Beispiele mit Lösungen für Mathematische Grundlagen für Quantitative Wissenschaften

a.o.Univ.-Prof. Stephen Keeling
Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens Universität Graz

Inhaltsverzeichnis

1 Vorausgesetztes Wissen **3**
1.1 Beispiele . . . 3
1.2 Lösungen . . . 10

2 Kegelschnitte, Betragsfunktionen, Geraden **35**
2.1 Beispiele . . . 35
2.2 Lösungen . . . 37

3 Ungleichungen, Polynome, Polynomdivision **44**
3.1 Beispiele . . . 44
3.2 Lösungen . . . 46

4 Umkehrfunktionen, Rationale, Exp-, Log- und Winkel-Funktionen **51**
4.1 Beispiele . . . 51
4.2 Lösungen . . . 53

5 Stetigkeit, Grenzwerte, Flächeninhalt, Steigung **61**
5.1 Beispiele . . . 61
5.2 Lösungen . . . 63

6 Grenzwertbestimmung, Bisektionsverfahren, Geometrische Reihen **68**
6.1 Beispiele . . . 68
6.2 Lösungen . . . 70

7 Tangenten, Regeln für Ableitungen, Differenzierbarkeit **79**
7.1 Beispiele . . . 79
7.2 Lösungen . . . 81

8 Monotonie, Lokale Extrema, Krümmung, Wendepunkte **95**
8.1 Beispiele . . . 95
8.2 Lösungen . . . 97

9 Globale Extrema, l'Hôpital, Newtonverfahren, Implizites Ableiten **132**
9.1 Beispiele . . . 132
9.2 Lösungen . . . 134

10 Flächeninhalt, Stammfunktionen, Integrale und Integrationsregeln **142**
10.1 Beispiele . . . 142
10.2 Lösungen . . . 144

11 Flächeninhalt, Leibnitz, Numerik, Differentialgleichungen **150**
11.1 Beispiele . . . 150
11.2 Lösungen . . . 152

12 Flächen, Tangentialebene, Lokale Extrema, Sattelpunkte **159**
12.1 Beispiele 159
12.2 Lösungen 161

13 Eingeschränkte Extrema, Geometrische Projektion, Regression **166**
13.1 Beispiele 166
13.2 Lösungen 168

14 Rechnungen mit Matrizen und Vektoren **176**
14.1 Beispiele 176
14.2 Lösungen 179

15 Abschätzung von Funktionsparametern **189**
15.1 Beispiele 189
15.2 Lösungen 195

16 Anhang: Partielle Ableitungen von Funktionen mehrerer Variablen **209**

1 Vorausgesetztes Wissen

1.1 Beispiele

1. Rechnungen und Vereinfachungen mit Bruchausdrücken

   (a) Schreiben Sie zur Wiederholung äquivalenter Notationen für Multiplikation und Division die Terme

      i. $x^2/2$ (z.B. $= \frac{1}{2}x^2$ usw)
      ii. $(x^3 + y^3)/3$
      iii. $(x^4 + y^4)/(x + y)$
      iv. $(x - y)/(1/(x + y))$

   in verschiedenen Formen.

   (b) Erinnern Sie sich an die Reihenfolge von Rechenoperationen wie etwa Punktrechnung vor Strichrechnung. Beispielsweise vereinfachen Sie folgende Ausdrücke

      i. $5 \times 60 + 43$
      ii. $43 + 60/5$
      iii. $6 + 2^8/4$
      iv. $6 + 2\hat{}(8/4)$

   (c) Wiederholen Sie wie rationale Zahlen in Dezimalzahlen (und umgekehrt) umgeschrieben werden können, z.B.

      i. $20.6 = \ldots$
      ii. $1000 + 1/1000 = \ldots$

   Geben Sie auch weitere Beispiele an.

   (d) Schreiben Sie (Prim-)Faktorisierungen der Zahlen 24 und 30. Verwenden Sie diese Faktorisierungen, um 24/30 mit einem größten gemeinsamen Teiler (ggT) zu kürzen. Verwenden Sie diese Faktorisierungen, um $1/24 + 1/30$ zu kombinieren.

   (e) Obwohl der Ausdruck $5\frac{4}{5}$ im täglichen Leben oft als "fünf und vier fünftel" (d.h. $5+\frac{4}{5}$) verstanden wird, ist dies hier nicht der Fall! Zitieren Sie die Multiplikationregel, mit der $5\frac{4}{5} = 4$ zu verstehen ist.

   Vereinfachen Sie die Ausdrücke

   (f) $5 \text{ und } \frac{4}{5} + 3 \text{ und } \frac{1}{6} - 4 \text{ und } \frac{3}{8} + 2 \text{ und } \frac{7}{12} - 1 \text{ und } \frac{11}{24}$

   (g) $\left(7 \text{ und } \frac{3}{4} - 4 \text{ und } \frac{3}{8}\right)\frac{4}{9} + \dfrac{3 \text{ und } \frac{2}{3} + 2 \text{ und } \frac{7}{12}}{\frac{5}{6}}$

   (h) $\dfrac{\dfrac{\frac{11}{15} + \frac{9}{20}}{\frac{7}{12} - \frac{1}{15}} - \dfrac{9}{31}}{\dfrac{1}{8} + \dfrac{\frac{14}{15} + \frac{29}{60}}{\frac{7}{18} + \frac{11}{30}}}$

2. Rechnungen von Prozentsätzen

   (a) Man überlegt die Möglichkeit, selbständig zu arbeiten. Es wird abgeschätzt, dass das Bruttoeinkommen €4000 monatlich betragen sollte, aber nachdem €1500 monatlich für Lohnnebenkosten abgezogen wären, würden nur €2500 monatlich für das Nettoeinkommen übrig bleiben. Welcher Prozentsatz des Bruttoeinkommens wäre das Nettoeinkommen?

(b) Im Lauf einer chemischen Reaktion beginnt die Konzentration einer Chemikalie bei 1 Mol/Liter, und während sie sich immer erhöht, nähert sich die Konzentration an 11 Mol/Liter. Welche Konzentration entspricht 90% der Differenz zwischen der anfänglichen und der letztendlichen Konzentration?

(c) Die Heizung in einem Haus wird plötzlich ausgeschaltet, und die Innentemperatur sinkt allmählich von der anfänglichen bei 22° bis zur unbekannten Außentemperatur. Es wird aber später bestimmt, wenn die Innentemperatur 15° beträgt, entspricht die Temperatursenkung bis zu diesem Zeitpunkt 70% der Differenz zwischen der anfänglichen und der letztendlichen Temperatur. Was ist die Außentemperatur?

3. Rechnungen und Vereinfachungen mit Algebraischen Termen

Vereinfachen Sie den Ausdrücke:

(a) $15x - 4y + 4z - (2x - 3y - z - (-x + 4y - 3z)) - (5x - y - (2z - 3x) + x)$

(b) $5a^2 + b^2 - (3a^2 + 2ab - (2ab - b^2))$

(c) $(9r - 7s)(-2) + (3s + 4r)(-5)$

(d) $(3a^2bx^2)(-5a^2b^3x)$

(e) $(2x^3 - 5x^2y + 4xy^2 - 3y^2)(3x^2 + 2xy - y^2)$

(f) $(5x - 4y)^2 - (-5x + 4y)^2$

Erweitern Sie die Ausdrücke:

(g) $(a + b)^n$ und für $(a - c)^n$, d.h. schreiben Sie die Binomialformel für diese Ausdrücke für einige Potenzen n.

(h) $(2x + 3y)^3$

Vereinfachen Sie die Ausdrücke:

(i) $\dfrac{36x^4y^3z^2 - 42x^4y^5z^6 + 18x^5y^4z^3 - 48x^3y^6z^5}{6x^3y^3z^2}$

(j) $\dfrac{6a^4 - 9a^3 + 12a^2 - 15a}{3a}$

4. Herausheben und Dividieren

Heben Sie möglichst viele Faktoren heraus:

(a) $5k + 5m + 5$

(b) $36k^3 + 27k^2 - 18k$

Faktorisieren Sie den Ausdruck:

(c) $(a - b)c - a + b$

Berechnen Sie die Quotienten:

(d) $(10x^2 + 29xy - 21y^2) \div (5x - 3y)$

(e) $(3k^3 + 8k^2 - 5k - 6) \div (3k + 2)$

5. Algebraische Lösung von Gleichungen

Lösen Sie nach x in der Gleichung auf:

(a) $2x - 12 = 7x - (1 - 3x - (4 - 5x))$

(b) $3(2x-8)-2(4-3x)=20x$

(c) $x(x-4)+2x^2=3(x+2)(x-3)$

(d) $(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2=3(x+4)^2$

(e) $ax^2+bx+c=0$ für gegebene fixierte Zahlen a,b,c,
d.h. geben Sie die Lösungsformeln für die quadratische Gleichung an.

(f) $x^2-5x+6=0$

(g) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{17x}{36}-\dfrac{11}{4}=0$

(h) $(2x-3)^2+(2x-4)^2=4(x-1)^2$

(i) $\dfrac{3x+2}{x-9}-\dfrac{1-2x}{x+3}=\dfrac{19}{(x-9)(x+3)}, \quad x\neq -3,9$

6. Erweitern und Kürzen von Brüchen

(a) Lösen Sie nach u in der Gleichung auf,

$$\frac{5x-1}{2x-3}=\frac{u}{x(2x-3)^2}, \quad x\neq 0,\frac{3}{2}$$

(b) Geben Sie die Faktorisierung der Differenz von gleichen Potenzen a^n-b^n und a^n+c^n für einige Potenzen n an. Für $a\neq b$ vereinfachen Sie $(a^n-b^n)/(a-b)$ für einige Potenzen n.

(c) Lösen Sie nach v in der Gleichung auf,

$$\frac{x+y}{6a(x-y)}=\frac{v}{48a^3(x^2-y^2)}, \quad x\neq \pm y, \quad a\neq 0$$

Vereinfachen Sie die Ausdrücke:

(d) $\dfrac{18x^3y^2}{24x^2y}$

(e) $\dfrac{6a^2b+2ab^2}{18a^2-2b^2}$

(f) $\dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}$

7. Faktorisierung und Vereinfachung

Faktorisieren Sie die Ausdrücke:

(a) $6x^2y^3+18xy^4$

(b) $49x^2-36y^2$

Vereinfachen Sie die Ausdrücke:

(c) x^2-4x+4

(d) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(e) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

Schreiben Sie den Ausdruck als *ein* Bruch und vereinfachen Sie:

(f) $\dfrac{4a-9b}{2ab}-\dfrac{b+2a}{12a^2}-\dfrac{a-7b}{4b^2}$

(g) $\dfrac{2}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{3y}{y^2-x^2}+\dfrac{xy}{x^3+y^3}$

(h) $\dfrac{1}{a^2-a}+\dfrac{1}{a^2+a}$

(i) $\dfrac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x^2-1}{4x^2}}\dfrac{1+x}{1-x}$

8. Bruchgleichungen

   Lösen Sie nach x in der Gleichung auf:

   (a) $\dfrac{5}{x-6}=\dfrac{5}{2}, \quad x\neq 6$

   (b) $\dfrac{3}{2x-1}=\dfrac{2}{x+3}, \quad x\neq -3, \dfrac{1}{2}$

   (c) $\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{2(x+8)}{x^2-4}, \quad x\neq \pm 2$

9. Rechnen mit Potenzen

   Vereinfachen Sie die Ausdrücke:

   (a) $a^{x+2y}a^{3x+2z}$ und $\dfrac{a^{x+2y}}{a^{3x+2z}}$

   (b) $(x^a-y^b)(x^a+y^b)-(x^a-y^b)^2$

   (c) $\left(\dfrac{a^2-b^2}{x+y}\right)^n\left(\dfrac{x+y}{a+b}\right)^n$

   (d) $((a^{+2})^{-4})^{-3}-((a^{-8})^{-1})^{+3}$

   (e) $\dfrac{a^x b^y(b-1)}{a^{x-1}b^{y-1}(1-b)^2}$

10. Textaufgabe mit Gleichungen, Beträgen und Ungleichungen

    Jemand hat die Wahl zwischen zwei Stromtarifen: Entweder (1) monatlich €8 Grundgebühr und €0,10 pro kWh oder (2) kein Grundgebühr und €0,18 pro kWh.

    (a) Bei welchem monatlichen Stromverbrauch sind die Kosten bei beiden Tarifen gleich?

    (b) Bei welchem beträgt der Unterschied €10?

    (c) Bei welchem ist der erste, bei welchem der zweite Tarif günstiger?

11. Mengen und ihre Elemente und Teilmengen

    (a) Fassen Sie das Konzept einer Menge zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.

    (b) Fassen Sie das Konzept der Elemente einer Menge zusammen. Geben Sie Beispiele mit den Notationen $\in$ und $\notin$ an.

    (c) Fassen Sie das Konzept einer Teilmenge einer Menge zusammen. Geben Sie Beispiele mit den Notationen $\subset$ und $\not\subset$ an.

12. Mengen durch Bedingungen

    (a) Fassen Sie das Konzept einer Mengendefinition

    $$\{\text{Elemente in einer Menge} : \text{(wobei) Bedingung erfüllt wird}\}$$

    zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.

(b) Fassen Sie das Konzept einer Mengendefinition mit mehreren Bedingungen

$$\{\text{Elemente in einer Menge} : \text{(wobei) Bedingung 1 } \textit{und} \text{ 2 erfüllt werden}\}$$

oder

$$\{\text{Elemente in einer Menge} : \text{(wobei) Bedingung 1 } \textit{oder} \text{ 2 erfüllt werden}\}$$

zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.

(c) Fassen Sie das Konzept des Durchschnitts von zwei Mengen zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.

(d) Fassen Sie das Konzept der Vereinigung von zwei Mengen zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.

(e) Fassen Sie das Konzept der Differenz von zwei Mengen zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.

(f) Fassen Sie das Konzept des Komplenents einer Teilmenge einer Menge zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.

(g) Fassen Sie das Konzept der leeren Menge zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.

13. Zahlenmengen

(a) Fassen Sie die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zusammen. Geben Sie Beispiele an.

(b) Fassen Sie die natürlichen Zahlen plus Null $\mathbb{N}_0$ zusammen. Geben Sie Beispiele an.

(c) Fassen Sie die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zusammen. Geben Sie Beispiele an.

(d) Fassen Sie die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zusammen. Geben Sie Beispiele an.

(e) Fassen Sie die reelen Zahlen $\mathbb{R}$ zusammen. Geben Sie Beispiele an.

(f) Fassen Sie die irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$ zusammen. Geben Sie Beispiele an.

(g) Fassen Sie die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ zusammen. Geben Sie Beispiele an.

14. Ungleichungen und Intervalle

(a) Erklären Sie die Bedeutung der Symbole $=$, $\neq$, $<$, $\leq$, $>$ und $\geq$. Erklären Sie den Unterschied zwischen strengen und nicht strengen Ungleichungen.

(b) Geben Sie die Bedeutung des Symbols $\forall$ an, und erklären Sie die Änderungen einer Ungleichung $x \leq y$ wenn (a) eine Kontante auf beiden Seiten summiert wird, (b) eine positive Konstante auf beiden Seite multipliziert wird und (c) eine negative Konstante auf beiden Seite multipliziert wird.

(c) Erklären Sie die Bedeutung der Intervallnotationen $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$ und $[a, b)$.

15. Cartesische Produkte und Höhere Dimensionen

(a) Fassen Sie das Konzept eines Cartesischen Produkts $A \times B$ zwischen zwei Mengen A und B zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.

(b) Fassen Sie das Konzept eines Cartesischen Produkts $A \times B \times C$ zwischen drei Mengen A, B und C zusammen. Geben Sie Beispiele mit der Mengennotation an.

(c) Erklären Sie die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ und den reellen Raum $\mathbb{R}^3$ bezüglich Cartesischer Produkte.

16. Potenzrechnungen mit Reellen Zahlen

(a) Geben Sie die Dezimaldarstellung an:

$$10^n \text{ für } n = -1, 0, +3.$$

(b) Geben Sie die Dezimaldarstellung an:

$$3.14 \times 10^n \text{ für } n = -1, 0, +3.$$

(c) Schreiben Sie die Taschenrechnerdarstellung in die Dezimaldarstellung um:

`3.14e-01`, `2.718e+00` und `1.618e+03`.

Um das Konzept der Potenzrechnung zu erläutern, erklären Sie die händische Bestimmung der Dezimaldarstellung der folgenden Zahlen:

(d) $\sqrt{2}$, $2^{\frac{1}{2}}$ (e) $4^{\frac{1}{3}}$, $4^{\frac{2}{3}}$ (f) π^2 (g) 3^e (h) e^π

Hier ist $\pi = 3.14159\cdots$ das Verhältnis zwischen dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises und $e = 2.71828\cdots$ ist die Eulerische Zahl.

17. Algebraische Lösung von einem Gleichungssystem

Finden Sie Lösungen für x und y im Gleichungssystem:

(a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

18. Rechnungen mit Winkelfunktionen

(a) Ein Baum wirft einen Schatten 100m lang, und der Winkel zwischen dem Boden und der Linie von der Schattenspitze bis zur Baumspitze beträgt 30°.

- Bestimmen Sie die Höhe des Baums.
- Ein Seil wird zwischen der Schattenspitze und der Baumspitze aufgespannt. Bestimmen Sie die Länge des Seils.

(b) Ein 10m langer Fahnenmast wird aufgestellt, und zu einer gewissen Tageszeit wirft der Fahnenmast einen $10/\sqrt{3}$m langen Schatten. Der Winkel zwischen dem Boden und der Linie von der Schattenspitze bis zur Fahnenmastspitze kann verwendet werden, um die Uhrzeit zu bestimmen. Was ist der Winkel zu dieser Tageszeit? Wie lang ist die Linie von der Schattenspitze bis zur Fahnenmastspitze?

(c) Eine Seilrutsche wird konstruiert. Man steigt eine 50m hohe Leiter bis zu einem Podest hinauf. Damit nicht so steil gerutscht wird, soll der Winkel zwischen der Leiter und dem Seil 60° betragen. Wie lang ist das entsprechende Seil? Wie groß ist der Abstand am Boden zwischen der Leiter und dem Seil?

19. Bestimmung von Geraden

Die Ebene $\mathbb{R}^2$ wird mit senkrechten Koordinatenachsen markiert. Einheiten entlang der waagerechten Achse sind mit x bezeichnet, und Einheiten entlang der senkrechten Achse sind mit y bezeichnet. Waagerechts nach rechts bedeutet, x erhöht sich durch die reelen Zahlen $\mathbb{R}$. Senkrecht nach oben bedeutet, y erhöht sich durch die reelen Zahlen $\mathbb{R}$.

(a) Eine Gerade liegt in der Ebene, und die Punkte mit (x, y)-Koordinaten $(1, 2)$ und $(3, 4)$ liegen auf dieser Gerade. Schreiben Sie eine Gleichung der Form $y = sx + a$ für die Gerade. Skizzieren Sie diese Gerade in der Ebene.

(b) Eine Gerade liegt in der Ebene, und sie enthählt den Punkt mit (x, y)-Koordinaten $(-4, 1)$. Von diesem Punkt kommt man durch 2 Einheiten nach rechts und 1 Einheit nach unten zurück zu der Gerade. Schreiben Sie eine Gleichung der Form $y = sx + a$ für die Gerade. Skizzieren Sie diese Gerade in der Ebene.

(c) Eine gerade liegt in der Ebene, und sie kreuzt die x-Achse im Punkt mit $x = 1$. Der Winkel zwischen dieser Gerade und der x-Achse ist $45°$. Schreiben Sie eine Gleichung der Form $y = sx + a$ für die Gerade. Skizzieren Sie diese Gerade in der Ebene. Wiederholen Sie die Aufgabe für die Winkel $30°$, $60°$ und $90°$.

(d) Eine waagerechte Gerade in der Ebene läuft durch den Punkt mit (x, y)-Koordinaten $(1, 2)$. Schreiben Sie eine Gleichung der Form $y = sx + a$ für die Gerade. Skizzieren Sie diese Gerade in der Ebene.

(e) Eine senkrechte Gerade in der Ebene läuft durch den Punkt mit (x, y)-Koordinaten $(2, 1)$. Schreiben Sie eine Gleichung der Form $x = sy + a$ für die Gerade. Skizzieren Sie diese Gerade in der Ebene.

1.2 Lösungen

1. Rechnungen und Vereinfachungen mit Bruchausdrücken

   (a) Äquivalente Notationen für Multiplikation und Division sind:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \cdot x^2 = x^2/2 = x^2 \div 2 = \frac{1}{2} \times x^2$$

$$\frac{x^3+y^3}{3} = \frac{1}{3}(x^3+y^3) = \frac{1}{3} \cdot (x^3+y^3) = (x^3+y^3)/3 = (x^3+y^3) \div 3 = \frac{1}{3} \times (x^3+y^3)$$

$$\frac{x^4+y^4}{x+y} = (x^4+y^4) \div (x+y)$$

$$(x-y) \div \frac{1}{x+y} = \frac{x-y}{1/(x+y)} = (x-y) \times (x+y) = x(x+y) - y(x+y) = x^2 + xy - yx - y^2 = x^2 - y^2$$

   (b) Multiplikation und Division sollen immer vor Addition oder Subtraktion durchgeführt werden, außer ein Ausdruck steht zwischen Klammern:

$$5 \times 60 + 43 \overset{5\times 60}{\underset{\text{zuerst}}{=}} 300 + 43 = 343 \quad \text{und} \quad 5 \times 60 + 43 \overset{60+43}{\underset{\text{zuerst}}{\neq}} 5 \times 103$$

$$\text{aber } 5 \times (60+43) \overset{60+43}{\underset{\text{zuerst}}{=}} 5 \times 103 = 515$$

$$43 + 60/5 \overset{60\div 5}{\underset{\text{zuerst}}{=}} 43 + 12 = 55 \quad \text{und} \quad 43 + 60/5 \overset{43+60}{\underset{\text{zuerst}}{\neq}} 103 \div 5$$

$$\text{aber } (43+60)/5 \overset{60+43}{\underset{\text{zuerst}}{=}} 103 \div 5 = \frac{103}{5} = 20.6$$

   Weiters hat Potenzierung noch höhere Priorität als Multiplikation oder Division, die höhere Priorität als Addition oder Subtraktion haben, z.B.

$$6 + 2\hat{}8/4 = 6 + 2^8/4 = 6 + \frac{2^8}{4} = 6 + \frac{256}{4} = 6 + 64 = 70$$

   aber

$$4194304 = 8^8/4 = (6+2)\hat{}8/4 \quad \neq \quad 6 + 2\hat{}8/4 \quad \neq \quad 6+2\hat{}(8/4) = 6+2^2 = 6+4 = 10$$

   (c) Wie auf einem üblichen Taschenrechner (oder bei den bekannten Rechnensystemen) wird "." (nicht ",") als Dezimalpunkt verstanden, z.B.

$$20.6 = 20 + \frac{6}{10} \quad \text{und} \quad 1000.001 = 1000 + \frac{1}{1000}$$

   (d) Die Zahlen 24 und 30 haben die (Prim-)Faktorisierungen

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad \text{und} \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

   d.h. die (Prim-)Teiler von 24 sind $\{2, 3\}$ und die (Prim-)Teiler von 30 sind $\{2, 3, 5\}$. Daher ist der größte gemeinsame Teiler (ggT) für 24 und 30 gegeben durch $2 \times 3 = 6$. Der Bruch 24/30 lässt sich dann so kürzen,

$$\frac{24}{30} = \frac{6 \cdot 4}{6 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

   und die Brüche lassen sich mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner (kgN) $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ so kombinieren,

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{30} = \frac{1}{6 \cdot 4} + \frac{1}{6 \cdot 5} = \frac{1}{6 \cdot 4} \cdot \frac{5}{5} + \frac{1}{6 \cdot 5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{5+4}{4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{9}{120} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 40} = \frac{3}{40}$$

(e) Obwohl der Ausdruck $5\frac{4}{5}$ im täglichen Leben oft als "fünf und vier fünftel" (d.h. $5+\frac{4}{5}$) verstanden wird, ist dies hier nicht der Fall! Laut der obigen Regel gilt hier

$$5\frac{4}{5} = 5 \cdot \frac{4}{5} = 5 \times \frac{4}{5} = \frac{5}{1} \times \frac{4}{5} = 4$$

(f) Die Bruchausdrücke werden so vereinfacht,

$$\begin{aligned}
&5 \text{ und } \frac{4}{5} + 3 \text{ und } \frac{1}{6} - 4 \text{ und } \frac{3}{8} + 2 \text{ und } \frac{7}{12} - 1 \text{ und } \frac{11}{24} \\
&= \left(5+\frac{4}{5}\right) + \left(3+\frac{1}{6}\right) - \left(4+\frac{3}{8}\right) + \left(2+\frac{7}{12}\right) - \left(1+\frac{11}{24}\right) \\
&= (5+3-4+2-1) + \left(\frac{4}{5}+\frac{1}{6}-\frac{3}{8}+\frac{7}{12}-\frac{11}{24}\right) \\
&= 5 + \left(\frac{96}{120}+\frac{20}{120}-\frac{45}{120}+\frac{70}{120}-\frac{55}{120}\right) = 5+\frac{86}{120} = 5+\frac{43}{60} \\
&= \frac{(5\times 60)+43}{60} = \frac{343}{60}
\end{aligned}$$

(g) Laut der obigen Regeln bedeuten die Ausdrücke $(\cdots)\frac{4}{9}$ und $(\cdots)/\frac{5}{6}$ hier $(\cdots)\times\frac{4}{9}$ bzw. $(\cdots)\times\frac{6}{5}$ und daher

$$\begin{aligned}
&\left(7 \text{ und } \frac{3}{4} - 4 \text{ und } \frac{3}{8}\right)\frac{4}{9} + \frac{3 \text{ und } \frac{2}{3} + 2 \text{ und } \frac{7}{12}}{\frac{5}{6}} \\
&= \left(7+\frac{3}{4}-4-\frac{3}{8}\right)\times\frac{4}{9} + \left(3+\frac{2}{3}+2+\frac{7}{12}\right)\times\frac{6}{5} \\
&= \left(7-4+\frac{6-3}{8}\right)\cdot\frac{4}{9} + \left(3+2+\frac{8+7}{12}\right)\cdot\frac{6}{5} = \left(3+\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{4}{9} + \left(5+\frac{15}{12}\right)\frac{6}{5} \\
&= \frac{3\cdot 8+3}{8}\cdot\frac{4}{9} + \frac{5\cdot 12+15}{12}\cdot\frac{6}{5} = \frac{24+3}{8}\cdot\frac{4}{9} + \frac{60+15}{12}\cdot\frac{6}{5} \\
&= \frac{27}{8}\cdot\frac{4}{9} + \frac{75}{12}\cdot\frac{6}{5} = \frac{27\cdot 4}{8\cdot 9} + \frac{75\cdot 6}{12\cdot 5} = \frac{108}{72} + \frac{450}{60} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{15}{2} = \frac{3+15}{2} = \frac{18}{2} = 9
\end{aligned}$$

wobei die Notationen "$\times$" und "$\cdot$" nach den obigen Regeln abwechselnd verwendet worden sind.

