B(0, \sqrt{1-\eta^2})} \frac{v(y_1, \ldots, y_{n-1}, -\eta) dy_1 \cdots dy_{n-1} (-d\eta)}{[(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 + (-x_n + \eta)^2]^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{|x|^2 - 1}{n\alpha(n)} \int_{-1}^1 \int_{\partial B(0, \sqrt{1-\xi^2})} \frac{v(y_1, \ldots, y_{n-1}, \xi) dy_1 \cdots dy_{n-1} d\xi}{[(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 + (x_n - \xi)^2]^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{|x|^2 - 1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{v(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) dy_1 \cdots dy_{n-1} dy_n}{[(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 + (x_n - y_n)^2]^{\frac{n}{2}}}$$

$= -w(x_1, \ldots, x_{n-1}, +x_n)$

- Weil w harmonisch in U ist, ist w harmonisch in U^+. Weil w eine ungerade Funktion von x_n ist, gilt $w = 0$ auf $\{x_n = 0\}$. Deshalb gilt $w = v = u$ auf ∂U^+.

- Weil die Lösung des folgenden Problems eindeutig ist,

$$\begin{cases} \Delta w &= 0, \quad U^+ \\ w &= u, \quad \partial U^+ \end{cases}$$

  gilt $w = u$ in U^+.

- Weil $w = v = u$ in $\bar{U}^+$ gilt, und weil w und v ungerade Funktionen von x_n sind, gilt $v = w$ in U, d.h. v ist harmonisch in U.

24 Invarianz des Typs einer PDG

Problem: Durch eine stetig differenzierbare und invertierbare Koordinatentransformation:

$$T(x,y) = (\xi,\eta) = (\xi(x,y),\eta(x,y))$$

werde die PDG:

$$a(x,y)u_{xx}(x,y) + 2b(x,y)u_{xy}(x,y) + c(x,y)u_{yy}(x,y) = 0$$

übergeführt in eine PDG, deren Hauptteil die Gestalt:

$$A(\xi,\eta)U_{\xi\xi}(\xi,\eta) + 2B(\xi,\eta)U_{\xi\eta}(\xi,\eta) + C(\xi,\eta)U_{\eta\eta}(x,y) = 0$$

hat. Zeige, daß beide Gleichungen vom selben Typ sind:

$$AC - B^2 = (\det T')^2(ac - b^2).$$

Lösung: Mit $u(x,y) = u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)) = U(\xi,\eta) = U(\xi(x,y),\eta(x,y))$ und der Kettenregel, sind:

$$\begin{aligned}
u_x &= U_\xi\xi_x + U_\eta\eta_x \\
u_{xx} &= U_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + U_{\eta\eta}\eta_x^2 + U_\xi\xi_{xx} + U_\eta\eta_{xx} \\
u_{xy} &= U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + U_\xi\xi_{xy} + U_\eta\eta_{xy} \\
u_y &= U_\xi\xi_y + U_\eta\eta_y \\
u_{yy} &= U_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + U_{\eta\eta}\eta_y^2 + U_\xi\xi_{yy} + U_\eta\eta_{yy}
\end{aligned}$$

- Daher ist:

$$\begin{aligned}
& au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} \\
= \; & U_{\xi\xi}[a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2] + U_{\xi\eta}[2a\xi_x\eta_x + 2b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2c\xi_y\eta_y] + U_{\eta\eta}[a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2] \\
+ \; & a[U_\xi\xi_{xx} + U_\eta\eta_{xx}] + 2b[U_\xi\xi_{xy} + U_\eta\eta_{xy}] + c[U_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta yy] \\
= \; & U_{\xi\xi}\tilde{a} + 2U_{\xi\eta}\tilde{b} + U_{\eta\eta}\tilde{c} + \ldots
\end{aligned}$$

- Nun definiere:

$$\begin{array}{rcccl} \tilde{a}(x,y) & = & \tilde{a}(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)) & = & A(\xi,\eta) \\ \tilde{b}(x,y) & = & \tilde{b}(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)) & = & B(\xi,\eta) \\ \tilde{c}(x,y) & = & \tilde{c}(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)) & = & C(\xi,\eta) \end{array}$$

  und bemerke:

$$A = \nabla\xi^T M \nabla\xi, \quad B = \nabla\xi^T M \nabla\eta, \quad C = \nabla\eta^T M \nabla\eta, \qquad \text{mit} \qquad M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

  und:

$$\begin{aligned} AC - B^2 &= (\nabla\xi^T M \nabla\xi)(\nabla\eta^T M \nabla\eta) - (\nabla\xi^T M \nabla\eta)(\nabla\xi^T M \nabla\eta) \\ &= \nabla\xi^T M [\nabla\xi\nabla\eta^T - \nabla\eta\nabla\xi^T] M \nabla\eta. \end{aligned}$$

- Der Ausdruck in den Klammern ist:

$$\begin{aligned} \nabla\xi\nabla\eta^T - \nabla\eta\nabla\xi^T &= \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \xi_x\eta_x & \xi_x\eta_y \\ \xi_y\eta_x & \xi_y\eta_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \eta_x\xi_x & \eta_x\xi_y \\ \eta_y\xi_x & \eta_y\xi_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y \\ \xi_y\eta_x - \eta_y\xi_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \det T' \\ -\det T' & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

  wobei:

$$T' = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \det T' = \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y.$$

- Daher ist:

$$AC - B^2 = (\det T')[\nabla\xi^T M N M \nabla\eta], \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Durch eine Rechnung finden wir, daß $MNM = (ac - b^2)N$ gilt, und daß daher das folgende gilt:

$$AC - B^2 = (ac - b^2)(\det T')\nabla\xi^T N \nabla\eta = (ac - b^2)(\det T')^2$$

  weil $\nabla\xi^T N \nabla\eta = \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y = \det T'$ gilt.

25 Allgemeine Lösungsform einer Wärmeleitungsgleichung

Problem: Nimm an, daß $c \in \boldsymbol{R}$ und daß f und g glatte Funktionen sind, und leite eine Formel der Lösung des folgenden Problems her:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f, & \boldsymbol{R}^n \times (0,\infty), \quad t > 0 \\ u = g, & \boldsymbol{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Lösung: Wenn $c = 0$ gilt, wissen wir schon, daß die Fundamentallösung die folgende Form hat:

$$\Phi(x,t) = t^{-\alpha} v(t^{-\beta} x).$$

- Wir erinnern uns daran, daß die Fundamentallösung Φ die Gleichung $\Phi_t - \Delta\Phi + c\Phi = \delta(x,t)$ erfüllt, in der $\delta(x,t) = 0$ für $x \neq 0$ und $t \neq 0$ und $\int_{\boldsymbol{R}^n} \delta(x,t)dx = 1$.