(h) Für die folgende Vereinfachung faktorisiert man die jeweiligen Nenner, um einen kleinsten gemeinsamen Nenner (kgN) zu finden, und dann führt man Rechnungen durch, die analog zu den obigen sind.

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{11}{15}+\frac{9}{20}}{\frac{7}{12}-\frac{1}{15}} - \frac{9}{31} \over \frac{1}{8} + \frac{\frac{14}{15}+\frac{29}{60}}{\frac{7}{18}+\frac{11}{30}} = \frac{\frac{11\times 4}{(3\times 5)\times 4}+\frac{9\times 3}{(4\times 5)\times 3}}{\frac{7\times 5}{(3\times 4)\times 5}-\frac{1\times 4}{(3\times 5)\times 4}} - \frac{9}{31} \over \frac{1}{8} + \frac{\frac{14\times 4}{15\times 4}+\frac{29}{4\times 15}}{\frac{7\times 5}{(6\times 3)\times 5}+\frac{11\times 3}{(6\times 5)\times 3}} = \frac{\frac{44+27}{3\times 4\times 5}}{\frac{35-4}{3\times 4\times 5}} - \frac{9}{31} \over \frac{1}{8} + \frac{\frac{56+29}{4\times 15}}{\frac{35+33}{3\times 5\times 6}} = \frac{\frac{71}{60}}{\frac{31}{60}} - \frac{9}{31} \over \frac{1}{8} + \frac{\frac{85}{60}}{\frac{68}{90}} = \frac{\frac{71}{60}\times\frac{60}{31}-\frac{9}{31}}{\frac{1}{8}+\frac{85}{60}\times\frac{90}{68}} \\
&= \frac{\frac{71}{31}-\frac{9}{31}}{\frac{1}{8}+\frac{85\times(3\times 30)}{(2\times 30)\times 68}} = \frac{\frac{62}{31}}{\frac{1}{8}+\frac{85\times 3}{2\times 68}} = \frac{2}{\frac{1}{8}+\frac{(5\times 17)\times 3}{2\times(4\times 17)}} = \frac{2}{\frac{1}{8}+\frac{15}{8}} = \frac{2}{\frac{16}{8}} = \frac{2}{2} = 1
\end{aligned}$$

2. Rechnungen von Prozentsätzen

   (a) Das Nettoeinkommen $N = €2500$ monatlich ist $X\%$ des Bruttoeinkommens $B = €4000$ monatlich, wobei

$$X = 100 \times \frac{N}{B} = 100 \cdot \frac{2500}{4000} = 62.5$$

   (b) Die Differenz zwischen der letztendlichen Konzentration $K_2 = 11$ Mol/Liter und der anfänglichen Konzentration $K_1 = 1$ Mol/Liter ist $W = 11 - 1 = 10$, und

$$90\% \text{ von } W \text{ ist } \frac{90}{100}W = 0.9W = 0.9 \times 10 = 9$$

   Die Konzentration $K_1{+}9 = 10$ Mol/Liter entspricht daher 90% der Differenz zwischen der anfänglichen und der letztendlichen Temperatur.

   (c) Am Anfang wird die Innentemperatur bei $T_1 = 22°$ gemessen, und zu einem späteren Zeitpunkt wird die Innentemperatur bei $T_2 = 15°$ gemessen. Sei T_3 die zu bestimmende Außentemperatur. Die Differenz zwischen der anfänglichen und der letztendlichen Innentemperatur ist $T_1 - T_3$, und 70% davon ist

$$\frac{70}{100}(T_1 - T_3) = 0.7(T_1 - T_3)$$

   Die später gemessene Temperatur T_2 erfüllt daher

$$15 = T_2 = T_1 - 0.7(T_1 - T_3) = 22 - 0.7(22 - T_3)$$

   und die Außentemperatur T_3 ist gegeben durch

$$15 = 22 - 0.7(22 - T_3) \quad \text{oder} \quad T_3 = 12$$

3. Rechnungen und Vereinfachungen mit Algebraischen Termen

   (a) Mit den obigen Regeln für Multiplikation und mit dem Distributivgesetz

$$a(b + c) = a \cdot (b + c) = a \times (b + c) = a \times b + a \times c = a \cdot b + a \cdot c = ab + ac$$

   folgt

$$\begin{aligned}
&15x - 4y + 4z - (2x - 3y - z - (-x + 4y - 3z)) - (5x - y - (2z - 3x) + x) \\
&= 15x - 4y + 4z - 2x + 3y + z + (-x + 4y - 3z) - 5x + y + (2z - 3x) - x \\
&= 15x - 4y + 4z - 2x + 3y + z - x + 4y - 3z - 5x + y + 2z - 3x - x \\
&= x(15 - 2 - 1 - 5 - 3 - 1) + y(-4 + 3 + 4 + 1) + z(4 + 1 - 3 + 2) \\
&= 3x + 4y + 4z
\end{aligned}$$

   wobei in den letzten Schritten ähnliche Terme kombiniert worden sind.

   (b) Analog gilt

$$\begin{aligned}
&5a^2 + b^2 - (3a^2 + 2ab - (2ab - b^2)) \\
&= 5a^2 + b^2 - 3a^2 - 2ab + (2ab - b^2) \\
&= 5a^2 + b^2 - 3a^2 - 2ab + 2ab - b^2 \\
&= a^2(5 - 3) + b^2(1 - 1) + ab(-2 + 2) = 2a^2
\end{aligned}$$

(c) Analog gilt

$$\begin{aligned}
&(9r-7s)(-2)+(3s+4r)(-5)\\
&=9r\times(-2)-7s\times(-2)+3s\times(-5)+4r\times(-5)\\
&=-18r+14s-15s-20r\\
&=r(-18-20)+s(14-15)\\
&=-38r-s
\end{aligned}$$

(d) Mit dem Assoziativgesetz

$$a(bc)=a\cdot(b\cdot c)=a\times(b\times c)=a\times b\times c=(a\times b)\times c=(a\cdot b)\cdot c=(ab)c$$

dem Kommuntativgesetz

$$ab=a\cdot b=a\times b=b\times a=b\cdot a=ba$$

und der Potenzregel

$$a^pa^q=a^p\times a^q=a^{p+q}$$

folgt

$$\begin{aligned}
(3a^2bx^2)(-5a^2b^3x)&=3a^2bx^2(-5)a^2b^3x=(3(-5))(a^2a^2)(b^1b^3)(x^2x^1)\\
&=-15a^{2+2}b^{1+3}x^{2+1}=-15a^4b^4x^3=-15(ab)^4x^3
\end{aligned}$$

(e) Analog gilt

$$\begin{aligned}
&(2x^3-5x^2y+4xy^2-3y^2)(3x^2+2xy-y^2)\\
&=2x^3(3x^2+2xy-y^2)-5x^2y(3x^2+2xy-y^2)+4xy^2(3x^2+2xy-y^2)-3y^2(3x^2+2xy-y^2)\\
&=6x^5+4x^4y-2x^3y^2-15x^4y-10x^3y^2+5x^2y^3+12x^3y^2+8x^2y^3-4xy^4-9x^2y^2-6xy^3+3y^4\\
&=6x^5+x^4y(4-15)+x^3y^2(-2-10+12)-9x^2y^2+x^2y^3(5+8)-6xy^3-4xy^4+3y^4\\
&=6x^5-11x^4y-9x^2y^2+13x^2y^3-6xy^3-4xy^4+3y^4
\end{aligned}$$

(f) Man kann das folgende Beispiel analog durch Ausmultiplizieren vereinfachen, aber mit der Potenzregel

$$(ab)^p=a^pb^p \quad \text{und insbesondere} \quad (-a)^2=((-1)\times a)^2=(-1)^2a^2=a^2$$

folgt

$$(5x-4y)^2-(-5x+4y)^2=(5x-4y)^2-(5x-4y)^2=0$$

(g) Die Binomialformel sieht für einige Potenzen so aus:

$$\begin{array}{lcll}
(a+b)^1 & = & 1a+1b & \\
(a+b)^2 & = & 1a^2+2ab+1b^2 & 2=1+1, \text{ obige Koeffizienten}\\
(a+b)^3 & = & 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3 & 3=1+2, 3=2+1, , \text{ obige Koeffizienten}\\
(a+b)^4 & = & 1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4 & 4=1+3=3+1, 6=3+3, \text{ obige Koeffizienten}\\
\vdots & & \vdots &
\end{array}$$

wobei die Koeffizienten für eine Potenz gegeben sind durch Summen der ober stehenden Koeffizienten für die letzte Potenz. Insbesondere für die Potenz n auf der linken Seite seien die Terme in der Summe auf der rechten Seite mit der Potenz k von b markiert, d.h.

$$(a+b)^n=Q_0a^nb^0+\cdots+Q_ka^{n-k}b^k+\cdots+Q_na^0b^n$$

und der Koeffizient Q_k ist gegeben durch den sogenannten Binomialkoeffizienten

$$Q_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{wobei} \quad n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1, \quad 0! = 1$$

Die Beziehung zwischen Koeffizienten für eine Potenz n lässt sich mit Potenzen für $n-1$ durch eine direkte Rechnung so darstellen,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Analog mit $b = -c$,

$$\begin{array}{rcc} (a-c)^1 & = & 1a - 1c \\ (a-c)^2 & = & 1a^2 - 2ac + 1c^2 \\ (a-c)^3 & = & 1a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - 1c^3 \\ (a-c)^4 & = & 1a^4 - 4a^3c + 6a^2c^2 - 4ac^3 + 1c^4 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

(h) Mit $n = 3$, $a = 2x$ und $b = 3y$ folgt mit der Binomialformel,

$$\begin{aligned} (2x+3y)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3 \\ &= 2^3 \cdot x^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot x^2y + 3 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot xy^2 + 3^3 \cdot y^3 \\ &= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 \end{aligned}$$

(i) Mit der Potenzregel $a^{p+q} = a^p a^q$ und dem Distributivgesetz $ab + ac = a(b+c)$ kann das folgende Beispiel durch Faktorisierung vereinfacht werden

$$\begin{aligned} &\frac{36x^4y^3z^2 - 42x^4y^5z^6 + 18x^5y^4z^3 - 48x^3y^6z^5}{6x^3y^3z^2} \\ &= \frac{6 \cdot 6x^{1+3}y^3z^2 - 6 \cdot 7x^{1+3}y^{2+3}z^{4+2} + 6 \cdot 3x^{2+3}y^{1+3}z^{1+2} - 6 \cdot 8x^3y^{3+3}z^{3+2}}{6x^3y^3z^2} \\ &= \frac{6x^3y^3z^2(6x^1 - 7x^1y^2z^4 + 3x^2y^1z^1 - 8y^3z^3)}{6x^3y^3z^2} \\ &= \frac{6x^3y^3z^2}{6x^3y^3z^2} \times \frac{6x - 7xy^2z^4 + 3x^2yz - 8y^3z^3}{1} = 6x - 7xy^2z^4 + 3x^2yz - 8y^3z^3 \end{aligned}$$

(j) Analog gilt

$$\begin{aligned} &\frac{6a^4 - 9a^3 + 12a^2 - 15a}{3a} = \frac{3 \times 2 \cdot a^{1+3} - 3 \times 3 \cdot a^{1+2} + 3 \times 4 \cdot a^{1+1} - 3 \times 5 \cdot a}{3a} \\ &= \frac{3a(2a^3 - 3a^2 + 4a^1 - 5)}{3a} = \frac{3a}{3a} \times \frac{2a^3 - 3a^2 + 4a - 5}{1} = 2a^3 - 3a^2 + 4a - 5 \end{aligned}$$

4. Herausheben und Dividieren

(a) Mit dem Distributivgesetz $ab + ac = a(b+c)$

$$5k + 5m + 5 = 5(k + m + 1)$$

(b) Auch mit der Potenzregel $a^{p+q} = a^p a^q$

$$36k^3 + 27k^2 - 18k = 9 \cdot 4 \cdot k^{1+2} + 9 \cdot 3 \cdot k^{1+1} - 9 \cdot 2 \cdot k = 9k \cdot (4k^2 + 3k - 2)$$

(c) Mit dem Distributivgesetz $xy + xz = x(y + z)$ folgt mit $-(a - b) = -a + b$

$$(a - b)c - a + b = (a - b)c - (a - b) = (a - b)(c - 1)$$

(d) Der Quotient

$$(10x^2 + 29xy - 21y^2) \div (5x - 3y) \quad \text{oder} \quad \frac{10x^2 + 29xy - 21y^2}{5x - 3y}$$

lässt sich durch Polynomdivision vereinfachen,

$$\begin{array}{rrrrcrcr}
 & (10x^2 & +29xy & -21y^2) & \div & (5x - 3y) & = & (2x + 7y) \\
\ominus & 10x^2 & -6xy & & & & \leftarrow & (5x - 3y)2x \\
\hline
 & 0 & 35xy & -21y^2 & & & & \\
\ominus & & 35xy & -21y^2 & & & \leftarrow & (5x - 3y)7y \\
\hline
 & & 0 & 0 & & & &
\end{array}$$

oder

$$\frac{10x^2 + 29xy - 21y^2}{5x - 3y} = 2x + 7y$$

(e) Analog lässt sich der Quotient

$$(3k^3 + 8k^2 - 5k - 6) \div (3k + 2) \quad \text{oder} \quad \frac{3k^3 + 8k^2 - 5k - 6}{3k + 2}$$

durch Polynomdivision vereinfachen,

$$\begin{array}{rrrrrcrcr}
 & (3k^3 & +8k^2 & -5k & -6) & \div & (3k + 2) & = & (k^2 + 2k - 3) \\
\ominus & 3k^3 & +2k^2 & & & & & \leftarrow & (3k + 2)k^2 \\
\hline
 & 0 & 6k^2 & -5k & -6 & & & & \\
\ominus & & 6k^2 & +4k & & & & \leftarrow & (3k + 2)2k \\
\hline
 & & 0 & -9k & -6 & & & & \\
\ominus & & & -9k & -6 & & & \leftarrow & (3k + 2)(-3) \\
\hline
 & & & 0 & 0 & & & &
\end{array}$$

oder

$$\frac{3k^3 + 8k^2 - 5k - 6}{3k + 2} = k^2 + 2k - 3$$

5. Algebraische Lösung von Gleichungen

(a) Mit dem Distributivgesetz $xy + xz = x(y + z)$ wird die rechte Seite so vereinfacht,

$$2x - 12 = 7x - (1 - 3x - (4 - 5x))$$

$$= 7x - 1 + 3x + (4 - 5x) = 7x - 1 + 3x + 4 - 5x$$

Dann subtrahiert man $2x - 12$ von beiden Seiten der letzten Gleichung,

$$0 = (2x - 12) - (2x - 12) = (7x - 1 + 3x + 4 - 5x) - (2x - 12)$$

und gruppiert die ähnlichen Terme der rechten Seite dieser Gleichung zusammen,

$$0 = x(-2 + 7 + 3 - 5) + (12 - 1 + 4) = 3x + 15$$

Um nach x aufzulösen, führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{r|l}
0 = 3x + 15 & -15 \\
-15 = 3x & \div 3 \\
-5 = -15/3 = x &
\end{array}$$

und die Lösung ist $x = -5$.

(b) Analog wird hier die linke Seite

$$3(2x-8)-2(4-3x)=20x$$

so vereinfacht

$$6x-24-8+6x=3\cdot 2\cdot x-3\cdot 8-2\cdot 4-2\cdot(-3)x=3(2x-8)-2(4-3x)=20x$$

Dann subtrahiert man $20x$ von beiden Seiten dieser Gleichung und gruppiert die ähnlichen Terme zusammen,

$$-8x-32=x(6+6-20)+(-24-8)=6x-24-8+6x-20x=20x-20x=0$$

Um nach x aufzulösen, führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{rl|l} -8x-32=0 & & +32 \\ -8x=32 & & \div(-8) \\ x=-32/8=-4 & & \end{array}$$

und die Lösung ist $x=-4$.

(c) Um diese Gleichung zu vereinfachen

$$x(x-4)+2x^2=3(x+2)(x-3)$$

werden beide Seiten zuerst ausmultipliziert, und ähnliche Terme werden kombiniert,

$$x(x-4)+2x^2=x^2-4x+2x^2=3x^2-4x$$

$$3(x+2)(x-3)=3(x(x-3)+2(x-3))=3(x^2-3x+2x-6)=3(x^2-x-6)=3x^2-3x-18$$

Um nach x in der sich ergebenen Gleichung aufzulösen,

$$3x^2-4x=3x^2-3x-18$$

führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{rl|l} 3x^2-4x=3x^2-3x-18 & & -3x^2+4x \\ 0=(3x^2-4x)-(3x^2-4x)=(3x^2-3x-18)-(3x^2-4x)=x-18 & & +18 \\ 18=x & & \end{array}$$

und die Lösung ist $x=18$.

(d) Um diese Gleichung zu vereinfachen

$$(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2=3(x+4)^2$$

werden beide Seite zuerst ausmultipliziert, und ähnliche Terme werden kombiniert,

$$\begin{array}{rl} (x+1)^2= & x^2+2x+1 \\ (x+2)^2= & x^2+4x+4 \\ (x+3)^2= & x^2+6x+9 \\ \hline \oplus= & 3x^2+12x+14 \end{array}$$

$$3(x+4)^2=3(x^2+8+16)=3x^2+24x+48$$

Um nach x in der sich ergebenen Gleichung aufzulösen,

$$3x^2+12x+14=3x^2+24x+48$$

führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{rl|l} 3x^2+12x+14=3x^2+24x+48 & & -(3x^2+12x+14) \\ 0=(3x^2+12x+14)-(3x^2+12x+14)=(3x^2+24x+48)-(3x^2+12x+14)=12x+34 & & -34 \\ -34=12x & & \div 12 \\ -17/6=-34/12=x & & \end{array}$$

und die Lösung ist $x=-17/6$.

(e) Für gegebene Zahlen a, b, c hat die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

die Lösungen

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es gibt auch Lösungsformeln für kubische ($ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$) und biquadratische ($ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$) Gleichungen, die man nachschlagen kann, aber es existieren keine Lösungsformeln für Gleichungen höherer Ordnung!

(f) Anhand der obigen Lösungsformeln sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

gegeben durch

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = 3$$

Man kann die linke Seite der quadratischen Gleichung auch so faktorisieren,

$$(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6 = 0$$

und dann muss entweder $(x - 2) = 0$ oder $(x - 3) = 0$ gelten, d.h. die Lösungen sind $x = 2$ oder $x = 3$, wie schon mit den Lösungsformeln vorher berechnet.

(g) Anhand der obigen Lösungsformeln sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2/3 - 17x/36 - 11/4 = \frac{x^2}{3} - \frac{17x}{36} - \frac{11}{4} = 0$$

gegeben durch

$$x_1 = \frac{\frac{17}{36} - \sqrt{(\frac{17}{36})^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\frac{11}{4})}}{2 \cdot \frac{1}{3}} = -\frac{9}{4} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{\frac{17}{36} + \sqrt{\frac{17^2}{36^2} - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\frac{11}{4})}}{2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{11}{3}$$

(h) Um nach x in der Gleichung aufzulösen,

$$(2x - 3)^2 + (2x - 4)^2 = 4(x - 1)^2$$

summiert man die folgenden Erweiterungen der linken Seite

$$\begin{array}{rcl} (2x-3)^2 & = & 4x^2 - 12x + 9 \\ (2x-4)^2 & = & 4x^2 - 16x + 16 \\ \hline \oplus & = & 8x^2 - 28x + 25 \end{array}$$

und subtrahiert von diesem Ergebnis die Erweiterung der rechten Seite

$$\begin{array}{rcl} (2x-3)^2 + (2x-4)^2 & = & 8x^2 - 28x + 25 \\ 4(x-1)^2 & = & 4x^2 - 8x + 4 \\ \hline \ominus & = & 4x^2 - 20x + 21 \end{array}$$

Anhand der obigen Lösungsformeln sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(2x - 3)^2 + (2x - 4)^2 - 4(x - 1)^2 = 4x^2 - 20x + 21 = 0$$

gegeben durch

$$x_1 = \frac{20 - \sqrt{20^2 - 4 \cdot 4 \cdot 21}}{2 \cdot 4} = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{20 + \sqrt{20^2 - 4 \cdot 4 \cdot 21}}{2 \cdot 4} = \frac{7}{2}$$

(i) Um nach x in der Gleichung aufzulösen,

$$\frac{3x+2}{x-9} - \frac{1-2x}{x+3} = \frac{19}{(x-9)(x+3)}, \quad x \neq -3, 9$$

multipliziert man zuerst beide Seiten mit $(x-9)(x+3)$ und bekommt

$$(3x+2)(x+3) - (1-2x)(x-9) = (3x+2)\frac{x-9}{x-9}(x+3) - (1-2x)\frac{x+3}{x+3}(x-9) = 19\frac{(x-9)(x+3)}{(x-9)(x+3)} = 19$$

Für die linke Seite subtrahiert man die Erweiterungen,

$$\begin{array}{rcl} (3x+2)(x+3) = 3x(x+3) + 2(x+3) = 3x^2 + 9x + 2x + 6 & = & 3x^2 + 11x + 6 \\ (1-2x)(x-9) = 1(x-9) - 2x(x-9) = x - 9 - 2x^2 + 18x & = & -2x^2 + 19x - 9 \\ \hline \ominus & = & 5x^2 - 8x + 15 \end{array}$$

Anhand der obigen Lösungsformeln sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(3x+2)(x+3) - (1-2x)(x-9) - 19 = \quad 5x^2 - 8x + 15 - 19 = 5x^2 - 8x - 4 = 0$$

gegeben durch

$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{8^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 5} = -\frac{2}{5} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{8 + \sqrt{8^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 5} = 2$$

6. Erweitern und Kürzen von Brüchen

(a) Um nach u in der Gleichung aufzulösen,

$$\frac{5x-1}{2x-3} = \frac{u}{x(2x-3)^2}, \quad x \neq 0, \frac{3}{2}$$

multipliziert man auf beiden Seiten mit $x(2x-3)^2$,

$$x(5x-1)(2x-3) = x(5x-1)\frac{(2x-3)^2}{(2x-3)} = \frac{5x-1}{2x-3}x(2x-3)^2 = \frac{u}{x(2x-3)^2}x(2x-3)^2 = u\frac{x}{x}\frac{(2x-3)^2}{(2x-3)^2} = u$$

oder $u = x(5x-1)(2x-3) = 10x^3 - 17x^2 + 3x$.

(b) Die Faktorisierung der Differenz von gleichen Potenzen ist für einige Potenzen,

$$\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 = & & (a-b)(a+b) \\ a^3 - b^3 = & & (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^4 - b^4 = & & (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \\ a^5 - b^5 = & & (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

und daher für $a \neq b$,

$$\begin{array}{rcl} \frac{a^2 - b^2}{a-b} = & & (a+b) \\ \frac{a^3 - b^3}{a-b} = & & (a^2 + ab + b^2) \\ \frac{a^4 - b^4}{a-b} = & & (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \\ \frac{a^5 - b^5}{a-b} = & & (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

oder mit $b = -c$,

$$\begin{aligned} a^2 - c^2 &= (a+c)(a-c) \\ a^3 + c^3 &= (a+c)(a^2 - ac + c^2) \\ a^4 - c^4 &= (a+c)(a^3 - a^2c + ac^2 - c^3) \\ a^5 + c^5 &= (a+c)(a^4 - a^3c + a^2c^2 - ac^3 + c^4) \\ &\vdots \end{aligned}$$

(c) Um nach v in der Gleichung aufzulösen,

$$\frac{x+y}{6a(x-y)} = \frac{v}{48a^3(x^2-y^2)}, \quad x \neq \pm y, \quad a \neq 0$$

multipliziert man auf beiden Seiten mit $48a^3(x^2 - y^2)$ und verwendet die (obige) Faktorisierung, $(x^2 - y^2) = (x-y)(x+y)$,

$$8a^2(x+y)^2 = \frac{48a^3}{6a}\frac{(x+y)((x-y)(x+y))}{(x-y)} = \frac{x+y}{6a(x-y)}48a^3\underbrace{(x^2-y^2)}_{(x-y)(x+y)} = \frac{v}{48a^3(x^2-y^2)}48a^3(x^2-y^2) = v$$

oder $v = 8a^2(x+y)^2 = 8a^2(x^2 + 2xy + y^2) = 8a^2x^2 + 16a^2xy + 8a^2y^2$.