- Weil die Lösung der Differentialgleichung $\Phi_t + c\Phi = \delta(x,t)$ räumlich entkoppelt ist, vermuten wir, daß die gesuchte Form eine Veränderung der oberen Form ist, die nur von t abhängt:

$$\Phi(x,t) = \phi(t)t^{-\alpha}v(t^{-\beta}x).$$

- Diese Form führt zur folgenden Bedingung an die Fundamentallösung Φ:

$$\delta(x,t) = \Phi_t - \Delta\Phi + c\Phi = \frac{1}{t^{1+\alpha+2\beta}}\left[vt^{1+2\beta}(\phi' + c\phi) - \phi(\alpha t^{2\beta} + \beta t^{\beta}x \cdot \nabla v + t\Delta v)\right]$$

- Wenn $\phi(t) = e^{-ct}$ gilt, bekommen wir die schon bekannte Form:

$$e^{ct}\delta(x,t) = e^{ct}(\Phi_t - \Delta\Phi + c\Phi) = -\frac{1}{t^{1+\alpha+2\beta}}\left[\alpha t^{2\beta} + \beta t^{\beta}x \cdot \nabla v + t\Delta v\right]$$

  wovon die Lösung $v(y) = \kappa e^{-|y|^2/4}$ schon bekannt ist.

- Mit $\phi(t) = e^{-ct}$ und $v(y) = \kappa e^{-|y|^2/4}$ und der Bedingung, daß $\int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(x,0)dx = 1$ gilt, folgt die Fundamentallösung:

$$\Phi(x,t) = \frac{e^{-ct}e^{-|x|^2/(4t)}}{(4\pi t)^{n/2}}$$

  die die Gleichung:

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(x,t)dx = e^{-ct}$$

  erfüllt.

- Wir können jetzt vorschlagen, daß die allgemeine Lösung die folgende Form hat:

$$u(x,t) = \int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y) + \int_0^t \int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)dyds.$$

- Um diese Form zu beweisen, können wir wegen der Linearität der PDG die zwei Fälle $f = 0$ und $g = 0$ getrennt betrachten.

- Lass $f = 0$ sein und fixiere $x^0 \in \boldsymbol{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ und $\gamma > 0$, so daß $|g(y) - g(x^0)e^{ct}| < \varepsilon$ gilt, wenn $|y - x^0| < \delta$, $y \in \boldsymbol{R}^n$, und $0 < t < \gamma$ gelten. Nimm an, daß $|x - x^0| < \delta/2$ gilt. Also,

$$\begin{aligned}
|u(x,t) - g(x^0)| &= \left|\int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(x-y,t)[g(y) - g(x^0)e^{ct}]dy\right| \\
&\leq \int_{B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)|g(y) - g(x^0)e^{ct}|dy \\
&+ \int_{\boldsymbol{R}^n - B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)|g(y) - g(x^0)e^{ct}|dy \equiv I + J.
\end{aligned}$$

- Weil $|g(y) - g(x^0)e^{ct}| < \varepsilon$ gilt, gilt:
$$I \leq \varepsilon \int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(x-y,t)dy = \varepsilon e^{-ct} \leq \varepsilon \to 0, \qquad \varepsilon \to \infty.$$
- In J gilt $|y - x^0| \geq \delta$ und daher gilt:
$$\begin{aligned} |y-x^0| &\leq |y-x| + |x-x^0| \leq |y-x| + \frac{\delta}{2} \\ &\leq |y-x| + \frac{\delta}{2}|y-x^0| \end{aligned}$$
- Nimm an, daß $|g| \leq B$ gilt. Weil $\frac{1}{2}|y-x^0| \leq |y-x|$ in J gilt, erfüllt J die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} J &\leq 2Be^{c\gamma} \int_{\boldsymbol{R}^n - B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)dy = 2B\frac{e^{c(\gamma-t)}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\boldsymbol{R}^n - B(x^0,\delta)} e^{-|x-y|^2/(4t)} dy \\ &\leq 2B\frac{e^{c\gamma}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\boldsymbol{R}^n - B(x^0,\delta)} e^{-|x^0-y|^2/(16t)} dy = 2B\frac{e^{c\gamma}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_\delta^\infty e^{-r^2/(16t)} \left[\int_{\partial B(x^0,r)} d\sigma\right] dr \\ &= 2B\frac{e^{c\gamma}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\delta/\sqrt{16t}}^\infty e^{-r^2/(16t)} nr^{n-1}\alpha(n)dr \\ &= n\alpha(n)B2^{2n}e^{c\gamma}\pi^{-\frac{n}{2}} \int_{\delta^2/(16t)}^\infty e^{-\xi}\xi^{\frac{n}{2}-1}d\xi \\ &= n\alpha(n)B2^{2n}e^{c\gamma}\pi^{-\frac{n}{2}}\Gamma(n, \frac{\delta^2}{16t}) \to 0, \qquad t \to \infty. \end{aligned}$$
- Daher gilt $\lim_{t\to 0} u(x,t) = g(x)$.
- Nun lass $g = 0$ sein. Weil Φ an $(0,0)$ nicht glatt ist, können wir nicht leicht unter dem Integral differenzieren. Deshalb benutzen wir die Transformation $\xi = x - y$, $\eta = t - s$, um die Beziehung $\Phi(x-y,t-s)f(y,s) = \Phi(\xi,\eta)f(x-\xi,t-\eta)$ und die folgende Formel zu bekommen:
$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(y,s)f(x-y,t-s)dyds.$$
- Nun können wir den PDG Operator anwenden:

$$\begin{aligned} & u_t - \Delta u + cu \\ =\ & \int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(y,s)f(x-y,0)dy + \int_0^t \int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(y,s)[\partial_t - \Delta_x + cI]f(x-y,t-s)dyds \\ =\ & \int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(y,s)f(x-y,0)dy \qquad (\equiv K) \\ +\ & \int_0^\varepsilon \int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(y,s)[-\partial_s - \Delta_y + cI]f(x-y,t-s)dyds \qquad (\equiv I) \\ +\ & \int_\varepsilon^t \int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(y,s)[-\partial_s - \Delta_x + cI]f(x-y,t-s)dyds \qquad (\equiv J) \end{aligned}$$

- Weil f glatt ist, erfüllt I die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} |I| &\leq [\max|f_t| + \max|\Delta f| + c\max|f|] \int_0^\infty \Phi(y,s)dyds \\ &\leq [\max|f_t| + \max|\Delta f| + c\max|f|]\, \varepsilon e^{-ct} \to 0, \qquad \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

- Durch partielle Integration finden wir, daß J die folgende Gleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} J &= \int_\varepsilon^t \int_{\boldsymbol{R}^n} [\partial_s - \Delta_y + cI]\Phi(y,s) f(x-y,t-s)dyds \qquad ([\partial_s - \Delta_y + cI]\Phi(y,s) = 0) \\ &+ \int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)dy - \int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0)dy \\ &= \int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)dy - K \end{aligned}$$

- Deshalb erfüllt u den folgenden Limes:

$$u_s - \Delta u + cu = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)dy = f(x,t).$$

26 Sublösungen einer Wärmeleitungsgleichung

Problem: Definiere $U_T = U \times (0,T]$ und $\Gamma_T = \bar{U}_T - U_T$. Eine Funktion v wird eine *Sublösung* in U_T genannt, wenn:

$$v_t - \Delta v \leq 0 \qquad \text{in } U_T.$$

1. Beweise, daß die folgende Ungleichung gilt, wenn v eine Sublösung ist:

$$v(x,t) \leq \frac{1}{4r^n} \int\int_{E(x,t;r)} v(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dyds \qquad \forall E(x,t;r) \subset U_T$$

   in der $E(x,t;r) = \{(y,s) \in \boldsymbol{R}^{n+1} : s \leq t,\ \exp[-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}]r^n \geq [4\pi(t-s)]^{n/2}\}$.