(d) Mit den Potenzregeln

$$\frac{1}{a^p} = a^{-p} \quad \text{und} \quad a^p a^q = a^{p+q}$$

lässt sich der Quotient so vereinfachen,

$$\frac{18x^3y^2}{24x^2y} = \frac{18}{24}x^3x^{-2}y^2y^{-1} = \frac{3}{4}x^{3-2}y^{2-1} = \frac{3}{4}xy$$

(e) Mit der (obigen) Faktorisierung, $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$, $A = 3a$, $B = b$,

$$\frac{6a^2b + 2ab^2}{18a^2 - 2b^2} = \frac{2ab}{2}\frac{(3a+b)}{(9a^2-b^2)} = ab\frac{(3a+b)}{(3a+b)(3a-b)} = \frac{ab}{3a-b}$$

(f) Mit der Faktorisierung $(x^2 - 9) = (x-3)(x+3)$ und der Binomialformel $(x-3)^2 = x^2 + 2x(-3) + (-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ folgt

$$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3}$$

7. Faktorisierung und Vereinfachung

(a) Hier ist $6xy^3$ ein Faktor der beiden Terme, und daher kann er herausgehoben werden,

$$6x^2y^3 + 18xy^4 = 6 \cdot x^{1+1}y^3 + 6 \cdot 3 \cdot xy^{3+1} = 6 \cdot x \cdot x \cdot y^3 + 6 \cdot 3 \cdot x \cdot y^3 \cdot y = 6xy^3(x+3y)$$

(b) Mit der (obigen) Faktorisierung, $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, $A = 7x$, $B = 6y$,

$$49x^2 - 36y^2 = (7x-6y)(7x+6y)$$

(c) Mit der Binomialformel $(x-2)^2 = x^2 + 2x(-2) + (-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ und

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

(d) Mit der (obigen) Faktorisierung

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a^3 - b^3)$$

(e) Mit der (obigen) Faktorisierung

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x^3+y^3)$$

(f) Mit dem kleinsten gemeinsamen Nennen (kgN) $12a^2b^2$ schreibt man die Kette von Brüchen als *ein* Bruch,

$$\frac{4a-9b}{2ab}-\frac{b+2a}{12a^2}-\frac{a-7b}{4b^2}=\frac{4a-9b}{2ab}\frac{6ab}{6ab}-\frac{b+2a}{12a^2}\frac{b^2}{b^2}-\frac{a-7b}{4b^2}\frac{3a^2}{3a^2}$$

$$=\frac{24a^2b-54ab^2}{12a^2b^2}-\frac{b^3+2ab^2}{12a^2b^2}-\frac{3a^3-21a^2b}{12a^2b^2}=\frac{-3a^3+a^2b(24+21)+ab^2(-54-2)-b^3}{12a^2b^2}$$

$$=\frac{-3a^3+45a^2b-56ab^2-b^3}{12a^2b^2}$$

(g) Analog mit $(x^2-y^2)=(x-y)(x+y)$ und $(x^3+y^3)=(x+y)(x^2-xy+y^2)$,

$$\frac{2}{x+y}-\frac{1}{x-y}-\frac{3y}{y^2-x^2}+\frac{xy}{x^3+y^3}=\frac{2}{x+y}-\frac{1}{x-y}+\frac{3y}{x^2-y^2}+\frac{xy}{x^3+y^3}$$

$$=\frac{2}{(x+y)}\frac{x-y}{(x-y)}-\frac{1}{(x-y)}\frac{x+y}{(x+y)}+\frac{3y}{(x-y)(x+y)}+\frac{xy}{x^3+y^3}$$

$$=\frac{2x-2y-x-y+3y}{(x-y)(x+y)}+\frac{xy}{x^3+y^3}=\frac{x}{(x-y)(x+y)}+\frac{xy}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}$$

$$=\frac{x}{x+y}\left[\frac{1}{x-y}+\frac{y}{x^2-xy+y^2}\right]=\frac{x}{x+y}\left[\frac{(x^2-xy+y^2)+y(x-y)}{(x-y)(x^2-xy+y^2)}\right]$$

wobei zwischen den eckigen Klammern verwendet worden ist,

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{AD}$$

wenn B und D keine gemeinsamen Faktoren besitzen. Die Fortsetzung der Vereinfachung ist

$$\frac{x}{x+y}\left[\frac{(x^2-xy+y^2)+y(x-y)}{(x-y)(x^2-xy+y^2)}\right]=\frac{x}{x+y}\left[\frac{x^2-xy+y^2+xy-y^2)}{(x-y)(x^2-xy+y^2)}\right]=$$

$$\frac{x}{x+y}\left[\frac{x^2}{(x-y)(x^2-xy+y^2)}\right]=\frac{x^3}{(x-y)[(x+y)(x^2-xy+y^2)]}=\frac{x^3}{(x-y)(x^3+y^3)}$$

wobei die Faktorisierung $(x^3+y^3)=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ im letzten Schritt verwendet worden ist.

(h) Der gemeinsame Faktor $1/a$ in den beiden Termen wird zuerst herausgehoben,

$$\frac{1}{a^2-a}+\frac{1}{a^2+a}=\frac{1}{a(a-1)}+\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right]$$

und dann verwendet man die obige Formel $A/B+C/D=(AD+BC)/(BD)$ mit $A=C=1$, $B=a-1$, $D=a+1$,

$$\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right]=\frac{1}{a}\left[\frac{(a+1)+(a-1)}{(a-1)(a+1)}\right]=\frac{2a}{a(a^2-1)}=\frac{2}{a^2-1}$$

wobei die Faktorisierung $a^2-1=(a-1)(a+1)$ verwendet worden ist.

(i) Durch die Formel

$$\frac{A/B}{C/D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$$

folgt

$$\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x^2-1}{4x^2}} \frac{1+x}{1-x} = \left[\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x^2-1}{4x^2}}\right]\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \left[\frac{x-1}{x}\frac{4x^2}{x^2-1}\right]\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= \left[\frac{x-1}{x}\frac{4x^2}{(x-1)(x+1)}\right]\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \left[\frac{4x^2}{x}\left(\frac{x-1}{x-1}\right)\frac{1}{x+1}\right]\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= \frac{4x}{x+1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{4x}{1-x}\left(\frac{1+x}{x+1}\right) = \frac{4x}{1-x}$$

wobei die Faktorisierung $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ verwendet worden ist.

8. Bruchgleichungen

(a) Um nach $x \neq 6$ in der Gleichung aufzulösen,

$$\frac{5}{x-6} = \frac{5}{2}$$

führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{aligned} \frac{5}{x-6} &= \frac{5}{2} && \div 5 \\ \frac{1}{x-6} = \frac{5}{x-6} \times \frac{1}{5} &= \frac{5}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{2} && \times 2(x-6) \\ 2 = \frac{1}{x-6} \times 2(x-6) = \frac{1}{2} \times 2(x-6) &= x-6 && +6 \\ 8 = 2+6 &= x \end{aligned}$$

und die Lösung ist $x = 8$.

(b) Um nach x in der Gleichung aufzulösen,

$$\frac{3}{2x-1} = \frac{2}{x+3}, \quad x \neq -3, \frac{1}{2}$$

führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{aligned} \frac{3}{2x-1} &= \frac{2}{x+3} && \times(2x-1)(x+3) \\ 3(x+3) = \frac{3}{2x-1} \times (2x-1)(x+3) &= \frac{2}{x+3} \times (2x-1)(x+3) = 2(2x-1) && -3(x+3) \\ 0 = 3(x+3) - 3(x+3) = 2(2x-1) - 3(x+3) &= x-11 && +11 \\ 11 &= x \end{aligned}$$

und die Lösung ist $x = 11$.

(c) Anhand der Formel $A/B + C/D = (AD + BC)/(BD)$ mit $A = 5$, $B = (x-2)$, $C = -3$ und $D = (x+2)$ lässt sich die linke Seite der Gleichung

$$\frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+8)}{x^2-4}$$

so umschreiben,

$$\frac{2x+16}{x^2-4} = \frac{5x+10-3x+6}{x^2-4} = \frac{5(x+2)-3(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+8)}{x^2-4} = \frac{2x+16}{x^2-4}$$

und diese Gleichung gilt für ein beliebiges $x \neq \pm 2$.

9. Rechnen mit Potenzen

(a) Mit den obigen Potenzformeln $a^p a^q = a^{p+q}$ und $a^{-p} = 1/a^p$ folgen

$$a^{x+2y} a^{3x+2z} = a^{(x+2y)+(3x+2z)} = a^{4x+2y+2z} = a^{2(2x+y+z)}$$

und

$$\frac{a^{x+2y}}{a^{3x+2z}} = a^{x+2y} a^{-(3x+2z)} = a^{(x+2y)-(3x+2z)} = a^{-2x+2y-2z} = a^{-2(x-y+z)}$$

(b) Mit der Faktorisierung $(A^2 - B^2) = (A - B)(A + B)$, $A = x^a$, $B = y^b$, kann der Ausdruck

$$(x^a - y^b)(x^a + y^b) - (x^a - y^b)^2$$

zuerst so vereinfacht werden,

$$(x^a - y^b)(x^a + y^b) - (x^a - y^b)^2 = (x^{2a} - y^{2b}) - (x^a - y^b)^2$$

Mit der Erweiterung $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, kann so weiter vereinfacht werden

$$(x^{2a} - y^{2b}) - (x^a - y^b)^2 = x^{2a} - y^{2b} - (x^{2a} - 2x^a y^b + y^{2b}) = 2x^a y^b - 2y^{2b}$$

(c) Mit der Potenzregel $(A/B)^p = A^p/B^p$ können die Potenzen der Quotienten so vereinfacht werden,

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{x + y}\right)^n \left(\frac{x + y}{a + b}\right)^n = \frac{(a^2 - b^2)^n}{(x + y)^n} \frac{(x + y)^n}{(a + b)^n} = \frac{((a - b)(a + b))^n}{(x + y)^n} \frac{(x + y)^n}{(a + b)^n}$$

wobei die Faktorisierung $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ verwendet worden ist. Um weiter zu vereinfachen, wird die Reihenfolge der Terme so geändert,

$$\frac{((a - b)(a + b))^n}{(x + y)^n} \frac{(x + y)^n}{(a + b)^n} = \frac{(a - b)^n (a + b)^n}{(a + b)^n} \frac{(x + y)^n}{(x + y)^n} = (a - b)^n$$

wobei die Potenzregel $(AB)^p = A^p B^p$ verwendet worden ist.

(d) Mit der Potenzregel $(A^p)^q = A^{p \cdot q}$ können die Terme so vereinfacht werden,

$$\begin{aligned} ((a^{+2})^{-4})^{-3} - ((a^{-8})^{-1})^{+3} &= (a^{(+2)\cdot(-4)})^{-3} - (a^{(-8)\cdot(-1)})^{+3} \\ &= (a^{-8})^{-3} - (a^{+8})^{+3} \\ &= a^{(-8)\cdot(-3)} - a^{(+8)\cdot(+3)} \\ &= a^{24} - a^{24} = 0 \end{aligned}$$

(e) Mit der Potenzregel $A^p/A^q = A^{p-q}$ können die Terme so vereinfacht werden,

$$\frac{a^x b^y (b - 1)}{a^{x-1} b^{y-1} (1 - b)^2} = \frac{a^x}{a^{x-1}} \frac{b^y}{b^{y-1}} \frac{b - 1}{(1 - b)^2} = a^{x-(x-1)} b^{y-(y-1)} \frac{b - 1}{(b - 1)^2}$$

wobei $(-A)^2 = ((-1) \cdot A)^2 = (-1)^2 A^2 = A^2$ oder $(1 - b)^2 = (b - 1)^2$ verwendet worden ist. Es kann dann weiter vereinfacht werden,

$$a^{x-(x-1)} b^{y-(y-1)} \frac{b - 1}{(b - 1)^2} = \frac{ab}{(b - 1)^{2-1}} = \frac{ab}{b - 1}$$

10. Textaufgabe mit Gleichungen, Beträgen und Ungleichungen

Jemand hat die Wahl zwischen zwei Stromtarifen: Entweder (1) monatlich €8 Grundgebühr und €0,10 pro kWh oder (2) kein Grundgebühr und €0,18 pro kWh.

(a) Bei welchem monatlichen Stromverbrauch sind die Kosten bei beiden Tarifen gleich?

Sei x der monatliche Stromverbrauch in kWh. Bei dem ersten Stromtarif sind die monatlichen Kosten €$(8 + 0.1x)$. Bei dem zweiten Stromtarif sind die monatlichen Kosten €$(0.18x)$. Die monatlichen Kosten für beide Tarife sind gleich wenn

$$8 + 0.1x = 0.18x$$

Um nach x in dieser Gleichung aufzulösen, führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{r|l} 8 + 0.1x = 0.18x & -0.1x \\ 8 = 8 + 0.1x - 0.1x = 0.18x - 0.1x = 0.08x & \div 0.08 \\ 100 = 8/0.08 = 0.08x/0.08 = x & \end{array}$$

und die Lösung ist $x = 100$.

(b) Bei welchem beträgt der Unterschied €10?

Falls x so ist, dass die monatlichen Kosten beim ersten Stromtarif €$(8+0.1x)$ größer sind als beim zweiten Stromtarif €$(0.18x)$, ist die €Differenz der monatlichen Kosten gegeben durch

$$(8 + 0.1x) - (0.18x)$$

Diese Differenz beträgt €10 wenn

$$8 - 0.08x = 8 + 0.1x - 0.18x = 10$$

Um nach x in dieser Gleichung aufzulösen, führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{r|l} 8 - 0.08x = 10 & -8 \\ -0.08x = 8 - 0.08x - 8 = 10 - 8 = 2 & \div(-0.08) \\ x = -0.08x/(-0.08) = 2/(-0.08) = -25 & \end{array}$$

und die rein mathematische Lösung $x = -25$ für diesen Fall ist nicht sinnvoll. Folglich ist die Annahme falsch, dass es ein $x \geq 0$ gibt, wobei die monatlichen Kosten beim ersten Stromtarif größer als bei zweiten Stromtarif sind.

Falls x so ist, dass die monatlichen Kosten beim zweiten Stromtarif €$(0.18x)$ größer sind als beim ersten Stromtarif €$(8+0.1x)$, ist die €Differenz der monatlichen Kosten gegeben durch

$$(0.18x) - (8 + 0.1x)$$

Diese Differenz beträgt €10 wenn

$$0.08x - 8 = 0.18x - 8 - 0.1x = 10$$

Um nach x in dieser Gleichung aufzulösen, führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{r|l} 0.08x - 8 = 10 & +8 \\ 0.08x = 0.08x - 8 + 8 = 10 + 8 = 18 & \div 0.08 \\ x = 0.08x/0.08 = 18/0.08 = 225 & \end{array}$$

und die Lösung $x = 225$ ist sinnvoll. Folglich ist die Annahme wahr, dass es ein $x \geq 0$ gibt, wobei die monatlichen Kosten beim zweiten Stromtarif größer als bei ersten Stromtarif sind. Die Antwort ist 225 kWh.

Die €Differenz zwischen den monatlichen Kosten kann auch mit dem Betrag so dargestellt werden,

$$|8 + 0.1x - 0.18x| = |8 - 0.08x|$$

und diese Differenz beträgt €10 wenn

$$|8 - 0.08x| = 10$$

Falls $8 - 0.08x > 0$ gilt, folgt $|8 - 0.08x| = 8 - 0.08x$, und es gilt $10 = |8 - 0.08x| = 8 - 0.08x$, wenn sinnloserweise $x = -25$ gilt, wie im ersten Fall oben gesehen. Falls $8 - 0.08x < 0$ gilt, folgt $|8 - 0.08x| = -(8 - 0.08x)$, und es gilt $10 = |8 - 0.08x| = -(8 - 0.08x) = 0.08x - 8$, wenn $x = 225$ gilt, wie im zweiten Fall oben gesehen. Die Lösung ist dann $x = 225$.

(c) Bei welchem ist der erste, bei welchem der zweite Tarif günstiger?

Die monatlichen Kosten beim ersten Stromtarif €$(8 + 0.1x)$ sind größer als beim zweiten Stromtarif €$(0.18x)$, wenn diese €Differenz positiv ist:

$$8 - 0.08x = (8 + 0.1x) - (0.18x) > 0$$

Um nach x in dieser Ungleichung aufzulösen, führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{rcl|l} 8 - 0.08x & > & 0 & -8 \\ -0.08x = 8 - 0.08x - 8 & > & 0 - 8 = -8 & \div(-0.08) \\ x = -0.08x/(-0.08) & < & -8/(-0.08) = 100 & >\rightarrow<! \end{array}$$

Man merkt hier, wenn eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder dividiert wird, wird die Richtung der Ungleichung geändert, z.B. in diesem Fall bei Division durch -0.08 ist $-0.08x > -8$ zu $x < 100$ geworden. Die Lösung ist ist $x < 100$, d.h. wenn der monatliche Stromverbrauch kleiner als 100 kWh ist, sind die monatlichen Kosten beim ersten Stromtarif größer als beim zweiten Stromtarif, und in diesem Fall ist der zweite Stromtarif günstiger.

Die monatlichen Kosten beim zweiten Stromtarif €$(0.18x)$ sind größer als beim ersten Stromtarif €$(8 + 0.1x)$, wenn diese €Differenz positiv ist:

$$0.08x - 8 = (0.18x) - (8 + 0.1x) > 0$$

Um nach x in dieser Ungleichung aufzulösen, führt man die Operationen der rechten Spalte auf beiden Seiten durch,

$$\begin{array}{rcl|l} 0.08x - 8 & > & 0 & +8 \\ 0.08x = 0.08x - 8 + 8 & > & -8 & \div 0.08 \\ x = 0.08x/0.08 & > & -8/0.08 = 100 & \end{array}$$

und die Lösung ist $x > 100$, d.h. wenn der monatliche Stromverbrauch größer als 100 kWh ist, sind die monatlichen Kosten beim zweiten Stromtarif größer als beim ersten Stromtarif, und in diesem Fall ist der erste Stromtarif günstiger.

11. Mengen und ihre Elemente und Teilmengen

(a) Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von Elementen, z.B. die Menge M sei definiert durch

$$M = \{2, 8, 6, 4\} = \{8, 2, 6, 4\} = \{2, 2, 6, 8, 8, 8, 4, 4, 4, 4\}$$

Man merkt, die Menge bleibt gleich bei einer Änderung der Reihenfolge oder bei einer Wiederholung der Elemente in der Liste. Die Mächtigkeit der Menge M, bezeichnet mit $\#M$ oder $|M|$, ist die Anzahl der Elemente der Menge. Für $M = \{2, 4, 6, 8\}$ gilt also $\#M = 4$ oder $|M| = 4$.

(b) Für ein Element a wird mit

$$a \in M \quad \text{bzw.} \quad a \notin M$$

symbolisiert, dass a ein Element von M ist, bzw. kein Element von M ist, z.B. mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$

$$\text{für} \quad a = 2 \quad \text{gilt} \quad a \in M \quad \text{aber für} \quad a = 0 \quad \text{gilt} \quad a \notin M$$

(c) Für eine Menge A wird mit

$$A \subset M \quad \text{bzw.} \quad A \not\subset M$$

symbolisiert, dass jedes Element der Menge A auch ein Element der Menge M ist, bzw. nicht jedes Element der Menge A auch ein Element der Menge M ist, z.B. mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$

$$\text{für } A = \{2, 4\} \quad \text{gilt} \quad A \subset M \quad \text{aber für} \quad A = \{0, 2\} \quad \text{gilt} \quad A \not\subset M$$

Wenn $A \subset M$ gilt, ist A eine Teilmenge von M, und sonst für $A \not\subset M$ ist A keine Teilmenge von M.

12. Mengen durch Bedingungen

(a) Jedes Element a der Menge $A = \{2, 4\}$ erfüllt die Bedingung $a < 5$, und mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$ lässt sich A so schreiben:

$$A = \{a \in M : a < 5\}$$

Man liest diese Gleichung so: "A ist die Menge der Elemente a aus M ($a \in M$), wobei (:) die Eigenschaft $a < 5$ erfüllt ist." Mit dieser Schreibweise ist es dann klar, dass $A \subset M$ gilt. Weiters ist die Teilmenge

$$B = \{b \in M : |b - 4| = 2\}$$

explizit gegeben durch die Menge $\{2, 6\}$.

(b) Wenn mehr als eine Bedingung verwendet werden, um eine Teilmenge zu definieren, werden diese Bedingungen in der Definition aufgelistet, z.B. mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$

$$\{m \in M : m < 7, m > 3\} = \{m \in M : m < 7 \text{ und } m > 3\} = \{4, 6\}$$

wobei die Bedingungen mit einem Beistrich oder mit dem Wort *und* getrennt werden. Wenn per Definition *entweder* eine Bedingung *oder* eine andere Bedingung erfüllt werden sollen, werden diese Bedingungen mit dem Wort *oder* getrennt,

$$\{m \in M : m < 3 \text{ oder } m > 7\} = \{2, 8\}$$

(c) Der Durchschnitt von A und B wird geschrieben mit

$$A \cap B = \{m \in M : m \in A \text{ und } m \in B\}$$

z.B. mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$, $A = \{2, 4\}$ und $B = \{2, 6\}$ gilt $A \cap B = \{2\}$.

(d) Die Vereinigung von A und B wird geschrieben mit

$$A \cup B = \{m \in M : m \in A \text{ oder } m \in B\}$$

z.B. mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$, $A = \{2, 4\}$ und $B = \{2, 6\}$ gilt $A \cup B = \{2, 4, 6\}$.

(e) Die Differenz A ohne B wird geschrieben mit

$$A \backslash B = \{m \in M : m \in A \text{ und } m \notin B\}$$

z.B. mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$, $A = \{2, 4\}$ und $B = \{2, 6\}$ gilt $A \backslash B = \{4\}$.

(f) Das Komplement von A in M wird geschrieben mit

$$\mathcal{C}_M A = \{m \in M : m \notin A\}$$

z.B. mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$ und $A = \{2, 4\}$ gilt $\mathcal{C}_M A = \{6, 8\}$.

(g) Wenn die Bedingung in der Definition einer Menge von keinem Element erfüllt ist, ergibt sich eine Menge mit keinen Elementen, z.B. mit $M = \{2, 4, 6, 8\}$ ist

$$\{m \in M : m < 0\} = \{\} = \emptyset$$

wobei die beiden Symbole, $\{\}$ und $\emptyset$, für die sogenannte leere Menge verwendet werden.

13. Zahlenmengen

(a) Die natürlichen Zahlen sind

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

(b) Mit $\{0\}$ angefügt, ergibt sich die Menge

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

(c) Die ganzen Zahlen sind

$$\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \mathbb{N}_0 = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$$

wobei mit $-\mathbb{N}$ gemeint ist

$$-\mathbb{N} = \{-1, -2, -3, \dots\}$$

(d) Die rationalen Zahlen sind

$$\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

z.B. $0.625 \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ und $-\frac{1}{17} \in \mathbb{Q}$. Die Dezimaldarstellung jeder rationalen Zahl verlangt entweder endlich viele Ziffern, oder es gibt eine fixierte Anzahl von Ziffern in der Darstellung, die sich unendlich oft wiederholen, z.B.

$$0.625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}, \quad \frac{1}{3} = 0.3333\cdots = 0.\overline{3}$$

$$-\frac{1}{17} = -0.05882352941176470588\cdots = -0.0\overline{5882352941176470}$$

wobei die überstrichenen Ziffern wiederholt werden.

(e) Das Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge der reellen Zahlen.

- Um die reellen Zahlen grob zu verstehen, schaut man von einem fixierten Standpunkt alle möglichen Abstände auf dem Weg vor sich und auch hinter sich an.
- Jeder Abstand vor sich entspricht einer reellen Zahl $x > 0$.
- Jeder Abstand hinter sich entspricht einer reellen Zahl $x < 0$.
- Der fixierte Standpunkt entspricht der reellen Zahl $x = 0$.

- Diese Abstände bilden ein Kontinuum, d.h. es gibt keine Lücken auf dem Weg, die nicht zugänglich sind.