2. Beweise, daß daher $\max_{\bar{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v$.

3. Sei $\phi : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ eine glatte und konvexe Funktion. Nimm an, daß $u_t = \Delta u$ gilt, und daß $v = \phi(u)$ gilt. Beweise, daß v eine Sublösung ist.

4. Beweise, daß $v = |\nabla u|^2 + u_t^2$ eine Sublösung ist, wenn $u_t = \Delta u$ gilt.

Lösung: Nimm an, daß $(x,t) = (0,0)$ gilt, und definiere $E(r) = E(0,0;r)$.

- Bemerke, daß ein Integral über $E(r)$ zu einem Integral über $E(1)$ in der folgenden Weise transformiert werden kann. Weil $E(r)$ so definiert wird:

$$\left(\frac{r^2}{-4\pi s}\right)^{n/2} \exp\left[\frac{y^2}{r^2}\frac{r^2}{4s}\right] \geq 1$$

definiere $\xi = y/r$, $\eta = s/r^2$ zu bekommen:

$$\left(\frac{1}{-4\pi\eta}\right)^{n/2} \exp\left[\frac{\xi^2}{4\eta}\right] \geq 1$$

oder $E(1)$.

- Wir definieren:

$$\phi(r) = \frac{1}{4r^n} \int\int_{E(r)} v(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} dyds$$

und zeigen, daß $\phi'(r) \geq 0$. In diesem Fall, gilt das gesuchte Resultat:

$$\phi(r) \geq \lim_{t\to 0} \phi(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{4} \int\int_{E(1)} v(t\xi, t^2\eta) \frac{|\xi|^2}{\eta^2} d\xi d\eta = \frac{v(0,0)}{4} \int\int_{E(1)} \frac{|\xi|^2}{\eta^2} d\xi d\eta = v(0,0).$$

- ϕ erfüllt die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{4r^n} \int\int_{E(1)} v(r\xi, r^2\eta) \frac{1}{r^2} \frac{|\xi|^2}{\eta^2} (r^n d\xi)(r^2 d\eta) \\ &= \frac{1}{4} \int\int_{E(1)} v(r\xi, r^2\eta) \frac{|\xi|^2}{\eta^2} d\xi d\eta \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{4} \int\int_{E(1)} \left[(\nabla v \cdot \xi) \frac{|\xi|^2}{\eta^2} + 2r\eta v_s \frac{|\xi|^2}{\eta^2} \right] d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{4} \int\int_{E(1)} \left[\nabla v \cdot \left(\frac{y}{r}\right) \left(r^2 \frac{|y|^2}{s^2}\right) + 2v_s r \left(\frac{s}{r^2}\right) \left(r^2 \frac{|y|^2}{s^2}\right) \right] \frac{dy}{r^2} \frac{ds}{r^2} \\ &= \frac{1}{4r^n} \int\int_{E(r)} \left[(\nabla v \cdot y) \frac{|y|^2}{s^2} + 2v_s \frac{|y|^2}{s^2} \right] dyds \equiv A + B. \end{aligned}$$

- Nun definiere die Funktion

$$\psi(y,s) = -\frac{n}{2} \log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n \log(r)$$

die in der folgenden Form ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} \psi(y,s) &= \log(-4\pi s)^{-n/2} + \frac{|y|^2}{4s} + \log(r)^n \\ &= \log\left(\frac{r^n}{(-4\pi s)^{n/2}}\right) + \left(e^{|y|^2/(4s)}\right) \quad = \quad \log\left(r^n \frac{e^{|y|^2/(4s)}}{(-4\pi s)^{n/2}}\right) \end{aligned}$$

oder $\psi = \log(1) = 0$ auf $\partial E(r)$ und $\psi \geq \log(1) = 0$ in $E(r)$.

- Definiere:

$$\Sigma(\sigma) = E(r) \cap \{(y,s) \in \boldsymbol{R}^{n+1} : s = \sigma\},$$

damit

$$E(r) = \bigcup_{-r^2/(4\pi) \leq \sigma \leq 0} \Sigma(\sigma)$$

gilt.

- Weil $\nabla\psi = y/(2s)$ oder $y \cdot \nabla\psi = |y|^2/(2s)$ gilt, kann B in der folgenden Form durch räumliche partielle Integration ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{r^{n+1}} \int_{-r^2/(4\pi)}^{0} \left[\int_{\Sigma(s)} \nabla\psi \cdot (v_s y) dy \right] ds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \int_{-r^2/(4\pi)}^{0} \left[\int_{\partial\Sigma(s)} \psi(=0)(v_s y) \cdot n dy - \int_{\Sigma(s)} \psi \nabla \cdot (v_s y) dy \right] ds \\
&= -\frac{1}{r^{n+1}} \int_{-r^2/(4\pi)}^{0} \int_{\Sigma(s)} \psi \nabla \cdot (v_s y) dy ds \quad = \quad -\frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} \psi \nabla \cdot (v_s y) dy ds.
\end{aligned}$$

- Nun durch zeitliche partielle Integration bekommen wir die folgende Form für B:

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{1}{r^{n+1}} \int_{\Sigma(r)} \left[\int_{-r^2/(4\pi)}^{0} \psi[n v_s + \nabla v_s \cdot y] ds \right] dy \\
&= -\frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} \psi(n v_s) dy ds \\
&- \frac{1}{r^{n+1}} \int_{\Sigma(r)} \left[\psi(=0)(\nabla v \cdot y)|_{-r^2/(4\pi)}^{0} - \int_{-r^2/(4\pi)}^{0} \psi_s \nabla \cdot y ds \right] dy \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} [-\psi(n v_s) + \psi_s(\nabla v \cdot y)] dy ds
\end{aligned}$$

- Weil $\psi_s = -n/(2s) - |y|^2/(4s^2)$ gilt, kann B jetzt in Form von A ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(r)} [-\psi(n v_s) + \nabla v \cdot y \left(-\frac{n}{2s}\right)] dy ds - \frac{1}{4r^{n+1}} \int \int_{E(r)} (\nabla v \cdot y) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} [-\psi(n v_s) + \nabla v \cdot y \left(-\frac{n}{2s}\right)] dy ds - A.
\end{aligned}$$

- Deshalb ist ϕ' der erste obere Term. Weil $\psi \geq 0$ und $v_s \leq \Delta v$ in $E(r)$ gelten, erfüllt ϕ' die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\psi'(r) &= -\frac{n}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} \left[\psi v_s + \frac{\nabla v \cdot y}{2s} \right] dy ds \\
&\geq -\frac{n}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} \left[\psi \Delta v + \frac{\nabla v \cdot y}{2s} \right] dy ds
\end{aligned}$$

- Durch räumliche partielle Integration, bekommen wir das gesuchte Resultat:

$$
\begin{aligned}
\psi'(r) &\geq -\frac{n}{r^{n+1}}\int_{-r^2/(4\pi)}^{0}\left[\int_{\Sigma(s)}\psi\Delta v dy\right]ds - \frac{n}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)}\frac{\nabla v\cdot y}{2s}dyds \\
&= -\frac{n}{r^{n+1}}\int_{-r^2/(4\pi)}^{0}\left[\int_{\partial\Sigma(s)}\psi(=0)\frac{\partial v}{\partial n}dy - \int_{\Sigma(s)}\nabla\psi\cdot\nabla v dy\right]ds \\
&- \frac{n}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)}\frac{\nabla v\cdot y}{2s}dyds \\
&= \frac{n}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)}\left[\nabla v\cdot\nabla\psi - \nabla v\cdot\frac{y}{2s}\right]dyds \quad = \quad 0
\end{aligned}
$$

weil $\nabla\psi = y/(2s)$ gilt.