(f) Die irrationalen Zahlen sind die reellen Zahlen, die nicht rational sind,

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$$

Die Dezimaldarstellung jeder irrationalen Zahl verlangt unendlich viele Ziffern, wobei jede fixierte Anzahl von hinter einander stehenden Ziffern sich nie wiederholen. Beispiele sind

- das Verhältnis zwischen dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises,

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937 51\cdots$$

- die Eulersche Zahl $\quad (e = 1 + 1/(2 \cdot 1) + 1/(3 \cdot 2 \cdot 1) + 1/(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) + \cdots)$

$$e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093700 0\cdots$$

- der goldene Schnitt, $\quad (\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = a/b = (a + b)/a \text{ für } a > b > 0)$

$$\phi = 1.618033988749894848204586834365638117720309179805 8\cdots$$

- einige Wurzeln, z.B.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095048801688724209698078569671875376 9\cdots$$

- einige reguläre Muster, z.B. $\quad (\theta = 1/10 + 1/10^{2^2} + 1/10^{3^2} + 1/10^{4^2} + \cdots)$

$$\theta = 0.100100001000000100000000100000000000100000000000010\cdots$$

(g) Die komplexen Zahlen sind

$$\mathbb{C} = \{z = x + \imath y : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{wobei} \quad \imath^2 = -1$$

Während die Lösungen der Gleichung $x^2 = 1$ gegeben sind durch $x_1 = -1$ und $x_2 = +1$, sind die Lösungen der Gleichung $z^2 = -1$ gegeben durch $z_1 = -\imath$ und $z_2 = +\imath$, d.h.

$$z_1^2 = (-\imath)^2 = (-1)^2\imath^2 = (+1)(-1) = -1 \quad \text{und} \quad z_2^2 = (+\imath)^2 = \imath^2 = -1$$

Die komplexe Zahl $z = 1 + \imath$ erfüllt

$$z^2 = (1 + \imath)^2 = 1 + 2\imath + \imath^2 = 1 + 2\imath - 1 = 2\imath = 2(z - 1) \quad \text{da} \quad \imath = z - 1$$

und daher ist z eine Lösung der Gleichung $z^2 = 2(z - 1)$ oder $z^2 - 2z + 2 = 0$.

14. Ungleichungen und Intervalle

(a) Für Ungleichungen gibt es die folgenden Notationen

$x \neq y$	steht für	x ist ungleich y
$y > x$ oder $x < y$	steht für	x ist kleiner als y
$y \geq x$ oder $x \leq y$	steht für	$x = y$ oder x ist kleiner als y
$y < x$ oder $x > y$	steht für	x ist größer als y
$y \leq x$ oder $x \geq y$	steht für	$x = y$ oder x ist größer als y

Man sagt, die Ungleichungen $x < y$ und $x > y$ sind streng, aber die Ungleichungen $x \leq y$ und $x \geq y$ sind nicht streng.

(b) Das oft verwendete Symbol

$$\forall \quad \text{bedeutet “für alle”}$$

Wenn $x \leq y$ gilt, gelten auch

$$\begin{array}{rlcr} x+z \leq y+z, & \forall z \in \mathbb{R} & & x+7 \leq y+7 \\ cx \leq cy, & \forall c > 0 & \text{z.B.} & 7x \leq 7y \\ cx \geq cy, & \forall c < 0 & & -7x \geq -7y \end{array}$$

(c) Für Intervalle gibt es die folgenden Notationen

$$\begin{array}{rcl} [a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\ (a,b) & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\ (a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\ [a,b) & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \end{array}$$

z.B. $[1,2]$ ist das abgeschlossene Intervall aller reellen Zahlen zwischen 1 und 2 inklusive 1 und 2, und $(1,2)$ ist das offene Intervall aller reellen Zahlen zwischen 1 und 2 exklusive 1 und 2.

15. Cartesische Produkte und Höhere Dimensionen

(a) Für die folgende Definition sei (a,b) ein geordnetes Paar, d.h. im jetzigen Kontext ist dies kein Intervall und die Einträge a und b erscheinen in einer bestimmten Reihenfolge. Das Cartesische Produkt der Menge A mit B ist

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

z.B. mit $A = \{2,4\}$ und $B = \{1,3,5\}$ ist

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(2,1),(2,3),(2,5), \\ &(4,1),(4,3),(4,5)\} \end{aligned}$$

Da die Reihenfolge der Einträge des geordneten Paares wichtig ist, gilt im allgemeinen $A \times B \neq B \times A$.

(b) Das Cartesische Produkt von drei Mengen ist gegeben durch

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$$

wobei (a,b,c) ein geordnetes 3-Tupel sei, d.h. die Einträge a, b und c erscheinen in einer bestimmten Reihenfolge. Cartesische Produkte von n Mengen werden ähnlich mit n-Tupeln definiert.

(c) Die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ sei durch das zweifache Cartesische Produkt definiert

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Der reelle Raum $\mathbb{R}^3$ sei durch das dreifache Cartesische Produkt definiert

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

16. Potenzrechnungen mit Reellen Zahlen

(a) $10^{-1} = 0.1$,
$10^0 = 1.0$ und
$10^3 = 1000.0$.

(b) $3.14 \times 10^{-1} = 0.314$,
$3.14 \times 10^{0} = 3.14$ und
$3.14 \times 10^{3} = 3140.0$.

(c) `3.14e-01` $= 3.14 \times 10^{-1} = 0.314$,
`2.718e+00` $= 2.718 \times 10^{0} = 2.718$ und
`1.618e+03` $= 1.618 \times 10^{3} = 1618.0$.

(d) Um $\sqrt{2}$ händisch zu bestimmen, berechnet man

$$\begin{array}{rcll} 1.4^2 & = & 1.96 & \text{näher zu 2 als } 1.3^2 \text{ oder } 1.5^2 \\ 1.41^2 & = & 1.9881 & \text{näher zu 2 als } 1.40^2 \text{ oder } 1.42^2 \\ 1.414^2 & = & 1.9994 & \text{näher zu 2 als } 1.413^2 \text{ oder } 1.415^2 \\ 1.4142^2 & = & 1.99996 & \text{näher zu 2 als } 1.4141^2 \text{ oder } 1.4143^2 \\ & \vdots & & \end{array}$$

und die rationalen Zahlen $\{1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots\}$ nähern sich an die irrationale Zahl $\sqrt{2}$.

Aus der Regel $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ folgt $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

(e) Um $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$ händisch zu bestimmen, berechnet man

$$\begin{array}{rcll} 1.5^3 & = & 3.375 & \text{näher zu 4 als } 1.4^3 \text{ oder } 1.6^3 \\ 1.59^3 & = & 4.01968 & \text{näher zu 4 als } 1.58^3 \text{ oder } 1.60^3 \\ 1.587^3 & = & 3.99697 & \text{näher zu 4 als } 1.586^3 \text{ oder } 1.588^3 \\ 1.5874^3 & = & 3.99999 & \text{näher zu 4 als } 1.5873^3 \text{ oder } 1.5875^3 \\ & \vdots & & \end{array}$$

und die rationalen Zahlen $\{1.5, 1.58, 1.587, 1.5874, \dots\}$ nähern sich an die irrationale Zahl $4^{\frac{1}{3}}$.

Aus der Regel

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \quad \text{mit} \quad \mathrm{ggT}(m,n) = 1$$

folgt $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} = 16^{\frac{1}{3}}$, die durch ähnliche Rechnungen

$$\begin{array}{rcl} 2.5^3 & = & 15.625 \\ 2.52^3 & = & 16.003008 \\ 2.5198^3 & = & 15.999198 \\ 2.51984^3 & = & 15.99996 \\ & \vdots & \end{array}$$

mit den rationalen Zahlen $\{2.5, 2.520, 2.5198, 2.51984, \cdots\}$ angenähert wird.

(f) Um π^2 händisch zu bestimmen, verwendet man die Dezimaldarstellung $\pi = 3.14159\cdots$ und berechnet

$$\begin{array}{rcl} 3.1^2 & = & 9.61 \\ 3.14^2 & = & 9.8596 \\ 3.141^2 & = & 9.86588 \\ 3.1415^2 & = & 9.86902 \\ & \vdots & \end{array}$$

d.h. die rationalen Zahlen $\{9.61, 9.8596, 9.86588, 9.86902, \dots\}$ nähern sich an die irrationale Zahl π^2.

(g) Um 3^e händisch zu bestimmen, verwendet man die Dezimaldarstellung $e = 2.71828\cdots$ und berechnet

$$\begin{array}{rcll} 3^{2.7} & = & 19.4190235\cdots & \approx 19.4190 \\ 3^{2.71} & = & 19.6335394\cdots & \approx 19.6335 \\ 3^{2.718} & = & 19.8068571\cdots & \approx 19.8069 \\ 3^{2.7182} & = & 19.8112096\cdots & \approx 19.8112 \\ & \vdots & & \end{array}$$

d.h. die rationalen Zahlen $\{19.4190, 19.6335, 19.8069, 19.8112, \dots\}$ nähern sich an die irrationale Zahl 3^e.

Alle Zahlen in der linken Spalte sind irrationale Wurzeln, z.B. $3^{2.7} = 3^{\frac{27}{10}} = \sqrt[10]{3^{27}}$. Diese besitzen eine unendliche Dezimaldarstellung in der mittleren Spalte. Die Zahlen in der rechten Spalte ergeben sich nach einigen Schritten der obigen Methode zur Bestimmung einer Wurzel.

(h) Um e^π händisch zu bestimmen, werden die Dezimaldarstellungen $\pi = 3.1415926\cdots$ und $e = 2.7182818\cdots$ verwendet, und man berechnet

$$\begin{array}{rcll} 2.7^{3.1} & = & 21.7384046\cdots & \approx 21.7384 \\ 2.71^{3.14} & = & 22.8835591\cdots & \approx 22.8836 \\ 2.718^{3.141} & = & 23.1194516\cdots & \approx 23.1195 \\ 2.7182^{3.1415} & = & 23.1363605\cdots & \approx 23.1364 \\ 2.71828^{3.14159} & = & 23.1405823\cdots & \approx 23.1406 \\ 2.718281^{3.141592} & = & 23.1406553\cdots & \approx 23.1407 \\ & \vdots & & \end{array}$$

d.h. die rationalen Zahlen $\{21.7384, 22.8836, 23.1195, 23.1364, 23.1406, 23.1407\dots\}$ nähern sich an die irrationale Zahl e^π.

Die Spalten dieses Beispiels sind analog zu den Spalten des letzten Beispiels.

17. Algebraische Lösung von einem Gleichungssystem

(a) Um Lösungen x_0 und y_0 für das (lineare) Gleichungssystem zu finden,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 3y & = & 4 \end{array} \right.$$

wird nach y in der 1. Gleichung aufgelöst, und die Beziehung zwischen x und y ergibt sich,

$$y = 1 - x$$

Diese Formel wird dann in die 2. Gleichung eingesetzt,

$$-x + 3 = 2x + 3(1 - x) = 2x + 3y = 4$$

Um x zu isolieren, summiert man $x - 4$ auf beiden Seiten und bekommt

$$-1 = (-x + 3) + (x - 4) = 4 + (x - 4) = x$$

Also gilt $x_0 = -1$. Dieser Wert $x_0 = -1$ entspricht dem Wert $y_0 = 1 - x_0 = +2$ aus der Beziehung zwischen x und y. Die Lösung ist $x_0 = -1$, $y_0 = +2$.

(b) Um Lösungen für x und y im (nicht linearen) Gleichungssystem zu finden,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xy & = & 1 \\ x^2 + y^2 & = & 2 \end{array} \right.$$

wird nach y in der 1. Gleichung aufgelöst, und die Beziehung zwischen x und y ergibt sich,

$$y = \frac{1}{x}$$

Es darf durch x dividiert werden, da die 1. Gleichung mit dem Wert $x = 0$ nicht erfüllt werden kann. Daher ist Null im obigen Nenner ausgeschlossen. Diese Formel wird dann in die 2. Gleichung eingesetzt,

$$\frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + y^2 = 2$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, multipliziert man mit x^2 auf beiden Seiten und bekommt

$$x^4 + 1 = 2x^2 \quad \text{oder} \quad x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

Da die Potenzen in der letzten Gleichung immer gerade sind, kann die Gleichung so umgeschrieben werden,

$$(x^2-1)^2 = (x^2)^2 - 2(x^2) + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

wobei die Binomialformel $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, $A = x^2$, $B = 1$, verwendet worden ist. Die letzte Gleichung kann nur gelten, wenn

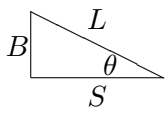
$$x^2 - 1 = 0$$

gilt. Die Nullstellen dieser quadratischen Gleichung sind $x_1 = -1$ und $x_2 = +1$. Laut der obigen Beziehung zwischen x und y sind die entsprechenden y-Werte gegeben durch $y_1 = 1/x_1 = -1$ und $y_2 = 1/x_2 = +1$. Die Lösungspaare sind $x_1 = -1$, $y_1 = -1$ und $x_2 = +1$, $y_2 = +1$.

18. Rechnungen mit Winkelfunktionen

(a) Die Länge $S = 100$ des Schattens, die Länge L der Linie von der Schattenspitze bis zur Baumspitze, die Höhe B des Baums und der Winkel $\theta = 30°$ zwischen dem Boden und der Linie von der Schattenspitze bis zur Baumspitze erfüllen die folgenden Gleichungen mit Winkelfunktionen,

$$\sin(\theta) = \frac{B}{L}, \quad \cos(\theta) = \frac{S}{L}, \quad \tan(\theta) = \frac{B}{S}$$



- Die Höhe B des Baums ist

$$B = S\tan(\theta) = 100\tan(30°) = 100/\sqrt{3}$$

aber auch

$$B = L\sin(\theta) = L\sin(30°) = L/2$$

- Daher gilt $L/2 = B = 100/\sqrt{3}$ oder $L = 200/\sqrt{3}$. Sonst lässt sich L bestimmen durch

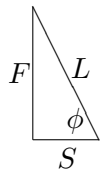
$$L = \frac{S}{\cos(30°)} = \frac{100}{\sqrt{3}/2} = \frac{200}{\sqrt{3}}$$

oder

$$L = \frac{B}{\sin(30°)} = \frac{100/\sqrt{3}}{1/2} = \frac{200}{\sqrt{3}}$$

(b) Die Höhe $F = 10$ des Fahnenmasts, die Länge $S = 10/\sqrt{3}$ des Schattens, die Länge L der Linie von der Schattenspitze bis zur Fahnenmastspitze und der Winkel ϕ zwischen dem Boden und der Linie von der Schattenspitze bis zur Fahnenmastspitze erfüllen die folgenden Gleichungen mit Winkelfunktionen,

$$\sin(\phi) = \frac{F}{L}, \quad \cos(\phi) = \frac{S}{L}, \quad \tan(\phi) = \frac{F}{S}$$



Da F und S bekannt sind, lässt sich der Winkel ϕ bestimmen durch

$$\tan(\phi) = \frac{F}{S} = \frac{10}{10/\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \quad \text{oder} \quad \phi = \arctan(\sqrt{3}) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60^\circ$$

Die Länge L ist dann gegeben durch

$$L = \frac{F}{\sin(\phi)} = \frac{10}{\sin(60^\circ)} = \frac{10}{\sqrt{3}/2} = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

oder

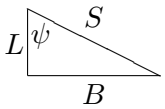
$$L = \frac{S}{\cos(\phi)} = \frac{10/\sqrt{3}}{\sin(60^\circ)} = \frac{10/\sqrt{3}}{1/2} = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

oder auch mit Pythagoras,

$$L = \sqrt{S^2 + F^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 + 10^2} = \sqrt{100 \cdot \left(\frac{1}{3} + 1\right)} = 10\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{10 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

(c) Die Höhe $L = 50$ der Leiter, die Länge S des Seils, der Abstand B am Boden zwischen der Leiter und dem Seil und der Winkel $\psi = 60^\circ$ erfüllen die folgenden Gleichungen mit Winkelfunktionen,

$$\sin(\psi) = \frac{B}{S}, \quad \cos(\psi) = \frac{L}{S}, \quad \tan(\psi) = \frac{B}{L}$$



Da L und ψ bekannt sind, lässt sich die Länge S des Seils bestimmen durch

$$S = \frac{L}{\cos(\psi)} = \frac{50}{\cos(60^\circ)} = \frac{50}{1/2} = 100$$

Der Abstand B am Boden zwischen der Leiter und dem Seil lässt sich dann so bestimmen,

$$B = S\sin(\psi) = 100\sin(60^\circ) = 100 \cdot \sqrt{3}/2 = 50\sqrt{3}$$

oder

$$B = L\tan(\psi) = 50\tan(60^\circ) = 50\sqrt{3}$$

19. Bestimmung von Geraden

(a) Die Steigung s der Gerade ist gegeben durch

$$s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

wobei (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Koordinaten von zwei Punkten auf der Gerade sind. Die gegebenen Punkte sind $(1, 2)$ und $(3, 4)$. und daher ist die entsprechende Steigung,

$$s = \frac{4 - 2}{3 - 1} = 1$$

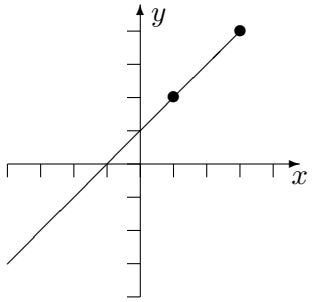
Wenn (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt auf der Gerade ist, ist die Gleichung für die Gerade gegeben durch

$$(y - y_0) = s(x - x_0)$$

Man wählt zwischen den gegebenen Punkten z.B. $(1, 2)$ aus, und die Gleichung der gegebenen Gerade ist

$$(y - 2) = 1 \cdot (x - 1) \quad \text{oder} \quad y = x + 1$$

Eine Skizze dieser Gerade zusammen mit den zwei gegebenen Punkten ist:



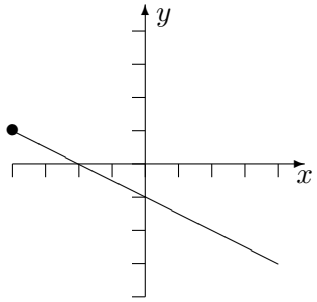
(b) Da man von einem zu einem anderen Punkt auf der Gerade durch 2 Einheiten nach rechts und 1 Einheit nach unten kommt, ist die Steigung der Gerade gegeben durch

$$s = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \Delta x = 2, \quad \Delta y = -1, \quad \text{oder} \quad s = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Da der Punkt $(-4, 1)$ auf der Gerade liegt, ist die Gleichung für die Gerade gegeben durch

$$(y - 1) = -\frac{1}{2}(x + 4) \quad \text{oder} \quad y = -\frac{x + 2}{2}$$

Eine Skizze dieser Gerade zusammen mit dem gegebenen Punkt ist:



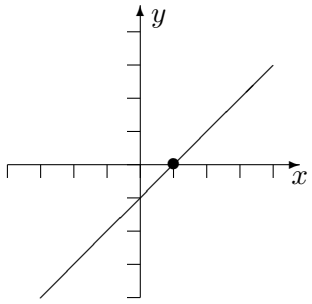
(c) Da der Winkel 45° beträgt, ist die Steigung gegeben durch

$$s = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{mit} \quad \Delta y = \Delta x, \quad \text{oder} \quad s = 1$$

Da der Punkt $(1, 0)$ auf der Gerade liegt, ist die Gleichung für die Gerade gegeben durch

$$(y - 0) = 1 \cdot (x - 1) \quad \text{oder} \quad y = x - 1$$

Eine Skizze dieser Gerade zusammen mit dem gegebenen Punkt ist:

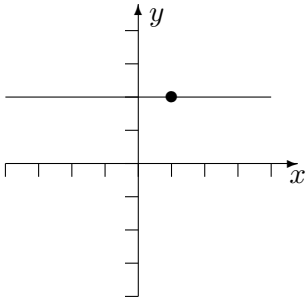


Für einen beliebigen Winkel θ ist die Steigung $s = \tan(\theta)$. Für $\theta = 30°$ gilt $s = \tan(30°) = 1/\sqrt{3}$, und die Gerade ist gegeben durch $y = (x-1)/\sqrt{3}$. Für $\theta = 60°$ gilt $s = \tan(60°) = \sqrt{3}$, und die Gerade ist gegeben durch $y = \sqrt{3}(x-1)$. Für $\theta = 90°$ ist die Gerade senkrecht, und die Gerade ist gegeben durch $x = 1$.

(d) Da die Gerade waagerecht ist, ist die Steigung $s = 0$. Da der Punkt $(1, 2)$ auf der Gerade liegt, ist die Gleichung für die Gerade gegeben durch

$$(y-2) = 0 \cdot (x-1) \quad \text{oder} \quad y = 2$$

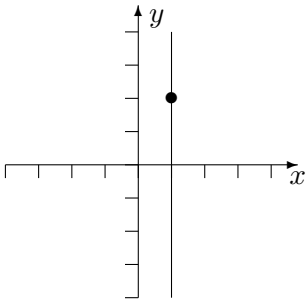
Eine Skizze dieser Gerade zusammen mit dem gegebenen Punkt ist:



(e) Da die Gerade senkrecht ist, ist die Steigung nicht endlich. Da der Punkt $(1, 2)$ auf der Gerade liegt, ist die Gleichung für die Gerade gegeben durch

$$x = 1$$

Eine Skizze dieser Gerade zusammen mit dem gegebenen Punkt ist:



2 Kegelschnitte, Betragsfunktionen, Geraden

2.1 Beispiele

1. Mit Wolfram Mathematica oder Wolfram Alpha führen Sie die folgenden Befehle durch und erklären Sie die Ergebnisse:

   (a) `Plot[{x^3-x,2/(3 Sqrt[3]),-2/(3 Sqrt[3]),-x,2(x+1),2(x-1)},{x,-1,1}]`
   Vorzeichen der Steigungen in den jeweiligen Bereichen?

   (b) `Plot[Evaluate[{x^3-x,D[x^3-x,x]}],{x,-1,1}]`
   Vorzeichen der parabolischen Kurve in den jeweiligen Bereichen?

   (c) `Plot[x,{x,0,1}]` und `Integrate[x,{x,0,1}]`
   Flächeninhalt des Dreiecks?

   (d) `Plot[Sqrt[x],{x,0,1}]` und `Integrate[Sqrt[x],{x,0,1}]`
   Flächeninhalt unter der Kurve?

2. Durch quadratische Ergänzung schreiben Sie die folgenden Gleichungen so um, dass es erkennbar wird, ob die Relation einer Ellipse, einer Hyperbel oder einer Parabel entspricht. Solche Kurven heißen *Kegelschnitte*, weil sie durch Schneiden eines Kegels entstehen. Dabei sollen die Parameter des Kegelschnitts bestimmt werden, z.B. Achsenlängen, Scheitel, Asymptoten, usw. Stellen Sie die Relationen grafisch dar und lesen Sie den Definitionsbereich D und den Bildbereich B von der Grafik ab.

   (a) $1 + 2x + x^2 - 4y + y^2 = 0$

   (b) $84 - 8x + 4x^2 + 54y + 9y^2 = 0$

   (c) $5 = x + 4y - 2y^2$

   (d) $78 = -8x + 4x^2 - 54y - 9y^2$

   Hinweis: Zur Kontrolle können Sie z.B. für Teil (a) die folgenden Wolfram Befehle probieren:

   ```
   Simplify[1+2x+x^2-4y+y^2]
   ContourPlot[1+2x+x^2-4y+y^2==0,{x,-5,+5},{y,-5,+5}]
   ```

3. Asymptoten einer Hyperbel:

   (a) Für r immer kleiner stellen Sie die Hyperbel $y^2 - x^2 = r^2$ grafisch dar.
   Hinweis: Zur Kontrolle können Sie den obigen Wolfram Befehl `ContourPlot` probieren.

   (b) Stellen Sie die Relation $y^2 - x^2 = 0$ grafisch dar und zeigen Sie, $|y| = |x|$ ist die gleiche Relation.

   (c) Durch Auswertung in $x = -2, -1, 0, +1, +2$ überzeugen Sie sich, es gilt $\sqrt{x^2} = |x|$ aber nicht $\sqrt{x^2} = \pm x$.

   (d) Zeigen Sie anhand der stückweisen Definition der Betragsfunktion, die Lösung der Gleichung $|x| = 1$ ist $x \in \{-1, +1\}$. Analog zeigen Sie, die Lösung der Ungleichung $|x| < 1$ ist $x \in (-1, +1)$, und die Lösung der Ungleichung $|x| > 1$ ist $x \in \mathbb{R}\backslash[-1, +1]$.

   (e) Finden Sie zwei Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$, die $|y_1(x)| = |x| = |y_2(x)|$ erfüllen.

   (f) Finden Sie zwei Funktionen, $y_1(x)$ und $y_2(x)$, die für $a, b > 0$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, die die Relation $|(x - x_0)/a| = |(y - y_0)/b|$ erfüllen.

4. Geraden und Betragsfunktionen.

(a) Finden Sie die Scheitel für $y_1(x) = |x-2| + 3$ und $y_2(x) = 4|x-5| + 6$.

(b) Stellen Sie diese Funktionen zusammen mit $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ grafisch dar.
Hinweis: Zur Kontrolle können Sie den Wolfram Befehl `Plot` probieren, wobei `Abs[x]` für $|x|$ verwendet wird, d.h. $y_1(x)$ lässt sich mit `Abs[x-2]+3` darstellen.

(c) Finden Sie eine Formel für die Gerade durch $(0, 1)$ und $(2, 0)$.

(d) Finden Sie Formeln für die drei Geraden, die in den jeweiligen Teilintervallen zwischen den Scheiteln der Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ ersichtlich sind.

(e) Stellen Sie $y(x)$ mit diesen Formeln bezüglich der jeweiligen Teilintervalle dar.