- Nimm an, daß:

$$v(x_0,t_0) = \max_{\bar{U}_T} v = M$$

an einem Punkt $(x_0,t_0)\in U_T$, und definiere:

$$r_0 = \mathrm{argmax}_r\{E(x_0,t_t;r)\subset U_T\}.$$

- Für $0<r<r_0$ gilt die Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
M = v(x_0,t_0) &\leq \frac{1}{4r^n}\int\int_{E(x,t;r)} v(y,s)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}dyds \\
&\leq \frac{M}{4r^n}\int\int_{E(x,t;r)}\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}dyds \quad = \quad M \quad = \quad \frac{1}{4r^n}\int\int_{E(x,t;r)} M\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}dyds
\end{aligned}
$$

und daher:

$$\frac{1}{4r^n}\int\int_{E(x,t;r)}[M-v(y,s)]\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}dyds = 0.$$

- Weil der Ausdruck in den Klammern niemals positiv ist, gilt $v(y,s)=M$ in $E(x,t;r)$.
- Insbesondere mit $(x_1,t_1)\in E(x,t;r_0)\cap\Gamma_T$, gilt:

$$\max_{\Gamma_T} v = v(x_1,t_1) = \lim_{E(x_0,t_0;r\to r_0)\ni(y,s)\to(x_1,t_1)} v(y,s) = M = \max_{\bar{U}_T} v.$$

- Mit $v=\phi(u)$ und $u_t=\Delta u$, erfüllt v die Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
v_t - \Delta v &= \phi'(u)u_t - \sum_{k=1}^{n}\partial_{x_k}\left[\phi'(u)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right] \\
&= \phi'(u)u_t - \sum_{k=1}^{n}\partial_{x_k}\left[\phi''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + \phi'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right] \\
&= \phi'(u)\left[u_t - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right] - \phi''(u)|\nabla u|^2 = -\phi''(u)|\nabla u|^2 \leq 0.
\end{aligned}
$$

- Mit $v = |\nabla u|^2 + u_t^2$ und $u_t = \Delta u$, erfüllt v die Ungleichung:

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= 2\nabla u \cdot \nabla u_t + 2u_t u_{tt} - \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} \left[2\nabla u_{x_k} \cdot \nabla u + 2u_t u_{tx_k}\right] \\ &= 2\nabla u \cdot \nabla u_t + 2u_t u_{tt} \\ &- 2\sum_{k=1}^n \left[\nabla u_{x_k x_k} \cdot \nabla u + \nabla u_{x_k} \cdot \nabla u_{x_k} + u_{tx_k} u_{tx_k} + u_t u_{tx_k x_k}\right] \\ &= 2\nabla u \cdot \nabla \left[u_t - \Delta u\right] + 2u_t \partial_t \left[u_t - \Delta u\right] - 2D^2 u : D^2 u = -2D^2 u : D^2 u \leq 0. \end{aligned}$$

27 Die d'Alembertsche Formel

Problem: Betrachte die d'Alembertsche Formel:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy, \qquad x \in \boldsymbol{R}, t \geq 0$$

für die Lösung des Problems:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \boldsymbol{R} \times (0,\infty) \\ u = g & \boldsymbol{R} \times \{t=0\} \\ u_t = h & \boldsymbol{R} \times \{t=0\}. \end{cases}$$

1. Beweise, daß die allgemeine Lösung der PDG $u_{\xi\eta} = 0$ ist:

   $$u(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

   für beliebige Funktionen F und G.

2. Mit der Änderung der Variablen $\xi = x + t$, $\eta = x - t$, beweise, daß $u_{\xi\eta} = 0$ gilt, genau wenn $u_{tt} - u_{xx} = 0$ gilt.

3. Mit (a) und (b) beweise die d'Alembertsche Formel.

Lösung: Durch Integration bekommen wir die allgemeine Lösung der PDG $U_{\xi\eta} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int U_{\xi\eta} d\eta &&= U_\xi + f(\xi) \\ U - G(\eta) &= \int U_\xi d\xi &&= -\int f(\xi) d\xi = F(\xi) \\ & & U(\xi,\eta) &= F(\xi) + G(\eta). \end{aligned}$$

- Die Transformation und ihre Inverse sind:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

  und daher sind $x_\xi = x_\eta = 1/2$ und $t_\xi = -t_\eta = 1/2$. Natürlich sind $x_{\xi\eta} = t_{\xi\eta} = 0$.

- Mit $u(x,y) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) = U(\xi,\eta) = U(\xi(x,y), \eta(x,y))$ und der Kettenregel, sind:

$$\begin{aligned} U_\xi &= u_x x_\xi + u_t t_\xi \\ 0 = U_{\xi\eta} &= [u_{xx} x_\xi x_\eta + u_{xt} x_\xi t_\eta + u_x x_{\xi\eta}] + [u_{tx} t_\xi x_\eta + u_{tt} t_\xi t_\eta + u_t t_{\xi\eta}] \\ &= u_{xx}\tfrac{1}{4} - u_{xt}\tfrac{1}{4} + u_{tx}\tfrac{1}{4} - u_{tt}\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}(u_{xx} - u_{tt}) \end{aligned}$$

- Mit $u(x,t) = U(\xi(x,t), \eta(x,t)) = F(\xi(x,t)) + G(\eta(x,t)) = F(x+t) + G(x-t)$, setzen wir g, h, F und G in Beziehung in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned} g(x) &= u(x,0) &= F(x) + G(x) \\ g'(x) &= u_x(x,0) &= F'(x) + G'(x) \\ h(x) &= u_t(x,0) &= F'(x) - G'(x) \end{aligned}$$

  oder:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\left[g(x) + \int_0^x h(\xi)d\xi\right] + \delta \\ G(x) &= \frac{1}{2}\left[g(x) - \int_0^x h(\xi)d\xi\right] + \varepsilon \end{aligned}$$

  in denen δ und ε Konstanten sind, die anhand der folgenden Bedingung bestimmt werden:

$$g(x) = u(x,0) = F(x) + G(x) = g(x) + \delta + \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad \delta + \varepsilon = 0.$$

- Durch Substituieren erreichen wir das gesuchte Resultat:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F(x+t) + G(x-t) \\ &= \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}\int_0^{x+t} h(\xi)d\xi + \frac{1}{2}g(x-t) - \frac{1}{2}\int_0^{x-t} h(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)d\xi \end{aligned}$$

28 Erhaltungseigenschaften einer Wellengleichung

Problem: Sei $u \in C^2(\boldsymbol{R} \times [0,\infty))$ die Lösung des Anfangsbedingungproblems:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \boldsymbol{R} \times (0,\infty) \\ u = g & \boldsymbol{R} \times \{t = 0\} \\ u_t = h & \boldsymbol{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Nimm an, daß g und h kompakte Träger haben. Definiere die kinetische Energie:

$$k(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t)dx$$

und die potentielle Energie:

$$p(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(x,t)dx$$

und beweise das Folgende.

1. $k(t) + p(t)$ ist konstant in t.
2. $k(t) = p(t)$ für jede genügend große Zeit t.

Lösung: Wir erinnern uns an die Lösungsform:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy.$$

- Die Ableitungen von u sind:

$$u_x(x,t) = \tfrac{1}{2}[g'(x+t) + g'(x-t)] + \tfrac{1}{2}[h(x+t) - h(x-t)]$$

$$u_t(x,t) = \tfrac{1}{2}[g'(x+t) - g'(x-t)] + \tfrac{1}{2}[h(x+t) + h(x-t)]$$

- Weil g und h kompakte Träger haben, haben u, u_x, und u_t kompakte Träger für jedes t.
- Sei $w(x,t)$ eine Funktion mit kompaktem Träger für jedes t. Betrachte die zeitliche Ableitung:

$$D_t \int_{-\infty}^{+\infty} w(x,t)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} [w(x,t+\varepsilon) - w(x,t)]/\varepsilon dx.$$

  Wegen dem Mittelwertsatz, gibt es eine Funktion $\tau(\varepsilon)$, $t \le \tau(\varepsilon) \le t+\varepsilon$, mit der die folgende Gleichung gilt:

$$w(x,t+\varepsilon) - w(x,t) = \varepsilon w_t(x,\tau(\varepsilon)).$$

  Weil $w(x,s)$, $t \le s \le t+\varepsilon$, einen kompakten Träger hat, gibt es eine Konstante k, mit der die folgende Abschätzung für jedes $\varepsilon \to 0$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |[w(x,t+\varepsilon) - w(x,t)]/\varepsilon| dx \le \int_{-\infty}^{+\infty} |w_t(x,\tau(\varepsilon))| dx \le k < \infty.$$

  Weil die Funktionen $\{[w(x,t+\varepsilon) - w(x,t)]/\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ majorisiert werden, sind Differentiation und Integration austauschbar:

$$D_t \int_{-\infty}^{+\infty} w(x,t)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} [w(x,t+\varepsilon) - w(x,t)]/\varepsilon dx = \int_{-\infty}^{+\infty} w_t(x,t)dx.$$

- Nun können wir unter dem Integral ableiten und finden:

$$D_t[k(t) + p(t)] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [2u_t u_{tt} + 2u_x u_{xt}]dx$$

- Partielle Integration gibt das Resultat:

$$D_t[k(t) + p(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{tt} dx + \lim_{\xi \to \infty} u_x u_t|_{-\xi}^{+\xi} - \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{xx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_t[u_{tt} - u_{xx}]dx = 0$$

  weil der Limes die Träger von u_x und u_t verläßt.

- Definiere:

$$\begin{aligned} A(x+t) &= \tfrac{1}{2}[g'(x+t) + h(x+t)] \\ B(x-t) &= \tfrac{1}{2}[g'(x-t) - h(x-t)] \end{aligned}$$

damit $p(t) - k(t)$ leicht berechnet werden kann:

$$p(t) - k(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [(A+B)^2 - (A-B)^2]dx \quad = \quad 2\int_{-\infty}^{\infty} A(x+t)B(x-t)dx.$$

- Wenn die Träger von g und h im Intervall $[-M, M]$ liegen, liegt der Träger von $A(x+t)$ im Intervall $[t-M, t+M]$ und der Träger von $B(x-t)$ im Intervall $[-t-M, -t+M]$.
- Die Intervalle $[t-M, t+M]$ und $[-t-M, -t+M]$ überschneiden sich nicht, sofern $t > M$ gilt. Also ist für $t > M$ $A(x+t)B(x-t) = 0$, und das Resultat $k(t) = p(t)$ folgt.

29 Energiedämpfung einer Wellengleichung

Problem: Sei u die Lösung des Problems:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \boldsymbol{R}^3 \times (0, \infty) \\ u = g & \boldsymbol{R}^3 \times \{t = 0\} \\ u_t = h & \boldsymbol{R}^3 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Nimm an, daß g und h glatt sind, und kompakte Träger haben. Beweise, daß eine Konstante C existiert, so daß:

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{t} \qquad x \in \boldsymbol{R}^3, t > 0.$$

Lösung: Wir erinnern uns an die Lösungsform:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t}\int_{|y-x|=t} h(y)dy + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{|y-x|=t} g(y)dy\right) \qquad x \in \boldsymbol{R}^3, t > 0.$$

- Mit der Substitution $\xi = (y-x)/t$, kann das zweite Integral in einer Form ausgedrückt werden, in der es leicht abgeleitet werden kann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\int_{|y-x|=t} g(y)dy &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{|\xi|=1} g(x+t\xi)td\xi \quad = \quad t\int_{|\xi|=1} \nabla g(x+t\xi)\cdot\xi d\xi \\ &= t\int_{|y-x|=t} \nabla g(y)\cdot\frac{y-x}{t}d\xi \quad = \quad \int_{|y-x|=t} \nabla g(y)\cdot(y-x)dy. \end{aligned}$$

- Daher kann u durch ein einziges Integral über die Oberfläche $\{y \in \boldsymbol{R}^3 : |y-x| = t\}$ ausgedrückt werden:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{|y-x|=t} [th(y) + g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)]\, dy.$$

- Nimm an, daß die Träger von h und g in einer Kugel $B(0,\rho)$ sind. Dann ist $4\pi\rho^2$ das Maximum für das Maß der Schnittfläche $\{y \in B(0,\rho) : |y-x| = t\}$ zwischen $B(0,\rho)$ und $\{y \in \boldsymbol{R}^3 : |y-x| = t\}$.

- Daher erfüllt u die Abschätzung:

$$|u(x,t)| \leq \frac{4\pi\rho^2}{4\pi t^2}\left[t \max_{y\in B(0,\rho)} |h(y)| + \max_{y\in B(0,\rho)} |g(y)| + \rho \max_{y\in B(0,\rho)} |\nabla g(y)|\right] \leq \frac{1}{t^2}(at+b) \leq \frac{C}{t}.$$

30 Quasilineare Gleichungen erster Ordnung

Problem: Benutze die Methode der charakteristischen Flächen und durch passende gewöhnliche Differentialgleichungen leite Lösungsformeln für die folgenden Probleme her:

$$(a) \quad \begin{cases} u_y + cu_x = 0, \quad y > 0 \\ u(x,0) = h(x) \end{cases} \qquad\qquad (b) \quad \begin{cases} u_y + uu_x = 0, \quad y > 0 \\ u(x,0) = h(x) \end{cases}$$

Hier $c \in \boldsymbol{R}$ und h ist eine glatte Funktion.