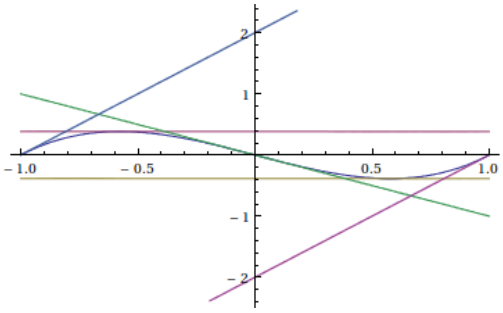
2.2 Lösungen

1. Wolfram Alpha:

   (a) Der Befehl

   ```
   Plot[{x^3-x,2/(3 Sqrt[3]),-2/(3 Sqrt[3]),-x,2(x+1),2(x-1)},{x,-1,1}]
   ```

   stellt die Funktionen $f(x) = x^3 - x$, $y_1(x) = 2/(3\sqrt{3})$, $y_2(x) = -2/(3\sqrt{3})$, $y_3(x) = -x$, $y_4(x) = 2(x+1)$ und $y_5(x) = 2(x-1)$ gemeinsam im Intervall $[-1, 1]$ grafisch dar:

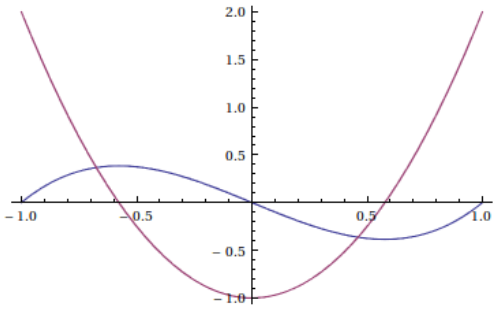
   

   Die Funktionen $y_i(x)$, $i = 1, \ldots, 5$, sind Tangenten für $f(x)$. Die Steigung der Tangente $y_i(x)$ an der Tangentenstelle ist die Steigung der Funktion $f(x)$. Für $x < -1/\sqrt{3}$ und $x > 1/\sqrt{3}$ ist die Steigung positiv. Für $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$ ist die Steigung negativ. Für $x \in \{-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\}$ ist die Steigung Null.

   (b) Der Befehl

   ```
   Plot[Evaluate[{x^3-x,D[x^3-x,x]}],{x,-1,1}]
   ```

   stellt die Funktionen $f(x) = x^3 - x$ und $f'(x) = 3x^2 - 1$ (=`D[x^3-x,x]`) gemeinsam im Intervall $[-1, 1]$ grafisch dar:

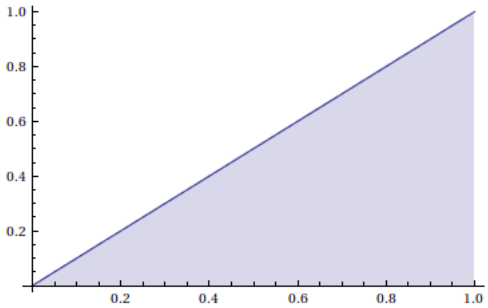
   

   An der Stelle x gibt der Funktionswert von $f'(x)$ die Steigung der Funktion $f(x)$ an. Insbesondere gelten $f'(-1/\sqrt{3}) = f'(1/\sqrt{3}) = 0$. Auch für $x < -1/\sqrt{3}$ und $x > 1/\sqrt{3}$ ist $f'(x)$ positiv und für $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$ ist $f'(x)$ negativ.

   (c) Der Befehl

   ```
   Plot[x,{x,0,1}]
   ```

   stellt die Funktion $f(x) = x$ im Intervall $[0, 1]$ grafisch dar

und der Befehl

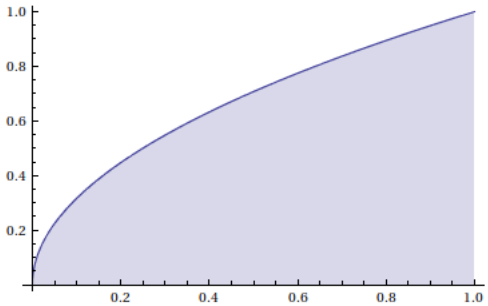
```
Integrate[x,{x,0,1}]
```

berechnet den Flächeninhalt (1/2) des Dreiecks.

(d) Der Befehl

```
Plot[Sqrt[x],{x,0,1}]
```

stellt die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[0, 1]$ grafisch dar



und der Befehl

```
Integrate[Sqrt[x],{x,0,1}]
```

berechnet den Flächeninhalt (2/3) unter der Kurve.

2. Kegelschnitte:

(a) Die Gleichung $1 + 2x + x^2 - 4y + y^2 = 0$ lässt sich durch quadratische Ergänzung so umschreiben:

$$-1 = [x^2 + 2x] + [y^2 - 4y] = [(x + 1)^2 - 1] + [(y - 2)^2 - 4] = (x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 5$$

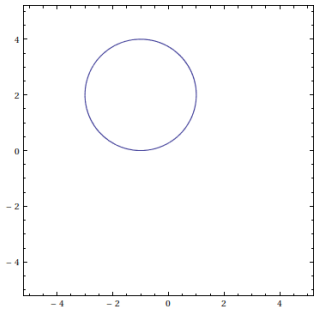
oder

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Der Kegelschnitt ist ein Kreis mit Zentrum $(-1, 2)$ und mit Radius $\sqrt{4} = 2$. Der Befehl

```
ContourPlot[1+2x+x^2-4y+y^2==0,{x,-5,+5},{y,-5,+5}]
```

stellt die Relation für $x \in [-5, 5]$ und $y \in [-5, 5]$ grafisch dar.



(b) Die Gleichung $84 - 8x + 4x^2 + 54y + 9y^2 = 0$ lässt sich durch quadratische Ergänzung so umschreiben:

$$-84 = [4x^2 - 8x] + [9y^2 + 54y] = 4[x^2 - 2x] + 9[y^2 + 6y] = 4[(x-1)^2 - 1] + 9[(y+3)^2 - 9]$$

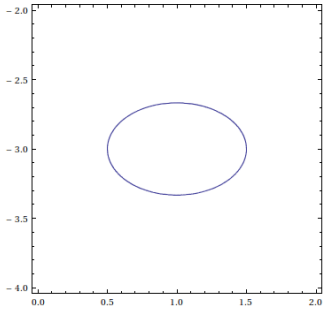
oder

$$4(x - 1)^2 + 9(y + 3)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{(1/2)^2} + \frac{(y+3)^2}{(1/3)^2} = 1$$

Der Kegelschnitt ist eine Ellipse mit Zentrum $(1, -3)$ und mit Längen 1/2 und 1/3 der $x-$ bzw. $y-$Achsen. Der Befehl

```
ContourPlot[84 - 8 x + 4 x^2 + 54 y + 9 y^2 == 0,{x,0,2},{y,-4,-2}]
```

stellt die Relation für $x \in [0, 2]$ und $y \in [-4, -2]$ grafisch dar.



(c) Die Gleichung $5 = x + 4y - 2y^2$ lässt sich durch quadratische Ergänzung so umschreiben:

$$x - 5 = 2y^2 - 4y = 2[y^2 - 2y] = 2[(y-1)^2 - 1]$$

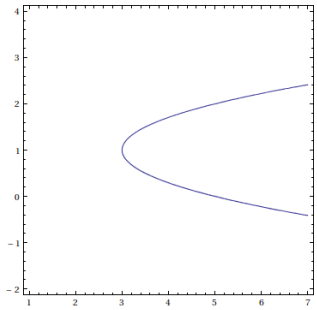
oder

$$x = 2(y-1)^2 + 3$$

Der Kegelschnitt ist eine Parabel mit Scheitel $(3, 1)$ und Ausdehnungsfaktor 2. Der Befehl

```
ContourPlot[x + 4 y - 2 y^2 == 5,{x,1,7},{y,-2,4}]
```

stellt die Relation für $x \in [1, 7]$ und $y \in [-2, 4]$ grafisch dar.



(d) Die Gleichung $78 = -8x + 4x^2 - 54y - 9y^2$ lässt sich durch quadratische Ergänzung so umschreiben:

$$78 = 4[x^2 - 2x] - 9[y^2 + 6y] = 4[(x-1)^2 - 1] - 9[(y+3)^2 - 9]$$

oder

$$4(x-1)^2 - 9(y+3)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{(1/2)^2} - \frac{(y+3)^2}{(1/3)^2} = 1$$

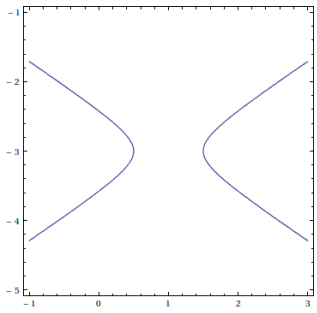
Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel mit Zentrum $(1, -3)$ und mit Asymptoten

$$y = -3 + \tfrac{2}{3}(x-1), \quad y = -3 - \tfrac{2}{3}(x-1)$$

Der Befehl

```
ContourPlot[-8 x + 4 x^2 - 54 y - 9 y^2 == 78, {x,-1,3},{y,-5,-1}]
```

stellt die Relation für $x \in [-1, 3]$ und $y \in [-5, -1]$ grafisch dar.

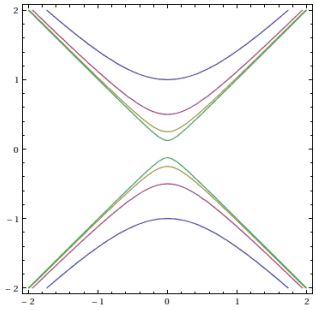


3. Asymptoten einer Hyperbel:

   (a) Der Befehl

```
ContourPlot[{y^2-x^2==1,y^2-x^2==1/4,y^2-x^2==1/16,y^2-x^2==1/64},{x,-2,2},{y,-2,2}]
```

   stellt die Hyperbel $y^2 - x^2 = r^2$ mit $r = 1, 1/2, 1/4, 1/8$ für $x \in [-2, 2]$ und $y \in [-2, 2]$ grafisch dar.

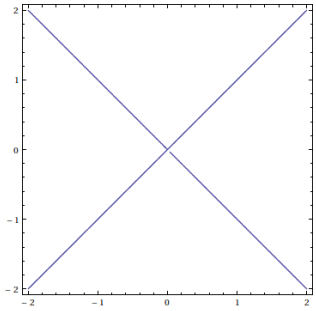


   Für r immer kleiner werden die Asymptoten $y = x$ und $y = -x$ angenähert.

   (b) Der Befehl

```
ContourPlot[y^2-x^2==0,{x,-2,2},{y,-2,2}]
```

   stellt die Relation $y^2 - x^2 = 0$ für $x \in [-2, 2]$ und $y \in [-2, 2]$ grafisch dar.



   Die grafische Darstellung der Relation $|y| = |x|$ durch

```
ContourPlot[Abs[y]==Abs[x],{x,-2,2},{y,-2,2}]
```

   ist genau das gleiche. Außerdem aus $y^2 = x^2$ folgt

$$|y| = \sqrt{y^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

   Analog aus $|y| = |x|$ folgt $y^2 = |y|^2 = |x|^2 = x^2$. D.h. die Relationen sind äquivalent.

   (c) Die grafische Darstellung der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ erscheint oben im Beispiel 1d. Durch Auswertung von $f(x^2) = \sqrt{x^2}$,

$$\begin{array}{rclcrl}
\sqrt{(-2)^2} & = & 2 & = & |-2| & (\neq \pm 2) \\
\sqrt{(-1)^2} & = & 1 & = & |-1| & (\neq \pm 1) \\
\sqrt{(0)^2} & = & 0 & = & |0| & (\neq \pm 0) \\
\sqrt{(+1)^2} & = & 1 & = & |+1| & (\neq \pm 1) \\
\sqrt{(+2)^2} & = & 2 & = & |+2| & (\neq \pm 2)
\end{array}$$

   (d) Man löst $|x| = 1$ durch die stückweise Definition der Betragsfunktion,

$$1 = |x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

   Alle Lösungen

$$\text{mit } x \leq 0: \quad 1 = |x| = -x \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Alle Lösungen

$$\text{mit } x \geq 0: \quad 1 = |x| = x \quad \Rightarrow \quad x = +1$$

Die Gesamtmenge von Lösungen: $x \in \{-1, +1\}$.

Man löst $|x| < 1$ durch die stückweise Definition der Betragsfunktion,

$$1 > |x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Alle Lösungen

$$\text{mit } x \leq 0: \quad 1 > |x| = -x \quad \Rightarrow \quad x > -1 \qquad \text{d.h. } x \in (-1, 0]$$

(Achtung: Der Schritt $(1 > -x)$ zu $(-1 < x)$ durch $\times(-1)$ dreht $(>)$ zum $(<)$.)
Alle Lösungen

$$\text{mit } x \geq 0: \quad 1 > |x| = x \quad \Rightarrow \quad x < +1 \qquad \text{d.h. } x \in [0, +1)$$

Die Gesamtmenge von Lösungen: $x \in (-1, 0] \cup [0, +1) = (-1, +1)$ oder $-1 < x < +1$.

Man löst $|x| > 1$ durch die stückweise Definition der Betragsfunktion,

$$1 < |x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Alle Lösungen

$$\text{mit } x \leq 0: \quad 1 < |x| = -x \quad \Rightarrow \quad x < -1 \qquad \text{d.h. } x \in (-\infty, -1)$$

Alle Lösungen

$$\text{mit } x \geq 0: \quad 1 < |x| = x \quad \Rightarrow \quad x > +1 \qquad \text{d.h. } x \in (+1, +\infty)$$

Die Gesamtmenge von Lösungen: $x \in (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$.

(e) Anhand der letzten Lösung folgen die Lösungen

$$y \in \{-|x|, +|x|\} = \{-x, +x\}$$

aus $|y| = |x|$, wobei für jedes fixiertes x die zwei Mengen gleich sind, obwohl die zwei Elemente nicht notwendigerweise in der selben Reihenfolge sind. Zwei entsprechende Funktionen sind

$$y_1(x) = -x \quad \text{und} \quad y_2(x) = +x$$

(f) Analog wird die Relation $|(x - x_0)/a| = |(y - y_0)/b|$ für die Asymptoten der Hyperbel $(x - x_0)^2/a^2 - (y - y_0)^2/b^2 = 1$ durch die stückweise Definition der Betragsfunktion vereinfacht,

$$|(x - x_0)/a| = |(y - y_0)/b| = \begin{cases} -(y - y_0)/b, & (y - y_0)/b \leq 0 \\ (y - y_0)/b, & (y - y_0)/b \geq 0 \end{cases}$$

Alle Lösungen

$$\text{mit } (y - y_0)/b \leq 0: \quad |(x - x_0)/a| = -(y - y_0)/b \quad \Rightarrow \quad y = y_0 - b|(x - x_0)/a|$$

Alle Lösungen

$$\text{mit } (y - y_0)/b \geq 0: \quad |(x - x_0)/a| = (y - y_0)/b \quad \Rightarrow \quad y = y_0 + b|(x - x_0)/a|$$

Die Gesamtmenge von Lösungen:

$$y \in \left\{ y_0 - b\left|\frac{x-x_0}{a}\right|, y_0 + b\left|\frac{x-x_0}{a}\right| \right\} = \left\{ y_0 - \frac{b}{a}(x-x_0), y_0 + \frac{b}{a}(x-x_0) \right\}$$

wobei für jedes fixierte x diese zwei Mengen gleich sind, obwohl die zwei Elemente nicht notwendigerweise in der selben Reihenfolge sind. Zwei entsprechende Funktionen sind

$$y_1(x) = y_0 - (b/a)(x-x_0), \quad y_2(x) = y_0 + (b/a)(x-x_0)$$

4. Geraden und Betragsfunktionen.

(a) Der Scheitel für $y_1(x) = |x-2| + 3$ befindet sich bei $(2,3)$.

(Da $|x-2| \geq 0$ gilt, folgt $y_1(x) \geq 3$. Da $y_1(2) = 3$ gilt, ist $(2,3)$ eine Tiefstelle für $y_1(x)$.)

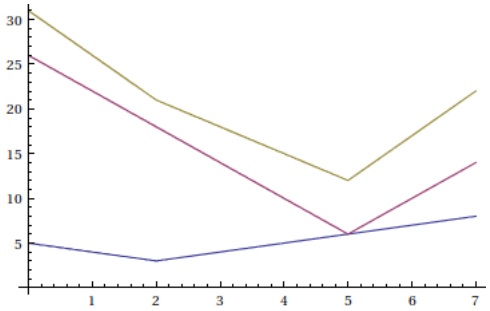
Der Scheitel für $y_2(x) = 4|x-5| + 6$ befindet sich bei $(5,6)$.

(Da $|x-5| \geq 0$ gilt, folgt $y_2(x) \geq 6$. Da $y_1(5) = 6$ gilt, ist $(5,6)$ eine Tiefstelle für $y_2(x)$.)

(b) Der Befehl

```
Plot[{Abs[x - 2] + 3, 4 Abs[x - 5] + 6, Abs[x - 2] + 3 + 4 Abs[x - 5] + 6}, {x, 0, 7}]
```

stellt die Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$ und $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ für $x \in [0,7]$ grafisch dar.



Man merkt den Scheitel $(2,3)$ für $y_1(x)$ in der unteresten Kurve, den Scheitel $(5,6)$ für $y_2(x)$ in der mittleren Kurve und $y(x)$ ist die obereste Kurve mit zwei Knicken, die sie von $y_1(x)$ und $y_2(x)$ erbt.

(c) Die Gerade durch $(0,1)$ und $(2,0)$ hat die Steigung

$$s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

Man wählt den Punkt $(x_0, y_0) = (0,1)$ auf der Gerade aus, und mit der allgemeinen Formel $y = s(x-x_0) + y_0$ wird die Gerade folgendermaßen dargestellt.

$$y = -x/2 + 1$$

(d) Durch die stückweise Definition der Betragsfunktion

$$|X| = \begin{cases} -X, & X \leq 0 \\ X, & X \geq 0 \end{cases}$$

lässt sich $y_1(x)$ so darstellen:

$$y_1(x) = 3 + |x-2| = 3 + \begin{cases} -(x-2), & x-2 \leq 0 \\ (x-2), & x-2 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 3-(x-2), & x \leq 2 \\ 3+(x-2), & x \geq 2 \end{cases}$$

Analog lässt sich $y_2(x)$ so darstellen:

$$y_2(x) = 6 + 4|x-5| = 6 + 4 \begin{cases} -(x-5), & x-5 \leq 0 \\ (x-5), & x-5 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 6-4(x-5), & x \leq 5 \\ 6+4(x-5), & x \geq 5 \end{cases}$$

Die Teilintervalle zwischen den Scheiteln sind $(-\infty, 2]$, $[2, 5]$ und $[5, \infty)$. Bezüglich dieser Teilintervalle lassen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ folgendermaßen so darstellen:

$$y_1(x) = \begin{cases} 3-(x-2), & x \in (-\infty, 2] \\ 3+(x-2), & x \in [2, 5] \\ 3+(x-2), & x \in [5, +\infty) \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} 6-4(x-5), & x \in (-\infty, 2] \\ 6-4(x-5), & x \in [2, 5] \\ 6+4(x-5), & x \in [5, +\infty) \end{cases}$$

(e) Die Summe ist gegeben durch

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = \begin{cases} 31-5x, & x \in (-\infty, 2] \\ 27-3x, & x \in [2, 5] \\ -13+5x, & x \in [5, +\infty) \end{cases}$$

3 Ungleichungen, Polynome, Polynomdivision

3.1 Beispiele

1. Geraden und Ungleichungen:

   (a) Gegeben seien die Punkte $P(1,1)$, $Q(3,2)$ und $R(0,2)$. Bestimmen Sie Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$ und $y_3(x)$, deren Graphen den Geraden durch $P\&Q$, $Q\&R$ bzw. $R\&P$ entsprechen.

   (b) Stellen Sie das Dreieck mit Eckpunkten P, Q und R (i) grafisch im $\mathbb{R}^2$ sowie (ii) als Menge in der Mengennotation (Formeln) dar. Hierbei soll der Rand des Dreiecks in der Menge enthalten sein.

   (c) Stellen Sie das Innere dieses Dreiecks als Menge in der Mengennotation (Formeln) dar.

2. Hyperbeln und Ungleichungen:

   (a) Bestimmen Sie Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$, die erfüllen,

   $$y_1(x)^2 - x^2 = 1 = y_2(x)^2 - x^2, \quad y_1(x) < 0, \quad y_2(x) > 0.$$

   (b) Stellen Sie die Mengen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < y_2(x)\}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > y_1(x)\}$ grafisch dar.

   (c) Stellen Sie die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 < 1\}$ (i) grafisch im $\mathbb{R}^2$ sowie (ii) in der Mengennotation mit y_1 und y_2 dar.

   Hinweis: Zur Kontrolle können Sie den Wolfram Befehl `ContourPlot` probieren:

   ```
   ContourPlot[y^2 - x^2 == 1,{x,-2,2},{y,-2,2}]
   ```

3. Parabeln und Ungleichungen:

   (a) Finden Sie die Nullstellen der Funktion $q(x) = -6 - 4x + 2x^2$.

   (b) Faktorisieren Sie diese Funktion in die Form $q(x) = c(x-x_1)(x-x_2)$ für $c, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

   (c) Anhand dieser Faktorisierung erstellen Sie eine Tabelle mit dem Vorzeichen der jeweiligen Faktoren sowie der Funktion q in den Teilintervallen zwischen Nullstellen.

   (d) Stellen Sie die Funktion grafisch dar.

   (e) Anhand der Tabelle und der Grafik bestimmen Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R} : q(x) < 0\}$.

   Hinweis: Zur Kontrolle können Sie die folgenden Wolfram Befehle probieren:

   ```
   Solve[-6 - 4x + 2x^2 == 0,x]
   Plot[-6 - 4x + 2x^2,{x,-2,4}]
   Reduce[-6 - 4x + 2x^2 < 0,x]
   ```

4. Kubische und Biquadratische Polynome:

   (a) Finden Sie die Nullstellen der Funktion $k(x) = -18x - 3x^2 + 3x^3$, stellen Sie $k(x)$ grafisch dar und anhand der Grafik bestimmen Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R} : k(x) \geq 0\}$.

   (b) Finden Sie die Nullstellen der Funktion $b(x) = -24 - 4x^2 + 4x^4$, stellen Sie $b(x)$ grafisch dar und anhand der Grafik bestimmen Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R} : b(x) < 0\}$.

   Hinweis: Zur Kontrolle können Sie die obigen Wolfram Befehle `Solve`, `Plot` und `Reduce` probieren.

5. Polynomdivision:

   Die zwei Nullstellen $x = -2$ und $x = 3$ des Polynoms $b(x) = -6 - x - 5x^2 - x^3 + x^4$ sei (durch Versuch und Irrtum) gegeben. Daher sind $(x + 2)$ und $(x - 3)$ Faktoren von $b(x)$.

   (a) Führen Sie Polynomdivision durch, um das Polynom $k(x) = b(x)/(x + 2)$ zu bestimmen.

   (b) Führen Sie Polynomdivision durch, um das Polynom $q(x) = k(x)/(x - 3)$ zu bestimmen.

   (c) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $b(x) = (x + 2)k(x) = (x + 2)(x - 3)q(x)$ und stellen Sie $b(x)$ grafisch dar.