Lösung: Die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen entsprechen der Gleichung $au_x + bu_y = c$ mit den Randbedingungen $(f(s), g(s), h(s))$:

$$\frac{dx}{dt} = a, \qquad \frac{dy}{dt} = b, \qquad \frac{dz}{dt} = c$$

$$x(0,s) = f(s), \quad y(0,s) = g(s), \quad z(0,s) = h(s).$$

- Die Bedingung $u(x,0) = h(x)$ kann durch $x(0,s) = s$, $y(0,s) = 0$ und $z(0,s) = h(s)$ parametrisiert werden. Daher entsprechen die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen den jeweiligen Fällen:

$$(a)\begin{cases} \qquad \dfrac{dx}{dt} = c, \quad \dfrac{dy}{dt} = 1, \quad \dfrac{dz}{dt} = 0 \\ \\ x(0,s) = s, \quad y(0,s) = 0, \quad z(0,s) = h(s) \end{cases}$$

$$(b)\begin{cases} \qquad \dfrac{dx}{dt} = u, \quad \dfrac{dy}{dt} = 1, \quad \dfrac{dz}{dt} = 0 \\ \\ x(0,s) = s, \quad y(0,s) = 0, \quad z(0,s) = h(s) \end{cases}$$

- Die entsprechenden Lösungen werden durch Integration berechnet:

$$(a)\begin{cases} x(t,s) - s = x(t,s) - x(0,s) = ct, \\ \\ y(t,s) = y(t,s) - y(0,s) = t, \\ \\ z(t,s) - h(s) = z(t,s) - z(0,s) = 0 \end{cases}$$

$$(b)\begin{cases} x(t,s) - s = x(t,s) - x(0,s) = ut, \\ \\ y(t,s) = y(t,s) - y(0,s) = t, \\ \\ z(t,s) - h(s) = z(t,s) - z(0,s) = 0 \end{cases}$$

- Durch Substituieren erreichen wir das gesuchte Resultat:

$$(a): \quad x = s + ct = s + cy \Rightarrow s = x - cy \Rightarrow z = h(x - cy)$$

$$(b): \quad x = s + ut = s + uy \Rightarrow s = x - uy \Rightarrow z = h(x - uy).$$

31 Koordinaten Transformationen

Problem: Betrachte die Transformation von Koordinaten (x, y) in Koordinaten (ξ, η):

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

a. Berechne die Transformation von Koordinaten (ξ, η) in Koordinaten (x, y).

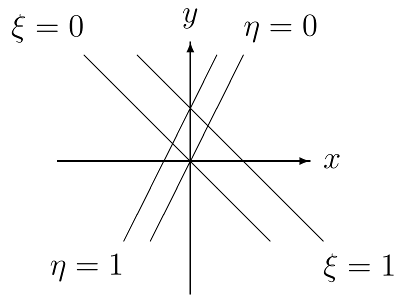
b. In einer (x, y)-Koordinatenebene skizziere das (ξ, η)-Koordinatensystem falls $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$, und $d = 1$ gelten. Im (x, y)-Koordinatensystem finde die Fläche des Gebiets, das durch $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\eta = 0$, und $\eta = 1$ beschränkt wird, und setze diese Fläche in Beziehung zu $\det(A)$.

c. Leite eine Bedingung auf A her, damit das (ξ, η)-Koordinatensystem orthogonal ist, und setze diese Bedingung in Beziehung zu $\nabla\xi$ und $\nabla\eta$.

Lösung: Mit der Inversen von A:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} \xi d - b\eta \\ a\eta - \xi c \end{bmatrix}$$

- Wenn $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$, und $d = 1$ gelten, folgen die Gleichungen $y = -x + \xi$ und $y = 2x + \eta$. Die Linien $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\eta = 0$, und $\eta = 1$ entsprechen der Gleichungungen $y = -x$, $y = 1 - x$, $y = 2x$ und $y = 1 + 2x$. In der (x, y)-Koordinatenebene werden diese Linien wie folgt skizziert.



Bemerke, daß die Gradienten von ξ und η $\nabla\xi = (1, 1)$ und $\nabla\eta = (-2, 1)$ also orthogonal zu den entsprechenden Höhenlinien sind.

- Die linke Ecke des Gebiets (G) ist an der Kreuzung der Linien $y = -x$ und $y = 2x + 1$, d.h. an $(x, y) = (-1/3, 1/3)$. Die obene Ecke des Gebiets ist an der Kreuzung der Linien $y = 1 - x$ und $y = 1 + 2x$, d.h. an $(x, y) = (0, 1)$. Deshalb hat das linke Dreieck Weite=1/3 und Höhe=1. Daher sind die Flächen 1/6 für das Dreieck und 1/3 für das Viereck. Durch Integration haben wir auch das Resultat:

$$\begin{aligned}
1 = \int_0^1 \int_0^1 d\xi d\eta &= \int_G \det(\partial(\xi,\eta)/\partial(x,y))dxdy \\
&= \int_G \det(A))dxdy = 3\int_G dxdy \\
&\Rightarrow \int_G dxdy = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

und im allgemeinen ist die Fläche $1/\det(A)$.

- Die Linien $\xi = ax + by$ und $\eta = cx + dy$ sind orthogonal genau wenn die Steigungen negative Reziproken sind, d.h. wenn $-a/b = -(-c/d)^{-1}$ oder $ad + bc = 0$. Diese Bedingung kann in wie folgt in Beziehung zu den Gradienten $\nabla\xi$ und $\nabla\eta$ gesetzt werden. Erstens gelten $\nabla\xi = (a, b)$ $\nabla\eta = (c, d)$, und zweitens gilt $\nabla\xi \cdot \nabla\eta = ad + bc = 0$.

32 Tangentiale Koordinatensysteme

Problem: Leite ein orthogonales Koordinatensystem (ξ, η, ζ) her, das orthogonal zur Fläche $z = x^2 + y^2$ an $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist. Für einen allgemeinen Punkt auf der Fläche $z = x^2 + y^2$, leite ein Koordinatensystem (ξ, η, ζ) her, in dem die ξ Richtung orthogonal zur Fläche ist.

Lösung: Der Gradient der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ steht immer orthogonal auf ihre Höhenflächen, z.B. $f(x, y, z) = 0$ oder $z = x^2 + y^2$.