   Hinweis: Zur Kontrolle können Sie die folgenden Wolfram Befehle probieren:

```
Simplify[(-6 - x - 5x^2 - x^3 + x^4)/(x + 2)]
Solve[-6 - x - 5x^2 - x^3 + x^4 == 0, x]
Plot[-6 - x - 5x^2 - x^3 + x^4 == 0, {x,-3,4}]
```

3.2 Lösungen

1. Geraden und Ungleichungen:

   (a) Die Steigung durch $P(1,1)$ und $Q(3,2)$ ist

   $$s = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

   und mit der Form $y = s(x - x_0) + y_0$ und dem ausgewählten Punkt $(x_0, y_0) = (1,1)$ ist die Gerade gegeben durch

   $$y_1(x) = \tfrac{1}{2}(x-1) + 1 = (x+1)/2$$

   Die Steigung durch $Q(3,2)$ und $R(0,2)$ ist

   $$s = \frac{2-2}{0-3} = 0$$

   und mit der Form $y = s(x - x_0) + y_0$ und dem ausgewählten Punkt $(x_0, y_0) = (3,2)$ ist die Gerade gegeben durch

   $$y_2(x) = 0(x-3) + 2 = 2$$

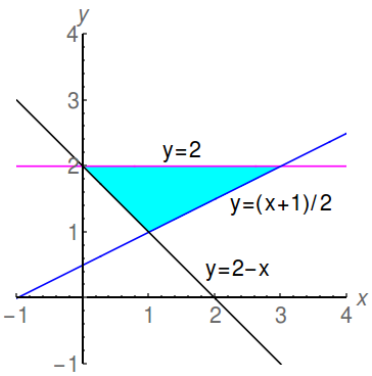
   Die Steigung durch $R(0,2)$ und $P(1,1)$ ist

   $$s = \frac{1-2}{1-0} = -1$$

   und mit der Form $y = s(x - x_0) + y_0$ und dem ausgewählten Punkt $(x_0, y_0) = (0,2)$ ist die Gerade gegeben durch

   $$y_3(x) = -(x-0) + 2 = 2 - x$$

   (b) Die grafische Darstellen des Dreicks ist:

   Die Darstellung des Dreiecks D (inklusive des Randes) in Mengennotation ist

   $$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \le 2\} \quad \cap \\ &\quad\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \ge 2 - x\} \quad \cap \\ &\quad\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \ge (x+1)/2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)/2 \le y \le 2, \ 2 - x \le y \le 2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \le 2, \ 2 - y \le x \le 2y - 1\} \end{aligned}$$

   (c) Die Darstellung des Dreiecks D (exklusive des Randes) in Mengennotation ist

   $$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)/2 < y < 2, \ 2 - x < y < 2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y < 2, \ 2 - y < x < 2y - 1\} \end{aligned}$$

2. Hyperbeln und Ungleichungen:

   (a) Lösungen der Gleichung

$$y^2 - x^2 = 1 \quad \text{oder} \quad y^2 = 1 + x^2 \quad \text{oder} \quad |y| = \sqrt{1+x^2}$$

   sind

$$y \in \{-\sqrt{1+x^2}, \sqrt{1+x^2}\}$$

   Zwei entsprechende Funktionen sind

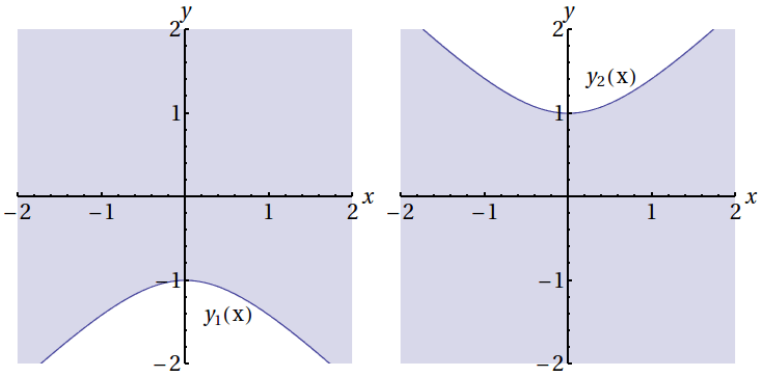
$$y_1(x) = -\sqrt{1+x^2} \quad \text{und} \quad y_2(x) = +\sqrt{1+x^2}$$

   die $y_1(x) < 0$ und $y_2(x) > 0$ erfüllen.

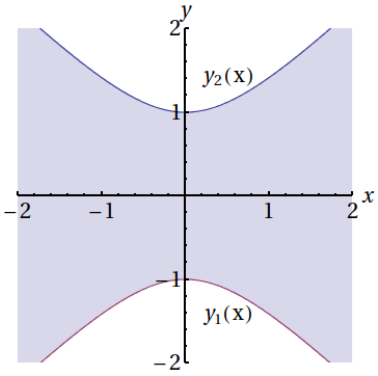
   (b) Die grafische Darstellung der Mengen

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y_1(x) < y\} \quad \text{bzw.} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < y_2(x)\}$$

   sind



   (c) Die grafische Darstellung der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y_2(x) < y < y_1(x)\}$ ist



   Die Ungleichung $-\sqrt{1+x^2} < y < \sqrt{1+x^2}$ ist äquivalent zu

$$|y| < \sqrt{1+x^2} \quad \text{oder} \quad y^2 < 1 + x^2$$

   und daher sind die folgenden Darstellungen der oben grafisch dargestellten Menge äquivalent:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 < 1\} \quad \text{und} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y_1(x) < y < y_2(x)\}$$

3. Parabeln und Ungleichungen:

(a) Die Nullstellen der quadratischen Funktion $q(x) = -6 - 4x + 2x^2$ sind

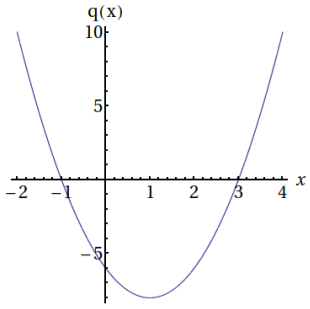
$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{4^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = -1, \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{4^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = +3$$

(b) Es folgt die Faktorisierung $q(x) = 2(x+1)(x-3)$.

(c) Eine Tabelle mit dem Vorzeichen von $q(x)$ und seinen Faktoren in den Teilintervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, +3)$ und $(+3, +\infty)$ ist

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +3)$	$(+3, +\infty)$
2	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x+1)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-3)$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$q(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

(d) Die grafische Darstellung von q ist



(e) Aus der Grafik ist ersichtlich, $q(x) < 0$ gilt für $x \in (-1, 3)$.

4. Kubische und Biquadratische Polynome:

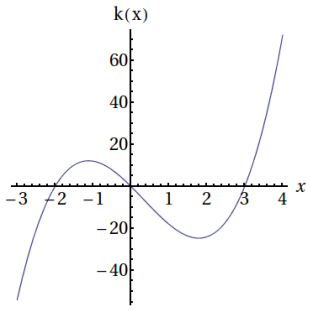
(a) Die Nullstellen des kubischen Polynoms $k(x) = -18x - 3x^2 + 3x^3$ bestimmt man zuerst durch die Faktorisierung,

$$k(x) = xq(x), \quad q(x) = 3x^2 - 3x - 18$$

Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $q(x) = 3x^2 - 3x - 18$ sind

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{3^2 - 4(3)(-18)}}{2(3)} = -2, \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{3^2 - 4(3)(-18)}}{2(3)} = +3$$

Es folgen die Faktorisierungen $q(x) = 3(x+2)(x-3)$ und $k(x) = xq(x) = 3x(x+2)(x-3)$. Die grafische Darstellung von $k(x)$ ist



(b) Die Nullstellen des biquadratischen Polynoms $b(x) = -24 - 4x^2 + 4x^4$ bestimmt man zuerst durch die Darstellung,

$$b(x) = -24 - 4\left(x^2\right) + 4\left(x^2\right)^2 = q(x^2), \quad q(x) = -24 - 4x + 4x^2$$

Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $q(x) = -24 - 4x + 4x^2$ sind

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{4^2 - 4(4)(-24)}}{2(4)} = -2, \quad x_2 = \frac{4 - \sqrt{4^2 + 4(4)(-24)}}{2(4)} = +3$$

Es folgen die Faktorisierungen $q(x) = 4(x+2)(x-3)$ und $b(x) = q(x^2) = 4(x^2 + 2)(x^2 - 3)$. Die Nullstellen des Faktors $x^2 + 2$ sind komplex,

$$x_1 = \frac{0 - \sqrt{0^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-\sqrt{-1}\sqrt{8}}{2} = -\imath\sqrt{2} \quad \text{und} \quad x_2 = +\sqrt{2}\imath$$

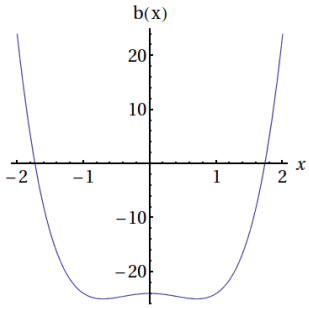
Die Nullstellen des Faktors $x^2 - 3$ sind reel,

$$x_1 = \frac{0 - \sqrt{0^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = -\sqrt{3} \quad \text{und} \quad x_2 = +\sqrt{3}$$

Es ergibt sich dann

$$b(x) = 4(x^2 + 2)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 4(x + \sqrt{2}\imath)(x - \sqrt{2}\imath)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

Die grafische Darstellung von $b(x)$ ist



5. Polynomdivision:

(a) Mit $b(x) = -6 - x - 5x^2 - x^3 + x^4$ ist der Quotient $k(x) = b(x)/(x+2)$ gegeben durch

$$\begin{array}{rrrrrrcrcl}
 & x^4 & -x^3 & -5x^2 & -x & -6 & \div & x+2 & = & x^3 - 3x^2 + x - 3 \\
\ominus & x^4 & +2x^3 & & & & & & & \\
\hline
 & 0 & -3x^3 & -5x^2 & -x & -6 & & & & \\
\ominus & & -3x^3 & -6x^2 & & & & & & \\
\hline
 & & 0 & x^2 & -x & -6 & & & & \\
\ominus & & & x^2 & +2x & & & & & \\
\hline
 & & & 0 & -3x & -6 & & & & \\
\ominus & & & & -3x & -6 & & & & \\
\hline
 & & & & 0 & 0 & & & &
\end{array}$$

oder $k(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$.

(b) Der Quotient $q(x) = k(x)/(x-3)$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{rrrrrcrcl}
 & x^3 & -3x^2 & +x & -3 & \div & x-3 & = & x^2 + 1 \\
\ominus & x^3 & -3x^3 & & & & & & \\
\hline
 & 0 & 0 & x & -3 & & & & \\
\ominus & & & x & -3 & & & & \\
\hline
 & & & 0 & 0 & & & &
\end{array}$$

oder $q(x) = x^2 + 1$.

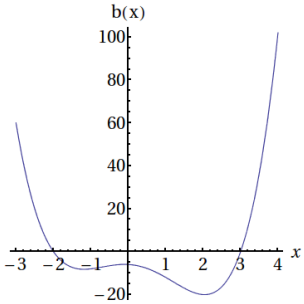
(c) Die Nullstellen von $q(x) = x^2 + 1$ sind komplex,

$$x_1 = \frac{0 - \sqrt{0 - 4(1)(1)}}{2(1)} = -\frac{\sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = -\imath \quad \text{und} \quad x_2 = +\imath$$

Die Faktorisierung

$$b(x) = (x+2)k(x) = (x+2)(x-3)q(x) = (x+2)(x-3)(x^2+1)$$

zeigt, die Nullstellen von $b(x)$ sind $\{-2, 3, -\imath, +\imath\}$. Die grafische Darstellung von $b(x)$ ist



4 Umkehrfunktionen, Rationale, Exp-, Log- und Winkel-Funktionen

4.1 Beispiele

1. Rationale Funktionen:

   (a) Bestimmen Sie die Parameter a, b, x_1, x_2, x_3 und x_4 der rationalen Funktion,

   $$r(x) = \frac{2x^2 + 8x + 8}{x^2 + 4x + 3} = \frac{a(x - x_1)(x - x_2)}{b(x - x_3)(x - x_4)}$$

   Die *Polstellen* sind die Nullstellen des Nenners, die keine Nullstellen des Zählers sind.

   (b) Finden Sie die senkrechten und waagerechten Asymptoten von $r(x)$.

   (c) Anhand der obigen Faktorisierung erstellen Sie eine Tabelle mit dem Vorzeichen der jeweiligen Faktoren in den Teilintervallen zwischen Nullstellen und Polstellen.

   (d) Anhand dieser Tabelle bestimmen Sie ob $r(x)$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt, während x sich an eine Polstelle von links oder von rechts annähert.

   (e) Stellen Sie $r(x)$ grafisch dar.

2. Umkehrfunktionen:

   (a) Stellen Sie die Funktion $y(x) = (x - 1)^4$ grafisch dar, und lesen Sie den Definitionsbereich D und Bildbereich B von der Grafik ab.

   (b) Bestimmen Sie eine maximale Teilmenge $D_y \subset D$, sodass $y(x)$ auf dem (möglicherweise eingeschränkten) Definitionsbereich D_y mit dem entsprechenden Bildbereich $B_y \subset B$ eine Umkehrfunktion $y^{-1}(x)$ besitzt.

   (c) Bestimmen Sie eine Formel für diese Umkehrfunktion $y^{-1}(x)$.

   (d) Stellen Sie die Umkehrfunktion grafisch dar und lesen den Definitionsbereich $D_{y^{-1}}$ und den Bildbereich $B_{y^{-1}}$ von der Grafik ab.

   (e) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen D_y, B_y, $D_{y^{-1}}$ und $B_{y^{-1}}$?

3. Translationen und Streckungen von Funktionen:

   (a) Finden Sie zuerst eine Streckung der Funktion $q(x) = x^2$ und nachher eine Translation dieser Streckung, wobei das Ergebnis mit der quadratischen Funktion $\tilde{q}(x) = 2(x - 3)^2 + 4$ übereinstimmt. Stellen Sie $q(x)$ und $\tilde{q}(x)$ grafisch dar.

   (b) Finden Sie zuerst eine Streckung der Funktion $b(x) = |x|$ und nachher eine Translation dieser Streckung, wobei das Ergebnis mit der Betragsfunktion $\tilde{b}(x) = 2|x - 3| + 4$ übereinstimmt. Schreiben Sie $b(x)$ und $\tilde{b}(x)$ stückweise und stellen Sie diese Funktionen grafisch dar.

4. Exponentielle und Logarithmische Funktionen:

   (a) Stellen Sie die Funktionen $f(x) = e^x$ und $g(x) = \ln(x)$ grafisch dar und lesen Sie D_f, B_f, D_g und B_g aus den Grafiken ab.

   (b) Werten Sie f in den g-Werten im Graphen von g aus, um einen Graphen von $f \circ g$ zu erstellen und dabei bestätigen, es gilt $f(g(x)) = \exp(\ln(x)) = x$ nur für $x \in \mathbb{R}_+$.

   (c) Werten Sie g in den f-Werten im Graphen von f aus, um einen Graphen von $g \circ f$ zu erstellen und dabei bestätigen, es gilt $f(g(x)) = \ln(\exp(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   Bemerkung: Teil (b) bedeutet $D_{f \circ g} = \mathbb{R}_+$ und Teil (c) bedeutet $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$. Weiters gelten $f^{-1} = g$ und $g^{-1} = f$.

5. Exponentielle und Logarithmische Funktionen:

(a) Anhand der Daten $w(0) = 2$ und $w(2) = 1$ bestimmen Sie die Funktion $w(t) = w_0 e^{\lambda t}$.

(b) Eine radioaktive Substanz wird in einem Labor produziert. Nach 1 Jahr bleibt 3 kg der Substanz, und nach 2 Jahren bleibt 1 kg der Substanz. Finden Sie die Halbwertzeit der Substanz.

6. Winkelfunktionen:

(a) Erklären Sie, welche Einschränkungen der Definitionsbereiche der Winkelfunktionen auf Seite 49 im Skriptum dazu führen, dass eine entsprechende Umkehrfunktion definiert werden kann.

(b) Anhand der Eulerschen Formel (auf Seite 64 im Skriptum)

$$e^{\imath\theta} = \cos(\theta) + \imath \sin(\theta), \quad \imath^2 = -1$$

leiten Sie die folgenden Formeln her:

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) &= 1 \\ \tan^2(\theta) + 1 &= \sec^2(\theta) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cos(\theta \pm \phi) &= \cos(\theta)\cos(\phi) \mp \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta \pm \phi) &= \cos(\theta)\cos(\phi) \pm \sin(\theta)\sin(\phi) \end{aligned}$$

4.2 Lösungen

1. Rationale Funktionen:

   (a) Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $2x^2 + 8x + 8$ sind

   $$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{8^2 - 4(2)(8)}}{2(2)} = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-8 + \sqrt{8^2 - 4(2)(8)}}{2(2)} = -2$$

   d.h. die Nullstelle $x_1 = x_2 = -2$ hat Multiplizität 2. Es folgt die Faktorisierung $2x^2 + 8x + 8 = 2(x + 2)^2$. Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $x^2 + 4x + 3$ sind

   $$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4(1)(3)}}{2(2)} = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4(1)(3)}}{2(2)} = -1$$

   und es folgt die Faktorisierung $x^2+4x+3 = (x+3)(x+1)$. Daher ist die Faktorisierung der rationalen Funktion gegeben durch

   $$r(x) = \frac{2x^2 + 8x + 8}{x^2 + 4x + 3} = \frac{2(x + 2)^2}{(x + 3)(x + 1)}$$

   (b) Anhand der Polstellen der rationalen Funktion sind die senkrechten Asymptoten gegeben durch die senkrechten Geraden $x = -3$ und $x = -1$. Da $1/x^k \to 0$ für $k > 0$ und $|x| \to \infty$ gilt, ist die waagerechte Asymptote gegeben durch

   $$r(x) = \frac{2x^2 + 8x + 8}{x^2 + 4x + 3}\left(\frac{x^{-2}}{x^{-2}}\right) = \frac{2+8/x + 8/x^2}{1+4/x + 3/x^2} \to \frac{2}{1} = 2, \quad |x| \to \infty$$

   oder $y = 2$. Hier ist $(x^{-2}/x^{-2}) = 1$ stategisch ausgewählt worden, wobei die Potenz (-2) der höchsten Potenz $(+2)$ des Zählers und des Nenners entspricht.

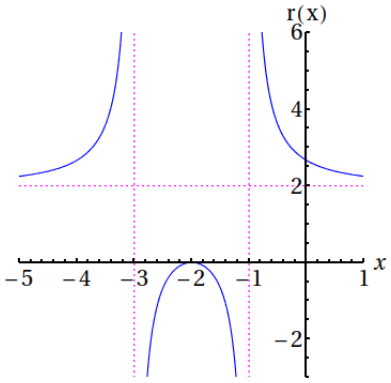
   (c) Die Tabelle mit dem Vorzeichen der Funktion $r(x)$ und ihren Faktoren in den Teilintervallen $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, -1)$ und $(-1, +\infty)$ ist

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, +\infty)$
2	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x + 2)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x + 3)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x + 1)$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$r(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$

   (d) Anhand des Vorzeichens der rationalen Funktion in den jeweiligen Teilintervallen gelten

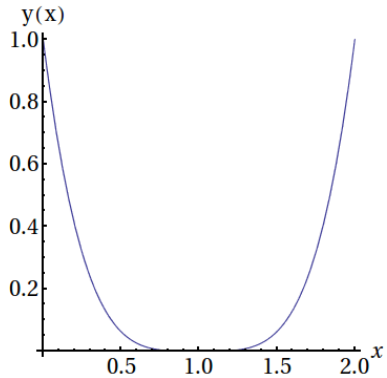
   $$\begin{array}{llll} r(x) \to +\infty & \text{wenn } x \to -3^- & \text{d.h. links von} & -3 \\ r(x) \to -\infty & \text{wenn } x \to -3^+ & \text{d.h. rechts von} & -3 \\ r(x) \to -\infty & \text{wenn } x \to -1^- & \text{d.h. links von} & -1 \\ r(x) \to +\infty & \text{wenn } x \to -1^+ & \text{d.h. rechts von} & -1 \end{array}$$

   (e) Die grafische Darstellung von $r(x)$ ist



2. Umkehrfunktionen:

(a) Die grafische Darstellung von $y(x) = (x-1)^4$ ist

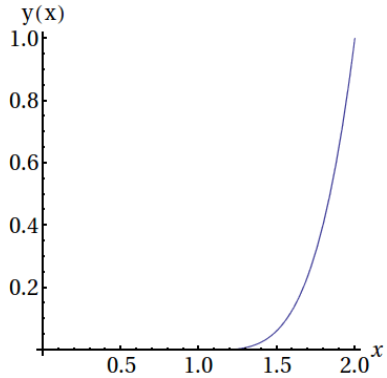


wobei $D = \mathbb{R}$ und $B = [0, +\infty)$ in der Grafik ersichtlich sind.

(b) Wenn D eingeschränkt wird auf

$$D_y = [1, +\infty)$$

hat y den Graphen,



der die Bedingung erfüllt, dass jede waagerechte Gerade höchstens einmal den Graphen trifft. Eine andere mögliche Einschränkung wäre $(-\infty, 1]$, und diese beiden Möglichkeiten sind maximal, da die Bedingung einer Umkehrfunktion verletzt wird, wenn die Mengen vergrößert werden. Anhand der obigen Grafik ist der Bildbereich

$$B_y = [0, +\infty)$$

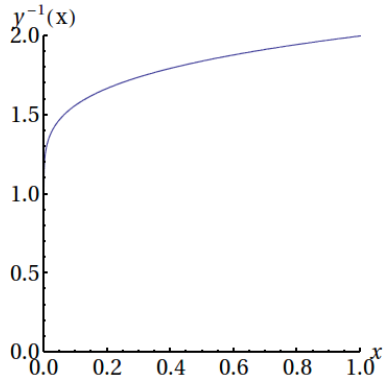
(c) Die Umkehrfunktion $y^{-1}(x)$ erfüllt

$$x = y(y^{-1}(x)) = (y^{-1}(x) - 1)^4$$

Da die rechte Seite nicht negativ ist, darf der vierte Wurzel von beiden Seiten gezogen werden, und es folgt

$$\sqrt[4]{x} = y^{-1}(x) - 1 \quad \text{oder} \quad y^{-1}(x) = 1 + \sqrt[4]{x}$$

(d) Die grafische Darstellung von $y^{-1}(x)$ ist



Wie in der Grafik ersichtlich ist, gelten $D_{y^{-1}} = [0, +\infty)$ und $B_{y^{-1}} = [1, +\infty)$.

(e) Es gelten (notwendigerweise) $D_y = B_{y^{-1}}$ und $B_y = D_{y^{-1}}$.

3. Translationen und Streckungen von Funktionen:

(a) Mit der Streckung S der Funktion $q(x) = x^2$

$$S(x) = q(\sqrt{2}x) = 2x^2$$

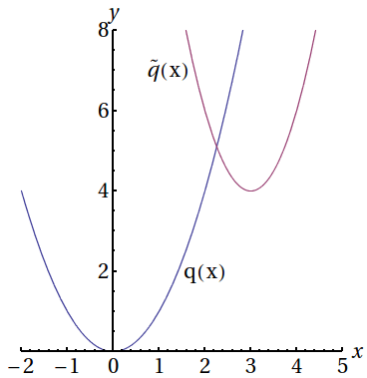
und der Translation T dieser Streckung

$$T(x) - 4 = S(x-3), \quad T(x) = 2(x-3)^2 + 4$$

ergibt sich durch $\tilde{q}(x) = T(x)$ die Funktion

$$\tilde{q}(x) = 2(x-3)^2 + 4$$

Die grafische Darstellung von $q(x)$ zusammen mit $\tilde{q}(x)$ ist



(b) Mit der Streckung S der Funktion $b(x) = |x|$

$$S(x) = b(2x) = 2|x|$$

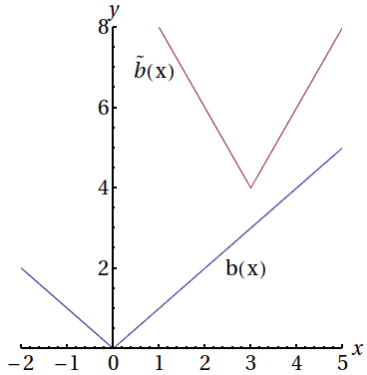
und der Translation T dieser Streckung

$$T(x) - 4 = S(x-3), \quad T(x) = 2|x-3| + 4$$

ergibt sich durch $\tilde{b}(x) = T(x)$ die Funktion

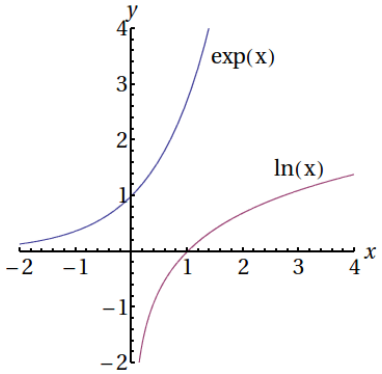
$$\tilde{b}(x) = 2|x-3| + 4$$

Die grafische Darstellung von $b(x)$ zusammen mit $\tilde{b}(x)$ ist



4. Exponentielle und Logarithmische Funktionen:

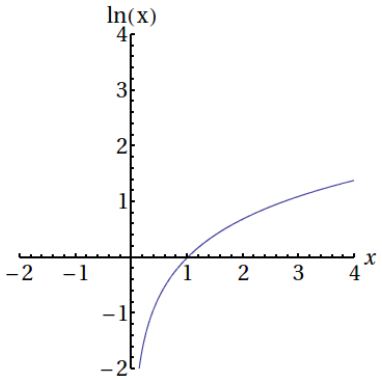
   (a) Grafische Darstellungen von $f(x) = \exp(x)$ und $g(x) = \ln(x)$ sind



   Wie in der Grafik ersichtlich ist, es gelten

$$D_f = \mathbb{R}, \quad B_f = \mathbb{R}_+, \quad D_g = \mathbb{R}_+, \quad B_g = \mathbb{R}$$

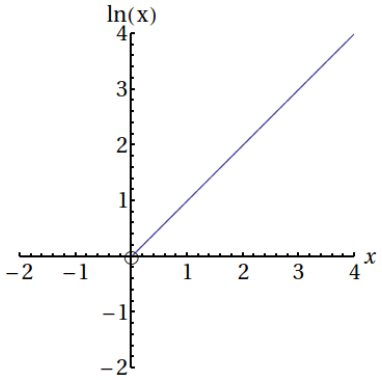
   (b) Man wertet $f(x) = e^x$ in den Werten des folgenden Graphen aus,



   z.B.

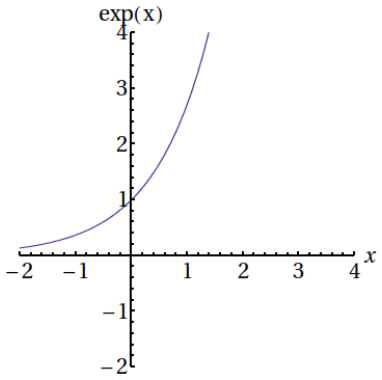
x	≤ 0	$\to 0^+$	1	2	3	$\cdots$	n
$g(x)$	?	$\to -\infty$	0	$\ln(2)$	$\ln(3)$	$\cdots$	$\ln(n)$
$f(g)$	?	$\to 0^+$	1	2	3	$\cdots$	n

   und diese Auswertungen können folgendermaßen grafisch dargestellt werden,



d.h. $f(g(x)) = x$ für alle $x > 0$.

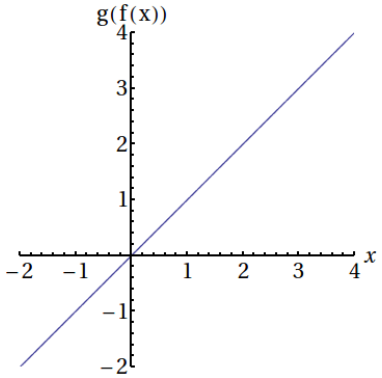
(c) Man wertet $g(x) = \ln(x)$ in den Werten des folgenden Graphen aus,



z.B.

x	$\to -\infty$	$-n$	$\cdots$	-1	0	$+1$	$\cdots$	n
$f(x)$	$\to 0^+$	e^{-n}	$\cdots$	e^{-1}	1	e^{+1}	$\cdots$	e^n
$g(f)$	$\to -\infty$	$-n$	$\cdots$	-1	0	$+1$	$\cdots$	n

und diese Auswertungen können folgendermaßen grafisch dargestellt werden,



d.h. $g(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

5. Exponentielle und Logarithmische Funktionen:

(a) Durch die Daten $w(0) = 2$ und $w(2) = 1$ ergibt sich ein System von Gleichungen für die Unbekannten der Funktion $w(t) = w_0 e^{\lambda t}$,

$$2 = w(0) = w_0 e^{\lambda \cdot 0} = w_0, \quad 1 = w(2) = w_0 e^{\lambda \cdot 2} = 2e^{2\lambda}$$

wobei $w_0 = 2$ von der ersten Gleichung schon in der zweiten Gleichung verwendet worden ist, d.h. es bleibt nur λ zu bestimmen. Man dividiert die zweite Gleichung

durch 2 und wertet $\ln(\cdot)$ in den beiden Seiten aus,

$$\ln(2^{-1}) = \ln(1/2) = \ln(e^{2\lambda}) = 2\lambda$$

wobei die letzte Gleichung aus $\ln(e^x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, (vgl. Beispiel 4b) folgt. Der Parameter λ ist dann

$$\lambda = \frac{1}{2}\ln(2^{-1}) = -\frac{1}{2}\ln(2)$$

wobei die Eigenschaft $\ln(A^p) = p\ln(A)$ verwendet worden ist. Auch mit dieser Eigenschaft folgt

$$\lambda t = -\frac{1}{2}\ln(2)t = -\ln(2)t/2 = (-t/2)\ln(2) = \ln(2^{-t/2})$$

Also mit $w_0 = 2$ und $\lambda = -\frac{1}{2}\ln(2)$ folgt

$$w(t) = w_0 e^{\lambda t} = 2e^{\ln(2^{-t/2})} = 2 \cdot 2^{-t/2} = 2^{1-t/2}$$

wobei die Eigenschaft $e^{\ln(x)} = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, (vgl. Beispiel 4c) verwendet worden ist.

(b) Sei $r(t) = r_0 e^{\mu t}$ die zu bestimmende Exponentialfunktion. Durch die gegebenen Daten $r(1) = 3$ und $r(2) = 1$ ergibt sich ein System von Gleichungen für die Unbekannten,

$$3 = r(1) = r_0 e^{\mu \cdot 1}, \quad 1 = r(2) = r_0 e^{\mu \cdot 2}$$

Man löst nach r_0 in den beiden Gleichungen auf,

$$r_0 = \frac{3}{e^{\mu}} = \frac{1}{e^{2\mu}} \quad \text{oder} \quad e^{\mu} = \frac{1}{3}$$

Man wertet $\ln(\cdot)$ in den beiden Seiten der letzten Gleichung aus,

$$\mu = \ln(e^{\mu}) = \ln(1/3)$$

wobei die Eigenschaft $\ln(e^x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, (vgl. Beispiel 4c) verwendet worden ist. Es folgt

$$3 = r(1) = r_0 e^{\mu} = r_0 e^{\ln(1/3)} = r_0/3 \quad \text{oder} \quad r_0 = 9$$

wobei die Eigenschaft $e^{\ln(x)} = x$, $\forall x > 0$, (vgl. Beispiel 4b) verwendet worden ist. Schließlich gilt

$$r(t) = r_0 e^{\mu t} = 9e^{\ln(1/3)t} = 9e^{t\ln(3^{-1})} = 9e^{\ln(3^{-t})} = 9 \cdot 3^{-t}$$

wobei die Eigenschaft $\ln(A^p) = p\ln(A)$ verwendet worden ist. Die Halbwertzeit $\hat{t}$ erfüllt

$$9 = r_0 = r(0) = 2r(\hat{t}) = 2 \cdot [9 \cdot 3^{-\hat{t}}]$$

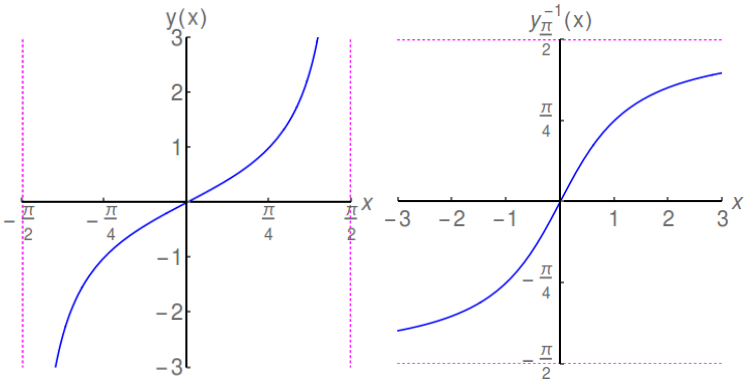
Man dividiert durch 18 und wertet $\ln(\cdot)$ in den beiden Seiten aus,

$$-\ln(2) = \ln(2^{-1}) = \ln(1/2) = \ln(3^{-\hat{t}}) = -\hat{t}\ln(3)$$

wobei die Eigenschaft $\ln(A^p) = p\ln(A)$ verwendet worden ist. Schließlich ist die Halbwertzeit gegeben durch die letzte Gleichung: $\hat{t} = \ln(2)/\ln(3)$.

6. Winkelfunktionen:

(a) Der Graph einer Umkehr<u>funktion</u> muss die Eigenschaft besitzen, dass jede senkrechte Gerade ihren Graphen höchstens einmal trifft. Daher muss der Graph der umzukehrenden Funktion die Eigenschaft besitzen, dass jede waagerechte Gerade ihren Graphen höchstens einmal trifft. Dies ist für jeden Graphen auf Seite 49 im Skriptum nicht der Fall. Beispielsweise kann man die Winkelfunktion $y(x) = \tan(x)$ mit dem Definitionsbereich $D_y = (-\pi/2, +\pi/2)$ und Bildbereich $B_y = \mathbb{R}$ so einschränken,



dass eine Umkehrfunktion $y^{-1}(x) = \arctan(x) = \tan^{-1}(x)$ mit dem Definitionsbereich $D_{y^{-1}} = B_y = \mathbb{R}$ und dem Bildbereich $B_{y^{-1}} = D_y = (-\pi/2, +\pi/2)$ existiert. Andere Einschränkungen sind natürlich möglich, z.B. mit dem Definitionsbereich $(\pi/2, 3\pi/2)$ erfüllt $\tan(x)$ die Eigenschaft, dass jede waagerechte Gerade die Grafik höchstens einmal trifft. Jedoch wird die hier grafisch dargestellte Einschränkung $D_y = (-\pi/2, +\pi/2)$ verwendet, um die bekannte Funktion $\arctan(x)$ auf Seite 87 im Skriptum zu definieren.

Analog kann man $\cos(x)$ auf dem Definitionsbereich $[0, \pi]$ und $\sin(x)$ auf dem Definitionsbereich $[-\pi/2, +\pi/2]$ einschränken, um die bekannten Umkehrfunktionen $\arccos(x)$ bzw. $\arcsin(x)$ auf Seite 87 im Skriptum zu definieren. Andere Einschränkungen sind für $\cos(x)$ und $\sin(x)$ ebenfalls möglich, damit jede waagerechte Gerade die entsprechende Grafik höchstens einmal trifft, aber alle auf Seite 87 im Skriptum ersichtlichen Einschränkungen sind standard und genauso in Rechnern programmiert.

(b) Mit der Eulerischen Formel

$$e^{\imath\theta} = \cos(\theta) + \imath \sin(\theta), \quad \imath^2 = -1$$

folgt aus (den vom Einheitskreis ersichtlichen Eigenschaften) $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ und $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$,

$$e^{-\imath\theta} = \cos(\theta) - \imath \sin(\theta).$$

Man summiert oder subtrahiert die letzten zwei Gleichungen und bekommt

$$e^{+\imath\theta} + e^{-\imath\theta} = 2\cos(\theta), \quad e^{+\imath\theta} - e^{-\imath\theta} = 2\imath \sin(\theta)$$

d.h. die Formeln auf Seiten 64 und 84 im Skriptum,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{+\imath\theta} + e^{-\imath\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{+\imath\theta} - e^{-\imath\theta}}{2i}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) &= \frac{e^{2\imath\theta} + 2e^{\imath\theta}e^{-\imath\theta} + e^{-2\imath\theta}}{4} + \frac{e^{2\imath\theta} - 2e^{\imath\theta}e^{-\imath\theta} + e^{-2\imath\theta}}{-4} \\ &= \frac{1}{4}\left[\left(e^{2\imath\theta} + 2 + e^{-2\imath\theta}\right) - \left(e^{2\imath\theta} - 2 + e^{-2\imath\theta}\right)\right] = 1. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$1 + \tan^2(\theta) = \frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{1}{\cos^2(\theta)} = \sec^2(\theta).$$

Auch mit der Eulerischen Formel folgt für den Winkel $\theta + \phi$,

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \phi) + \imath \sin(\theta + \phi) &= e^{\imath(\theta+\phi)} = e^{\imath\theta}e^{\imath\phi} \\ &= [\cos(\theta) + \imath \sin(\theta)][\cos(\phi) + \imath \sin(\phi)] \\ &= \cos(\theta)\cos(\phi) + \imath \cos(\theta)\sin(\phi) + \imath \sin(\theta)\cos(\phi) + \imath^2 \sin(\theta)\sin(\phi) \\ &= [\cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)] + \imath[\cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi)] \end{aligned}$$

oder

$$[\cos(\theta+\phi) - \cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi)] = \\ \imath[\cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta+\phi)].$$

Widerspřuchlicherweise ist die linke Seite reel und die rechte Seite imaginär, und daher sind die beiden Seiten Null, d.h.

$$\begin{aligned} \cos(\theta+\phi) &= \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta+\phi) &= \cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi). \end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man

$$\begin{aligned} \cos(\theta-\phi) &= \cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta-\phi) &= \cos(\theta)\sin(\phi) - \sin(\theta)\cos(\phi). \end{aligned}$$

Diese Formeln werden oft so zusammengefasst,

$$\begin{aligned} \cos(\theta\pm\phi) &= \cos(\theta)\cos(\phi) \mp \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta\pm\phi) &= \cos(\theta)\sin(\phi) \pm \sin(\theta)\cos(\phi). \end{aligned}$$

wie auf Seiten 74 und 104 im Skriptum gesehen.

5 Stetigkeit, Grenzwerte, Flächeninhalt, Steigung

5.1 Beispiele

1. Nicht stetige Funktionen:

   (a) Zeigen Sie folgendermaßen, die Funktion $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig: Wählen Sie x-Werte (d.h. $x_1, x_2, \dots$) strategisch aus, die sich an $x_0 = 0$ annähern, während $f(x)$ (d.h. $f(x_1), f(x_2), \dots$) sich nicht an $f(0) = 0$ annähert.

   (b) Zeigen Sie folgendermaßen, die Funktion $g(x) = \sin(1/x)$, $g(0) = 0$, ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig: Wählen Sie x-Werte (d.h. $x_1, x_2, \dots$) strategisch aus, die sich an $x_0 = 0$ annähern, während $g(x)$ (d.h. $g(x_1), g(x_2), \dots$) sich nicht an $g(0) = 0$ annähert.

   (c) Zeigen Sie folgendermaßen, die Funktion $y(x) = 1/x$, $y(0) = 0$, ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig: Wählen Sie x-Werte (d.h. $x_1, x_2, \dots$) strategisch aus, die sich an $x_0 = 0$ annähern, während $y(x)$ (d.h. $y(x_1), y(x_2), \dots$) sich nicht an $y(0) = 0$ annähert.

2. Grenzwerte durch Komposition:

   (a) Nützen Sie die Eigenschaften, dass $1/x^k \to 0$ gilt für $k > 0$ und $|x| \to \infty$, um den Grenzwert zu bestimmen:

   $$\lim_{x\to+\infty} r(x), \quad r(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1}$$

   (b) Nützen Sie die Stetigkeit einer Logarithmusfunktion aus und bestimmen Sie den Grenzwert

   $$\lim_{x\to 1} g(x), \quad g(x) = \ln(x)$$

   (c) Anhand der letzten zwei Grenzwerte bestimmen Sie den Grenzwert

   $$\lim_{x\to+\infty} g(r(x))$$

   Bestätigen Sie Ihr Ergebnis durch Auswertung der Funktion $g(r(x))$ in immer größeren x-Werten.

   (d) Wiederholen Sie diese Schritte ((a) bis (c)) für $f(x) = \exp(1/x)$, um die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ und $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ zu bestimmen. Betrachten Sie hierfür die Komposition $f(x) = y(s(x))$ mit $y(x) = \exp(x)$ und $s(x) = 1/x$.

3. Grenzwerte von Summen und Differenzenquotienten:

   (a) Bestimmen Sie die Grenzwerte

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3$$

   Hinweis: Verwenden Sie die Summenformeln ($\sum_{i=1}^{n} i^k = \cdots$, $k = 1, 2, \dots$) im Skriptum, um jede Summe bezüglich einer rationalen Funktion von n umzuschreiben.

   (b) Bestimmen Sie die Grenzwerte

   $$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{(1+h) - 1} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{(1+h) - 1}$$

   Hinweis: Verwenden Sie eine algebraische Formel ($(a^n - b^n) = (a - b)(\cdots)$ bzw. $(a - b) = (a^n - b^n)/(\cdots)$) im Skriptum, um in jedem Differenzenquotienten einen gemeinsamen Faktor im Zähler und im Nenner zu kürzen. Anschließend nützen Sie die Stetigkeit der sich ergebenden Funktion aus.

4. Flächeninhalt als Grenzwert:

   Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_i = i/n$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.

   (a) Mit $y(x) = x$ bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $[x_{i-1}, x_i] \times [0, y(x_i)]$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

   (b) Bestimmen Sie den gesamten Flächeninhalt der n Vierecke aus Teil (a).

   (c) Bestimmen Sie den Grenzwert dieser Summe für $n \to \infty$.

   Hinweis: Sehen Sie die erste Summe im Beispiel 3a. Der Grenzwert ist der Flächeninhalt $(1/2)$ des Dreiecks mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$.

   (d) Wiederholen Sie diese Schritte für $f(x) = x^3$. Hinweis: Sehen Sie die zweite Summe im Beispiel 3a.

5. Steigung als Grenzwert:

   (a) Für die Funktion $y(x) = x^3$ bestimmen Sie die Steigung einer Sekante durch die Punkte $(1, y(1))$ und $(1 + h, y(1 + h))$.

   (b) Vereinfachen Sie die Steigung der Sekante und bestimmen Sie ihren Grenzwert für $h \to 0$.

   Hinweis: Sehen Sie den ersten Differenzenquotienten im Beispiel 3b. Der Grenzwert ist die Steigung $(1/2)$ der Tangente an der Stelle $x = 1$.

   (c) Wiederholen Sie diese Schritte für $f(x) = \sqrt{x}$. Hinweis: Sehen Sie den zweiten Differenzenquotienten im Beispiel 3b.

5.2 Lösungen

1. Nicht stetige Funktionen:

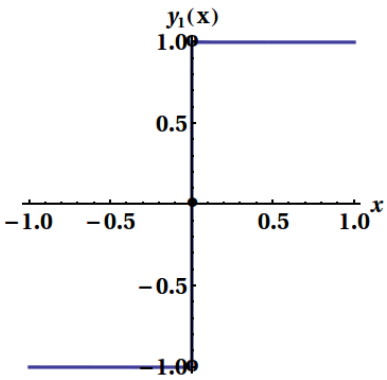
   (a) Man zeigt, $y_1(x) = \text{sign}(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig. Wenn die Funktion in $x_0 = 0$ stetig wäre, müsste $y_1(x)$ sich an den Wert $y_1(x_0) = 0$ annähern, wenn x in einer *beliebigen* Weise sich an $x_0 = 0$ annähern würde. Wenn man nur *eine* Verletzung dieser Eigenschaft entdeckt, dann ist die Funktion nicht stetig. Man sieht solche Verletzungen folgendermaßen, zuerst von rechts und dann von links.

   Für die x-Werte

   $$x_1 = 1, \quad x_2 = \tfrac{1}{2}, \quad x_3 = \tfrac{1}{3}, \quad \ldots \qquad x_k = \tfrac{1}{k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

   die sich an $x_0 = 0$ von rechts annähern, gelten

   $$\begin{aligned} y_1(x_1) &= \text{sign}(1) = 1 \\ y_1(x_2) &= \text{sign}(\tfrac{1}{2}) = 1 \\ y_1(x_3) &= \text{sign}(\tfrac{1}{3}) = 1 \\ &\vdots \\ y_1(x_k) &= \text{sign}(\tfrac{1}{k}) = 1 \\ &\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0 = y_1(0) \end{aligned}$$

   und die entsprechenden y_1-Werte nähern sich nicht an $y_1(x_0) = 0$!

   Auch für die x-Werte

   $$x_1 = -1, \quad x_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad x_3 = -\tfrac{1}{3}, \quad \cdots, \qquad x_k = -\tfrac{1}{k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

   die sich an $x_0 = 0$ von links annähern, gelten

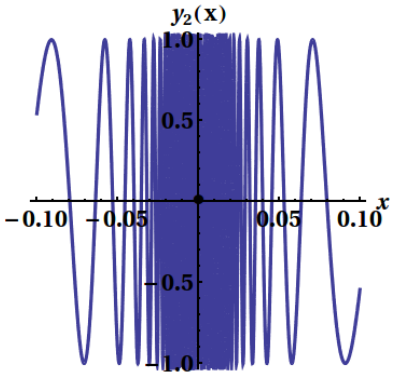
   $$\begin{aligned} y_1(x_1) &= \text{sign}(-1) = -1 \\ y_1(x_2) &= \text{sign}(-\tfrac{1}{2}) = -1 \\ y_1(x_3) &= \text{sign}(-\tfrac{1}{3}) = -1 \\ &\vdots \\ y_1(x_k) &= \text{sign}(-\tfrac{1}{k}) = -1 \\ &\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -1 \neq 0 = y_1(0) \end{aligned}$$

   und die entsprechenden y_1-Werte nähern sich nicht an $y_1(x_0) = 0$!

   (b) Man zeigt, $y_2(x) = \sin(1/x)$, $g(0) = 0$, ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig. Wenn die Funktion in $x_0 = 0$ stetig wäre, müsste $y_2(x)$ sich an den Wert $y_2(x_0) = 0$ annähern, wenn x in einer *beliebigen* Weise sich an $x_0 = 0$ annähern würde. Wenn man nur *eine* Verletzung dieser Eigenschaft entdeckt, dann ist die Funktion nicht stetig. Man sieht solche Verletzungen folgendermaßen, zuerst von rechts und dann von links.

Für die x-Werte

$$x_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi}, \quad x_2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+4\pi}, \quad x_3 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+6\pi}, \quad \ldots \qquad x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$



die sich an $x_0 = 0$ von rechts annähern, gelten

$$\begin{aligned}
y_2(x_1) &= \sin(1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi}) = \sin(\tfrac{\pi}{2}+2\pi) = 1\\
y_2(x_2) &= \sin(1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+4\pi}) = \sin(\tfrac{\pi}{2}+4\pi) = 1\\
y_2(x_3) &= \sin(1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+6\pi}) = \sin(\tfrac{\pi}{2}+6\pi) = 1\\
&\vdots\\
y_2(x_k) &= \sin(1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}) = \sin(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi) = 1\\
&\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0 = y_2(0)
\end{aligned}$$

und die entsprechenden y_2-Werte nähern sich nicht an $y_2(x_0) = 0$!

Auch für die x-Werte

$$x_1 = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi}, \quad x_2 = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}+4\pi}, \quad x_3 = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}+6\pi}, \cdots, \qquad x_k = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

die sich an $x_0 = 0$ von links annähern, gelten

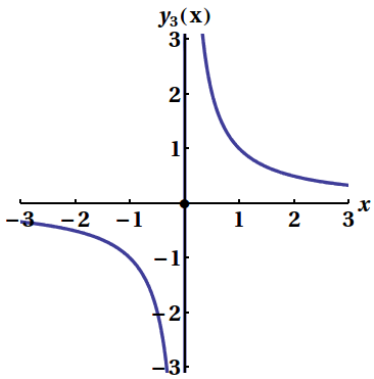
$$\begin{aligned}
y_2(x_1) &= \sin(-1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi}) = \sin(-\tfrac{\pi}{2}-2\pi) = -1\\
y_2(x_2) &= \sin(-1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+4\pi}) = \sin(-\tfrac{\pi}{2}-4\pi) = -1\\
y_2(x_3) &= \sin(-1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+6\pi}) = \sin(-\tfrac{\pi}{2}-6\pi) = -1\\
&\vdots\\
y_2(x_k) &= \sin(-1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}) = \sin(-\tfrac{\pi}{2}-2k\pi) = -1\\
&\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -1 \neq 0 = y_2(0)
\end{aligned}$$

und die entsprechenden y_2-Werte nähern sich nicht an $y_2(x_0) = 0$!

(c) Man zeigt, $y(x) = 1/x$, $y(0) = 0$, ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig. Wenn die Funktion in $x_0 = 0$ stetig wäre, müsste $y(x)$ sich an den Wert $y(x_0) = 0$ annähern, wenn x in einer *beliebigen* Weise sich an $x_0 = 0$ annähern würde. Wenn man nur *eine* Verletzung dieser Eigenschaft entdeckt, dann ist die Funktion nicht stetig. Man sieht solche Verletzungen folgendermaßen, zuerst von rechts und dann von links.

Für die x-Werte

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \tfrac{1}{2}, \quad x_3 = \tfrac{1}{3}, \quad \ldots \qquad x_k = \tfrac{1}{k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$



die sich an $x_0 = 0$ von rechts annähern, gelten

$$\begin{aligned}
y(x_1) &= 1/1 = 1\\
y(x_2) &= 1/\tfrac{1}{2} = 2\\
y(x_3) &= 1/\tfrac{1}{3} = 3\\
&\vdots\\
y(x_k) &= 1/\tfrac{1}{k} = k\\
&\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 0 = y(0)
\end{aligned}$$

und die entsprechenden y-Werte nähern sich nicht an $y(x_0) = 0$!

Auch für die x-Werte

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad x_3 = -\tfrac{1}{3}, \ldots \qquad x_k = \tfrac{1}{k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

die sich an $x_0 = 0$ von rechts annähern, gelten

$$\begin{aligned} y(x_1) &= -1/1 = -1 \\ y(x_2) &= -1/\tfrac{1}{2} = -2 \\ y(x_3) &= -1/\tfrac{1}{3} = -3 \\ &\vdots \\ y(x_k) &= -1/\tfrac{1}{k} = -k \\ &\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \neq 0 = y(0) \end{aligned}$$

und die entsprechenden y-Werte nähern sich nicht an $y(x) = 0$!

2. Grenzwerte durch Komposition:

   (a) Anhand der Eigenschaften $1/x \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $1/x^2 \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ folgt für $r(x) = (x^2+x+1)/(x^2-x-1)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\left(\frac{x^{-2}}{x^{-2}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1+1/x+1/x^2}{1-1/x-1/x^2} = 1$$

   (b) Da $\ln(x)$ stetig auf $D = \mathbb{R}_+$ ist, folgt für $g(x) = \ln(x)$

$$\lim_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$$

   (c) Durch die Kombination der letzten zwei Ergebnisse folgt für die Komposition $g(r(x))$

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\right) = \lim_{r\to 1} \ln(r) = \ln(1) = 0.$$

   Weiters sieht man von den Auswertungen,

x	10	100	1000	10000
$r(x)$	≈ 1.25	≈ 1.02	≈ 1.002	≈ 1.0002
$g(r(x))$	≈ 0.22	≈ 0.02	≈ 0.002	≈ 0.0002

   die Komposition $g(r(x))$ nähert sich an den Wert 0, während x immer größer wird, d.h. sich (mindestens durch die hier ausgewählten Werte) an ∞ annähert.