- An dem Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist der Gradient $\nabla f = (2x, 2y, -1) = (1, 1, -1)$.
- Nimm an, daß ξ die orthogonale Richtung auf die Fläche $f(x, y, z) = 0$ ist. Daher ist $\nabla\xi$ orthogonal zu den Höhenflächen. Nimm:

$$\nabla\xi = \nabla f = (1, 1, -1).$$

- Die Gradienten $\nabla\eta$ und $\nabla\zeta$ müssen orthogonal zu $\nabla\xi$ sein. Durch Rotation um $\nabla\xi$ gibt es dafür unendlich viele Möglichkeiten, solange die Gradienten $\nabla\eta$ und $\nabla\zeta$ tangential zur Höhenfläche $z = x^2 + y^2$ sind. Man könnte sie also wie folgt wählen:

$$\nabla\xi = (1, 1, -1), \qquad \nabla\eta = (1, -1, 0), \qquad \nabla\zeta = (1, 1, 2).$$

- Es scheint sinnvoll zu verlangen, daß $\xi = \eta = \zeta = 0$ an dem Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gilt. Durch die Integration der Gradienten folgen die Definitionen:

$$\xi + \tfrac{1}{2} = x + y - z, \qquad \eta = x - y, \qquad \zeta + 2 = x + y + 2z.$$

- Für einen allgemeinen Punkt auf der Fläche $z = x^2 + y^2$, passt f einfach für ξ:

$$\nabla\xi = \nabla f = (2x, 2y, -1), \qquad \xi = x^2 + y^2 - z.$$

- Um ein Koordinatensystem zu konstruieren, müssen wir noch zwei linear unabhängige Richtungen haben. Man könnte sie wie folgt wählen:

$$\nabla\xi = (2x, 2y, -1), \qquad \nabla\eta = (1,0,0), \qquad \nabla\zeta = (0,1,0)$$

oder:

$$\xi = x^2 + y^2 - z, \qquad \eta = x, \qquad \zeta = y.$$

33 Charakteristische Flächen

Problem: Betrachte die PDG:

$$\partial_t \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \partial_x \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0.$$

a. Drücke die PDG in der folgenden Form aus:

$$LU = \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha D^\alpha U = B.$$

b. Berechne das charakteristische Symbol:

$$\Lambda(\nabla\varphi) = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha (\nabla\varphi)^\alpha.$$

c. Berechne die charakteristische Form:

$$Q(\nabla\varphi) = \det(\Lambda(\nabla\varphi)).$$

d. Finde die charakteristischen Flächen der PDG an einem allgemeinen Punkt (x_0, t_0), d.h. die Lösungen des folgenden Systems:

$$Q(\nabla\varphi) = 0, \quad \varphi(x_0, t_0) = 0.$$

Lösung: Die PDG kann mit den folgenden Definitionen in der verlangten Form ausgedrückt werden:

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \qquad \alpha = (1,0) \qquad \beta = (0,1) \qquad D^\alpha = \partial_t \qquad D^\beta = \partial_x$$

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$LU = A_\alpha D^\alpha U + A_\beta D^\beta U = B.$$

- Das charakteristische Symbol ist:

$$\Lambda(\nabla\varphi) = A_\alpha(\nabla\varphi)^\alpha + A_\beta(\nabla\varphi)^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varphi_t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \varphi_x = \begin{bmatrix} \varphi_t & \varphi_x \\ \varphi_x & \varphi_t \end{bmatrix}.$$

- Die charakteristische Form ist:

$$Q(\nabla\varphi) = \det(\Lambda(\nabla\varphi)) = \varphi_t^2 - \varphi_x^2.$$

- Die Lösungen des folgenden Systems:

$$Q(\nabla\varphi) = \varphi_t^2 - \varphi_x^2 = 0, \quad \varphi(x_0, t_0) = 0$$

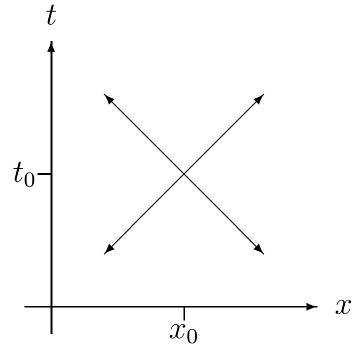
  sind die Lösungen der Transportgleichungen:

$$\varphi_t = \varphi_x, \quad \varphi(x_0, t_0) = 0, \qquad \varphi_t = -\varphi_x \quad \varphi(x_0, t_0) = 0.$$

- Weil wir nur irgendeine Lösung dieser Transportgleichungen suchen, passt diese Auswahl:

$$\varphi(x, t) = (t - t_0) + (x - x_0), \qquad \varphi(x, t) = (t - t_0) - (x - x_0).$$

- Diese charakteristischen Flächen werden in der folgenden Skizze dargestellt:



  und diese Skizze entspricht den Lösungen für die früheren Probleme über Wellengleichungen.

34 Schlecht gestelltes inverses Problem

Problem: Sei $\Omega = \{(r, \theta) : 0 < \rho \le r \le R, 0 \le \theta \le 2\pi\}$ ein Ring mit innerem Radius ρ und äußerem Radius R. Seien Γ_1 der innere Rand von Ω an $r = \rho$ und Γ_2 der äußere Rand von Ω an $r = R$. Nun betrachte das Problem:

$$\begin{cases} \Delta\phi &=& 0, & \Omega \\ \phi &=& u, & \Gamma_1 \\ \partial_n\phi &=& 0, & \Gamma_2 \end{cases}$$

und definiere den Operator $A : L^2(\Gamma_1) \to L^2(\Gamma_2)$ durch $[Au](\theta) = \phi(R, \theta)$.

1. Nimm an, daß die Funktion:

$$u(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta] \in L^2(\Gamma_1), \text{ d.h.} \qquad a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k^2 + b_k^2] < \infty$$

   gegeben wird, und leite eine unendliche Summe für $v = Au$ her. Zeige, daß die Koeffizienten von v quadratsummierbar sind.

2. Nimm an, daß die Funktion:

$$v(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta] \in L^2(\Gamma_2), \text{ d.h.} \qquad \alpha_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k^2 + \beta_k^2] < \infty$$

gegeben wird, und leite eine unendliche Summe für u in $Au = v$ her. Zeige, daß die Koeffizienten von u nicht notwendigerweise quadrat summierbar sind.

3. Konstruiere ein Beispiel, in dem $v_k \to 0$ auf Γ_2, während die entsprechenden $u_k \not\to 0$ auf Γ_1.

4. Erkläre warum das Problem ein $u \in L^2(\Gamma_1)$ zu finden, das für gegebenes $v \in L^2(\Gamma_2)$ die Gleichung $Au = v$ erfüllt, ein schlecht gestelltes Problem ist.

5. Leite eine unendliche Summe für das Minimum des Funktionals:

$$J(u) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_2} |Au - v|^2 d\theta + \xi_0 a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k [a_k^2 + b_k^2]$$

und finde eine Bedingung an die Koeffizienten $\{\xi_k\}$, damit die Minimierung von J eine regularisierte Lösung des Problems $Au = v$ gibt.

Lösung: Durch die Methoden eines früheren Problems wissen wir die allgemeine Lösungsform:

$$\phi(r, \theta) = A_0 + B_0 \log r + \sum_{k=1}^{\infty} [C_k r^{+k} + D_k r^{-k}][\tilde{A}_k \cos k\theta + \tilde{B}_k \sin k\theta].$$

- Die Bedingung an die Normalenableitung an Γ_2 gibt:

$$0 = \partial_r \phi(R, \theta) = \frac{B_0}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} k[C_k R^{+k-1} - D_k R^{-k-1}][\tilde{A}_k \cos k\theta + \tilde{B}_k \sin k\theta]$$

  oder:

$$B_0 = 0, \qquad C_k R^{2k} = D_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

- Mit $C_k R^k \tilde{A}_k = \frac{1}{2} A_k$, $C_k R^k \tilde{B}_k = \frac{1}{2} B_k$ und der Beziehung $\frac{1}{2}[a^{+k} + a^{-k}] = \cosh[\ln(a^k)]$, bekommen wir:

$$\phi(r, \theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \cosh[\ln(R/r)^k][A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta]$$

- Die Randbedingung u auf Γ_1 gibt:

$$\begin{aligned} \phi(\rho, \theta) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \cosh[\ln(R/\rho)^k][A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta] \quad = \quad u(\theta) \end{aligned}$$

  oder $A_0 = a_0$, $\cosh[\ln(R/\rho)^k] A_k = a_k$, $\cosh[\ln(R/\rho)^k] B_k = b_k$, und schließlich:

$$\phi(r, \theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cosh[\ln(R/r)^k]}{\cosh[\ln(R/\rho)^k]} [a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta].$$

- Für ein gegebenes u ist $v = Au$ wie folgt gegeben:

$$v(\theta) = \phi(R,\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh[\ln(R/\rho)^k]}[a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta].$$

  Nimm an, daß die Koeffizienten von u quadrat summierbar sind. Weil $1/\cosh[\ln(R/\rho)^k] < 1$ gilt, sind die Koeffizienten von v quadrat summierbar:

$$a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{\cosh[\ln(R/\rho)^k]^2} \leq a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k^2 + b_k^2] < \infty.$$

- Die Randbedingung v auf Γ_1 gibt:

$$\begin{aligned} \phi(R,\theta) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \cosh[\ln(R/R)^k][A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta] \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta] \quad = \quad v(\theta) \end{aligned}$$

  oder $A_0 = \alpha_0$, $A_k = \alpha_k$, $B_k = b_k$, und schließlich:

$$\phi(r,\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \cosh[\ln(R/r)^k][\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta]$$

- Für ein gegebenes v ist u in $v = Au$ wie folgt gegeben:

$$u(\theta) = \phi(\rho,\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \cosh[\ln(R/\rho)^k][\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta].$$

  Nimm an, daß die Koeffizienten von v quadrat summierbar sind. Weil $\cosh[\ln(R/\rho)^k]$ exponential wächst, sind die Koeffizienten von u nicht notwendigerweise quadrat summierbar. Nimm an, z.B. daß die Koeffizienten von v sind: $\{\alpha_0, \alpha_k, \beta_k\} = \{0, 0, 1/k\}$. Nun bemerke, daß die Koeffizienten von u nicht quadrat summierbar sind:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cosh[\ln(R/\rho)^k]^2}{k^2} = \infty.$$

- Definiere die entsprechenden Funktionen v_k und u_k auf Γ_2 und Γ_1 beziehungsweise:

$$v_k = \frac{1}{k}\cos k\theta \qquad u_k = \frac{\cosh[\ln(R/\rho)^k]}{k}\cos k\theta$$

  und bemerke, daß $v_k \to 0$ auf Γ_2 gilt, und daß $u_k \not\to 0$ auf Γ_1 gilt.

- Wir erinnern uns daran, daß die Bedingungen eines gut gestellten Problems sind, daß eine Lösung existieren muß, daß sie eindeutig sein muß, und daß sie von den Daten stetig abhängen muß. Betrachte das Problem, ein $u \in L^2(\Gamma_1)$ zu finden, das für ein gegebenes $v \in L^2(\Gamma_2)$ die Gleichung $Au = v$ erfüllt. Wir haben gesehen, daß keine Lösung $u \in L^2(\Gamma_1)$ einem $v \in L^2(\Gamma_2)$ mit Koeffizienten $\{0, 0, 1/k\}$ entspricht. Deshalb fehlt die Existenz in bestimmten Fällen. Zusätzlich haben wir gesehen, daß die Lösung $u = 0$ von den Daten $v = 0$ nicht stetig abhängt. Deshalb fehlt die stetige Abhängigkeit von den Daten in bestimmten Fällen.

- Um eine Formel für J herzuleiten, bemerke die Formeln:

$$\int_0^{2\pi} \cos(k\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \sin(k\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(k\theta)\sin(k\theta)d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(k\theta)\sin(l\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(k\theta)\cos(l\theta)d\theta = \pi\delta_{kl}$$

- Mit diesen Formeln kann J wie folgt ausgedrückt werden:

$$J(u) = 2(a_0-\alpha_0)^2+\xi_0 a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{\cosh[\ln(R/\rho)^k]}-\alpha_k\right)^2+\left(\frac{b_k}{\cosh[\ln(R/\rho)^k]}-\beta_k\right)^2+\xi_k(a_k^2+b_k^2)$$

- Damit J an u minimiert wird, müssen die Ableitung von J nach a_k und b_k null sein:

$$\begin{aligned}
4(a_0-\alpha_0)+2\xi_0 a_0 &= 0\\
2\left(\frac{a_k}{\cosh[\ln(R/\rho)^k]}-\alpha_k\right)\frac{1}{\cosh[\ln(R/\rho)^k]}+2\xi_k a_k &= 0\\
2\left(\frac{b_k}{\cosh[\ln(R/\rho)^k]}-\beta_k\right)\frac{1}{\cosh[\ln(R/\rho)^k]}+2\xi_k b_k &= 0
\end{aligned}$$

  oder:

$$a_0 = \frac{\alpha_0}{1+2\xi_0} \qquad a_k = \frac{\alpha_k\cosh[\ln(R/\rho)^k]}{1+\xi_k\cosh[\ln(R/\rho)^k]^2} \qquad b_k = \frac{\beta_k\cosh[\ln(R/\rho)^k]}{1+\xi_k\cosh[\ln(R/\rho)^k]^2}$$

- Wenn $\xi_k \geq \lambda > 0$ gilt, folgt:

$$\frac{\cosh[\ln(R/\rho)^k]}{1+\xi_k\cosh[\ln(R/\rho)^k]^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$$

  und daher gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} u(\theta)^2 d\theta &= a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k^2+b_k^2]\\
&= \frac{\alpha_0^2}{(1+2\xi_0)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_k\cosh[\ln(R/\rho)^k]}{1+\xi_k\cosh[\ln(R/\rho)^k]^2}\right)^2+\left(\frac{\beta_k\cosh[\ln(R/\rho)^k]}{(1+\xi_k\cosh[\ln(R/\rho)^k]^2)}\right)^2\\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left[\alpha_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2+\beta_k^2\right] = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{\Gamma_2} v(\theta)^2 d\theta
\end{aligned}$$

- Deshalb ist die Abbildung von den Daten $v \in L^2(\Gamma_2)$ zum Minimum $u \in L^2(\Gamma_1)$ für J beschränkt, und man kann zeigen, daß dieses Minimierungsproblem gut gestellt ist. Zusätzlich findet man, daß das Minimum umso glatter ist, je schneller die Koeffizienten $\{\xi_k\}$ wachsen. Weiters kann man zeigen, daß die Koeffizienten $\{\xi_k\}$ mit einer bestimmten Rate verschwinden können, so daß für ein $u^* \in L^2(\Gamma_1)$ und ein $v = Au^*+\delta$, $\delta \in L^2(\Gamma_2)$, das Minimum $u \in L^2(\Gamma_1)$ konvergiert zu u^* während δ verschwindet.