   (d) Anhand der Eigenschaften, $1/x \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ und $1/x \overset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$ folgen die uneigentlichen Grenzwerte für $s(x) = 1/x$

$$\lim_{x\to 0^-} 1/x = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^+} 1/x = +\infty$$

   Anhand der Eigenschaften $a^x \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $(a > 1)$ und $a^x \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ $(a > 1)$ folgen für $y(x) = \exp(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$$

   Durch die Kombination der letzten zwei Ergebnisse folgen für die Komposition $f(x) = y(s(x))$

$$\lim_{x\to 0^-} \exp(1/x) = \lim_{s\to-\infty} \exp(s) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^+} \exp(1/x) = \lim_{s\to+\infty} \exp(s) = +\infty$$

   Weiters sieht man von den Auswertungen,

x	-1	-0.1	-0.01	-0.001
$s(x)$	-1	-10	-100	-1000
$y(s(x))$	≈ 0.37	$\approx 10^{-5}$	$\approx 10^{-44}$	$\approx 10^{-435}$

die Komposition $f(x) = y(s(x))$ nähert sich an den Wert 0, während x sich (mindestens durch die hier ausgewählten Werte) an den Wert 0 von links annähert. Man sieht von den Auswertungen,

x	1	0.1	0.01	0.001
$s(x)$	1	10	100	1000
$y(s(x))$	≈ 2.72	$\approx 10^4$	$\approx 10^{43}$	$\approx 10^{434}$

die Komposition $f(x) = y(s(x))$ wird immer größer, d.h. nähert sich an $+\infty$, während x sich (mindestens durch die hier ausgewählten Werte) an den Wert 0 von rechts annähert.

3. Grenzwerte von Summen und Differenzenquotienten:

   (a) Anhand der Summenformeln auf Seite 70 im Skriptum gelten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} \left(\frac{n^{-2}}{n^{-2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{2} = \frac{1}{2}$$

   und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+2n^3+n^2}{4n^4} \left(\frac{n^{-4}}{n^{-4}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2/n+1/n^2}{4} = \frac{1}{4}$$

   (b) Anhand der algebraischen Formeln

$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

   und (äquivalent)

$$(a-b) = \frac{(a^n - b^n)}{(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

   gelten

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{(1+h)-1} = \lim_{h\to 0} \frac{[(1+h)-1][(1+h)^2 + (1+h) + 1]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h[(1+h)^2 + (1+h) + 1]}{h} = \lim_{h\to 0} [(1+h)^2 + (1+h) + 1] = 3$$

   und

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{(1+h)-1} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{1+h})^2 - (\sqrt{1})^2}{h[\sqrt{1+h} + \sqrt{1}]} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h[\sqrt{1+h} + \sqrt{1}]} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

4. Flächeninhalt als Grenzwert:

   Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_i = i/n$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.

   (a) Mit $y(x) = x$ ist der Flächeninhalt des Vierecks $[x_{i-1}, x_i] \times [0, y(x_i)]$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$(x_i - x_{i-1}) \times (y(x_i) - 0) = \frac{1}{n} \times x_i = \frac{1}{n} \times \frac{i}{n} = \frac{i}{n^2}$$

   (b) Der Flächeninhalt der Summe solcher Vierecke über $i = 1, \ldots, n$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$$

(c) Der Grenzwert dieser Summe für $n \to \infty$ ist gegeben im ersten Teil des Beispiels 3a,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}$$

(d) Mit $f(x) = x^3$ ist der Flächeninhalt des Vierecks $[x_{i-1}, x_i] \times [0, f(x_i)]$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$(x_i - x_{i-1}) \times (f(x_i) - 0) = \frac{1}{n} \times x_i^3 = \frac{1}{n} \times \left(\frac{i}{n}\right)^3 = \frac{i^3}{n^4}$$

Der Flächeninhalt der Summe solcher Vierecke über $i = 1, \ldots, n$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3$$

Der Grenzwert dieser Summe für $n \to \infty$ ist gegeben im zweiten Teil des Beispiels 3a,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}$$

5. Steigung als Grenzwert:

(a) Für die Funktion $y(x) = x^3$ ist die Steigung einer Sekante durch die Punkte $(1, y(1))$ und $(1 + h, y(1 + h))$ gegeben durch

$$\frac{y(1+h) - y(1)}{(1+h) - 1} = \frac{(1+h)^3 - 1^3}{(1+h) - 1}$$

(b) Die Vereinfachung dieses Differenzenquotienten und der Grenzwert sind im ersten Teil des Beispiels 3b gegeben,

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{(1+h) - 1} = \lim_{h\to 0} [(1+h)^2 + (1+h) + 1] = 3$$

(c) Für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist die Steigung einer Sekante durch die Punkte $(1, f(1))$ und $(1 + h, f(1 + h))$ gegeben durch

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{(1+h) - 1}$$

Die Vereinfachung dieses Differenzenquotienten und der Grenzwert sind im zweiten Teil des Beispiels 3b gegeben,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{(1+h) - 1} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

6 Grenzwertbestimmung, Bisektionsverfahren, Geometrische Reihen

6.1 Beispiele

1. Stetigkeit und Grenzwerte:

   Stellen Sie die folgenden Funktionen grafisch dar und erklären Sie mit Begründung (sehen Sie z.B. Seiten 61-62 im Skriptum) wo sie stetig sind.

   (a) $y_1(x) = |x|^{2/3}/(1+x^2)$
   (b) $y_2(x) = |x| \ln |x|$
   (c) $y_3(x) = (x-7)^{\pi}$
   (d) $y_4(x) = \sqrt{(3x-2-x^2)/(x^2+x-2)}$
   (e) $y_5(x) = 1/(1+e^{-x})$

   Wie bestimmt man den Grenzwert einer dieser Funktionen an einer Stelle, in der die Funktion stetig ist? Welche dieser Funktionen lassen sich *stetig ergänzen*, d.h. den Graphen der Funktion mit einem Punkt (x_0, y_0) erweitern, sodass die erweiterte Funktion an der Stelle x_0 stetig ist?

2. Methoden zur Bestimmung eines Grenzwerts:

   (a) Bestimmen Sie die Grenzwerte durch algebraische Vereinfachung:

   $$\lim_{x\to 1^+} (x^4-1)/(x^2-1) \qquad \lim_{x\to 1^+} (x^4+1)/(x^2-1)$$

   (b) Bestimmen Sie die Grenzwerte durch Eigenschaften der Winkelfunktion:

   $$\lim_{x\to 1^-} \tan(\pi x/2) \qquad \lim_{x\to 1^+} \tan(\pi x/2)$$

   (c) Bestimmen Sie die Grenzwerte durch Eigenschaften der Winkelfunktion:

   $$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\sin(1/x) \qquad \lim_{x\to 1} \sin(x^2)/x^2 \qquad \lim_{x\to +\infty} \sin(x)/|x|$$

   wobei ein *Sandwich* nützlich sein kann.

   (d) Bestimmen Sie die Grenzwerte durch Eigenschaften der Logarithmusfunktion gegenüber jenen einer Potenzfunktion:

   $$\lim_{x\to +\infty} \log_2(x)/\sqrt{x} \qquad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x)$$

   (e) Bestimmen Sie die Grenzwerte durch Eigenschaften der Exponentialfunktion gegenüber jenen eines Polynoms:

   $$\lim_{x\to +\infty} (1+x)4^{-x} \qquad \lim_{x\to -\infty} 5^x/(1+x+x^2) \qquad \lim_{x\to +\infty} (1+2^x)/(e^x+3^{-x})$$

3. Bisektionsverfahren:

   Sehen Sie Beispiel 6a im Kapitel 4 für Details über $\tan(x)$ und $\tan^{-1}(x) = \arctan(x)$. Hinweis: Mit $y(x) = \tan^{-1}(x)/(1+x^2)$ sind die unten stehenden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ (die *Steigung*) $y'(x)$ bzw. (die *Steigung der Steigung*) $y''(x)$.

   (a) Verwenden Sie das Bisektionsverfahren, um die Nullstelle $x_0 \approx 0.7654$ der Funktion

   $$f(x) = \frac{1 - 2x\tan^{-1}(x)}{(1+x^2)^2}$$

   auf Seite 101 im Skriptum zu finden. Startwerte werden auch auf Seite 101 vorgeschlagen.

   (b) Verwenden Sie das Bisektionsverfahren, um die Nullstelle $x_1 \approx 1.330$ der Funktion

   $$g(x) = \frac{(6x^2 - 2)\tan^{-1}(x) - 6x}{(1+x^2)^3}$$

   auf Seite 116 im Skriptum zu finden. Startwerte werden auch auf Seite 116 vorgeschlagen.

   (c) Das Bisektionsverfahren wird für die folgenden Funktionen im Intervall $[0, 1]$ angewendet. Bestimmen Sie für jede Funktion, ob das Bisektionsverfahren konvergiert und ob die Iterierten zu einer Nullstelle der Funktion konvergieren.

      i. $f_\kappa(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sign}(x)(3x^2 + \kappa)$ für die Fälle $\kappa = 0, 1, 2$

      ii. $g_\kappa(x) = (1/3 - \kappa x)/x$, $x \neq 0$, $g_\kappa(0) = 1$, für die Fälle $\kappa = 0, 1$

4. Zwischenwertsatz:

   (a) Finden Sie die Nullstellen und die Polstellen der rationalen Funktion

   $$r(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x-2)(x-4)(x-6)}$$

   (b) Werten Sie $r(x)$ in 7 Stellen strategisch aus, um das Vorzeichen in den Teilintervallen zwischen Polstellen und Nullstellen zu bestimmen.

   (c) Stellen Sie $r(x)$ grafisch dar.

5. Geometrische Reihen:

   Ein Student möchte von einem Mittagessenslokal insgesamt 100 Meter bis zu einem Hörsaal gehen. Wegen steigender Müdigkeit schafft er jede Minute nur die Hälfte des verbliebenen Weges.

   (a) Wie weit kommt er nach 10 Minuten?

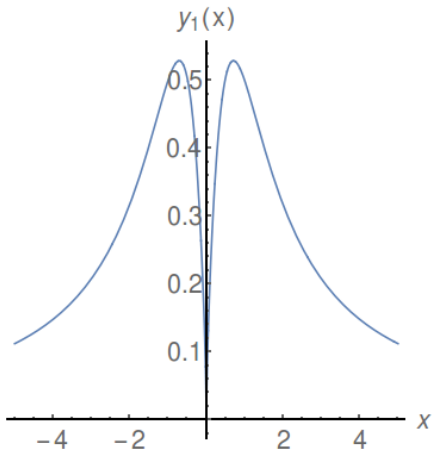
   (b) Wie lang dauert es, bis er 90% des Weges zum Ziel kommt?

6.2 Lösungen

1. Stetigkeit und Grenzwerte:

   (a) Aus der folgenden grafischen Darstellung von $y_1(x) = |x|^{2/3}/(1+x^2)$ ist ersichtlich, dass $y_1(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ stetig ist. Die Stetigkeit wird bezüglich der Eigenschaften auf Seite 61 im Skriptum folgendermaßen begründet. Erstens kann die Funktion so geschrieben werden,

$$y_1(x) = \frac{f(g(x))}{p(x)} \quad \text{mit} \quad f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = x^2, \quad p(x) = 1 + x^2$$



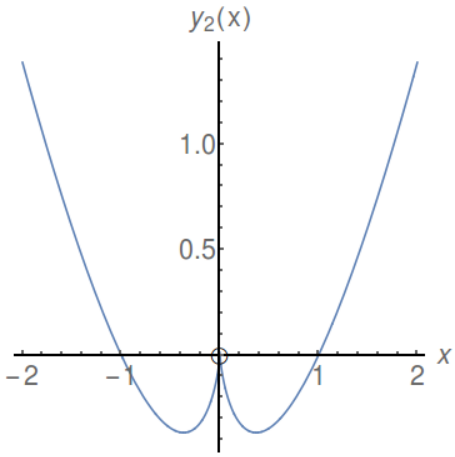
Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

- $f(x)$, Potenzfunktion, Wurzel ungerade, stetig auf $D_f = \mathbb{R}$.
- $g(x)$, Polynom, stetig auf $D_g = \mathbb{R}$.
- $p(x)$, Polynom, stetig auf $D_p = \mathbb{R}$.
- $f(g(x))$, Komposition, stetig auf $D_{f\circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- $f(g(x))/p(x)$, Quotient mit $p(x) = 1 + x^2 \geq 1 > 0$, stetig auf $\{x \in D_{f\circ g} \cap D_p : p(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \neq 0\} = \mathbb{R}$.

und daher ist $y_1(x) = f(g(x))/p(x)$ stetig für jedes $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Aus der folgenden grafischen Darstellung von $y_2(x) = |x| \ln |x|$ ist ersichtlich, dass $y_2(x)$ für jedes $x \neq 0$ stetig ist. Die Stetigkeit wird bezüglich der Eigenschaften auf Seite 61 im Skriptum folgendermaßen begründet. Erstens kann die Funktion so geschrieben werden,

$$y_2(x) = b(x)f(b(x)) \quad \text{mit} \quad b(x) = |x|, \quad f(x) = \ln(x)$$



Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

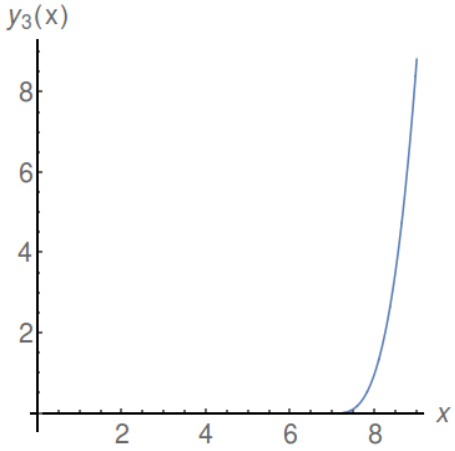
- $b(x)$, Betragsfunktion, stetig auf $D_b = \mathbb{R}$.
- $f(x)$, Logarithmusfunktion, stetig auf $\mathbb{R}_+$.
- $f(b(x))$, Komposition, stetig auf $D_{f\circ b} = \{x \in D_b : b(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in \mathbb{R}_+\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- $b(x)f(b(x))$, Produkt, stetig auf $D_b \cap D_{f\circ b} = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R}\backslash\{0\}) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

und daher ist $y_2(x) = b(x)f(b(x))$ stetig für jedes $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

- Mit der zusätzlichen Zuweisung $y_2(0) = 0$ wird $y_2(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ergänzt.

   (c) Aus der folgenden grafischen Darstellung von $y_3(x) = (x-7)^\pi$ ist ersichtlich, dass $y_3(x)$ für jedes $x \geq 7$ stetig ist. Die Stetigkeit wird bezüglich der Eigenschaften auf Seite 61 im Skriptum folgendermaßen begründet. Erstens kann die Funktion so geschrieben werden,

$$y_3(x) = f(g(x)) \quad \text{mit} \quad f(x) = x^\pi, \quad g(x) = x - 7$$



Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

- $f(x)$, Potenzfunktion, Potenz > 0, stetig auf $D_f = [0, \infty)$.
- $g(x)$, Polynom, stetig auf $D_g = \mathbb{R}$.
- $f(g(x))$, Komposition, stetig auf $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : x - 7 \in [0, \infty)\} = [7, \infty)$.

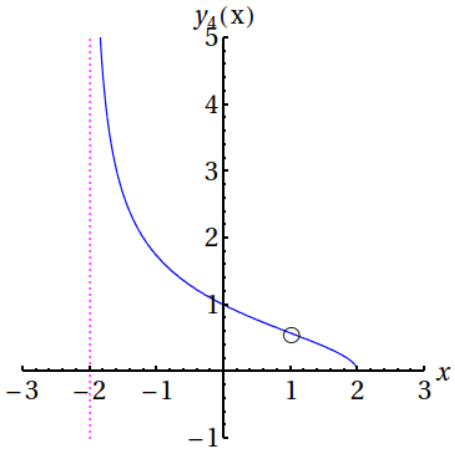
und daher ist $y_3(x) = f(g(x))$ stetig für jedes $x \in [7, \infty)$.

(d) Aus der folgenden grafischen Darstellung von $y_4(x) = \sqrt{(3x - 2 - x^2)/(x^2 + x - 2)}$ ist ersichtlich, dass $y_4(x)$ für jedes $x \in (-2, 2] \backslash \{+1\}$ stetig ist. Die Stetigkeit wird bezüglich der Eigenschaften auf Seite 61 im Skriptum folgendermaßen begründet. Erstens kann die Funktion so geschrieben werden,

$$y_4(x) = f(r(x)) \quad \text{mit} \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$p(x) = 3x - 2 - x^2 = (x - 1)(2 - x), \quad q(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$$

$$r(x) = \frac{(x - 1)(2 - x)}{(x - 1)(x + 2)} \overset{x \neq 1}{=} \frac{2 - x}{x + 2}$$



Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

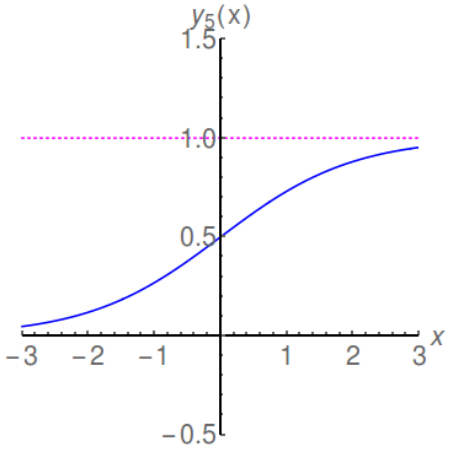
- $f(x)$, Potenzfunktion, Wurzel gerade, stetig auf $D_f = [0, \infty)$.
- $r(x)$, rationale Funktion, stetig auf $D_r = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{-2, +1\}$.
- $f(r(x))$, Komposition, stetig auf $D_{f \circ r} = \{x \in D_r : r(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \backslash \{-2, +1\} : r(x) \geq 0\} = (-2, +2] \backslash \{+1\}$.

und daher ist $y_4(x) = f(r(x))$ stetig für jedes $x \in (-2, +2] \backslash \{+1\}$.

- Mit der zusätzlichen Zuweisung $y_4(1) = 1/\sqrt{3}$ wird $y_4(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ergänzt.

(e) Aus der folgenden grafischen Darstellung von $y_5(x) = 1/(1 + e^{-x})$ ist ersichtlich, dass $y_5(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ stetig ist. Die Stetigkeit wird bezüglich der Eigenschaften auf Seite 61 im Skriptum folgendermaßen begründet. Erstens kann die Funktion so geschrieben werden,

$$y_5(x) = r(e(x)) \quad \text{mit} \quad r(x) = \frac{1}{q(x)}, \quad q(x) = 1 + x, \quad e(x) = \exp(-x)$$



Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

- $r(x)$, rationale Funktion, stetig auf $D_r = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
- $e(x)$, Exponentialfunktion, stetig auf $D_e = \mathbb{R}$.
- $r(e(x))$, Komposition, stetig auf $D_{r\circ e} = \{x \in D_e : e(x) \in D_r\} = \{x \in \mathbb{R} : e^{-x} \neq -1\} = \mathbb{R}$.

und daher ist $y_5(x) = r(e(x))$ stetig für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Für jedes der obigen Beispiele bestimmt man den Grenzwert $\lim_{x\to x_0} y_i(x)$ an einer Stelle x_0, in der die Funktion stetig ist, einfach durch die Auswertung

$$\lim_{x\to x_0} y_i(x) = y_i(x_0), \quad i = 1, \ldots, 5.$$

Wie oben hingewiesen gibt es zwei Funktionen, die sich stetig ergänzen lassen.

Wegen der Eigenschaft $x^p \log_a(x) \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ $(p > 0)$ folgen

$$\lim_{x\to 0^+} y_2(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^-} y_2(x) \overset{|x|=-x}{=} \lim_{x\to 0^-} -x\ln(-x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

und daher ist die zusätzliche Zuweisung $y_2(0) = 0$ eine stetige Ergänzung.

Mit einer algebraischen Vereinfachung folgt

$$\lim_{x\to 1} y_4(x) = \lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{3x-2-x^2}{x^2+x-2}} = \lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{2-x}{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und daher ist die zusätzliche Zuweisung $y_4(1) = 1/\sqrt{3}$ eine stetige Ergänzung.

2. Methoden zur Bestimmung eines Grenzwerts:

   (a) Durch algebraische Vereinfachung ergibt sich

   $$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^4-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} x^2+1 = 2$$

   und

   $$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^4+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{(x^4+1)}^{>0, x\approx 1^+}}{\underbrace{(x-1)}_{>0, x\approx 1^+}\underbrace{(x+1)}_{>0, x\approx 1^+}} = +\infty$$

   (b) Durch Eigenschaften der Winkelfunktion bekommt man

   $$\lim_{x\to 1^-} \tan(\pi x/2) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1^+} \tan(\pi x/2) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$$

   (c) Die Komposition $f(g(x)) = |\sqrt[3]{x}|$ mit $f(x) = |x|$, $D_f = \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[x]{x}$ und $D_g = \mathbb{R}$, ist stetig auf $D_{f\circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. Aus der Eigenschaft $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ und der Stetigkeit der Komposition $|\sqrt[3]{x}|$ auf $\mathbb{R}$ folgt $\sqrt[3]{x}\sin(1/x) \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ mit dem Sandwich

   $$0 = -|\sqrt[3]{0}| = \lim_{x\to 0} -|\sqrt[3]{x}| \leq \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\sin(1/x) \leq \lim_{x\to 0} |\sqrt[3]{x}| = |\sqrt[3]{0}| = 0$$

Aus der Stetigkeit der Winkelfunktion $\sin(x)$, des Polynoms x^2, der Komposition $\sin(x^2)$, der rationalen Funktion $1/x^2$ $(x \neq 0)$ und des Quotienten $\sin(x^2)/x^2$ folgt

$$\lim_{x\to 1} \sin(x^2)/x^2 = \sin(1^2)/1^2 = \sin(1)$$

Aus den Eigenschaften $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ und $1/|x| = 1/x \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ folgt $\sin(x)/|x| \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ mit dem Sandwich

$$0 = \lim_{x\to+\infty} -1/x \leq \lim_{x\to+\infty} \sin(x)/|x| \leq \lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$$

(d) Aus der Eigenschaft $\log_a(x)/x^p \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $(p > 0)$ folgt

$$\lim_{x\to+\infty} \log_2(x)/\sqrt{x} = 0$$

Aus der Eigenschaft $x^p \log_a(x) \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ $(p > 0)$ folgt

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x) = 0$$

(e) Aus der Eigenschaft $x^p a^{-x} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $(a > 1)$ folgt

$$\lim_{x\to+\infty} (1+x)4^{-x} = 0$$

Aus den Eigenschaften $x^{-n} \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ $(n \in \mathbb{N})$ und $x^n a^x \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ $(a > 1)$ folgt

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5^x}{1+x+x^2}\left(\frac{x^{-2}}{x^{-2}}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{-2}5^x}{(1+1/x+1/x^2)} = 0$$

Aus der Eigenschaft $a^{-x} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $(a > 1)$ folgt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+2^x}{e^x+3^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2^x}{e^x+3^{-x}}\left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}+(e/2)^{-x}}{1+(3e)^{-x}} = 0$$

3. Bisektionsverfahren:

(a) Für die überall stetige Funktion

$$f(x) = \frac{1-2x\tan^{-1}(x)}{(1+x^2)^2} \quad \text{gelten} \quad f(0) = +1.0000, \quad f(1) = -0.1427$$

Daher wendet man das Bisektionsverfahren im Intervall $[0,1]$ an. Mit den Anfangswerten $a = 0$ und $b = 1$ und immer $c = (a+b)/2$ liefert das Bisektionsverfahren

folgende Ergebnisse:

c	$f(c)$	a	b
0.50000	0.34327	0.00000	1.00000
0.75000	0.01423	0.50000	1.00000
0.87500	−0.08275	0.75000	1.00000
0.81250	−0.03946	0.75000	0.87500
0.78125	−0.01398	0.75000	0.81250
0.76562	−0.00022	0.75000	0.78125
0.75781	0.00692	0.75000	0.76562
0.76172	0.00333	0.75781	0.76562
0.76367	0.00155	0.76172	0.76562
0.76465	0.00066	0.76367	0.76562
0.76514	0.00022	0.76465	0.76562
0.76538	−0.00000	0.76514	0.76562
0.76526	0.00011	0.76514	0.76538
0.76532	0.00005	0.76526	0.76538
0.76535	0.00003	0.76532	0.76538
0.76537	0.00001	0.76535	0.76538
0.76537	0.00001	0.76537	0.76538

d.h. eine Nullstelle für $f(x)$ ist $x_0 \approx 0.7654$.

(b) Für die überall stetige Funktion

$$g(x) = \frac{(6x^2-2)\tan^{-1}(x) - 6x}{(1+x^2)^3} \quad \text{gelten} \quad g(1) = -0.3573, \quad g(2) = 0.0989$$

Daher wendet man das Bisektionsverfahren im Intervall $[1, 2]$ an. Mit den Anfangswerten $a = 1$ und $b = 2$ und immer $c = (a+b)/2$ liefert das Bisektionsverfahren folgende Ergebnisse:

c	$g(c)$	a	b
1.50000	0.06706	1.00000	2.00000
1.25000	−0.05299	1.00000	1.50000
1.37500	0.02285	1.25000	1.50000
1.31250	−0.01032	1.25000	1.37500
1.34375	0.00734	1.31250	1.37500
1.32812	−0.00121	1.31250	1.34375
1.33594	0.00314	1.32812	1.34375
1.33203	0.00098	1.32812	1.33594
1.33008	−0.00011	1.32812	1.33203
1.33105	0.00044	1.33008	1.33203
1.33057	0.00017	1.33008	1.33105
1.33032	0.00003	1.33008	1.33057
1.33020	−0.00004	1.33008	1.33032

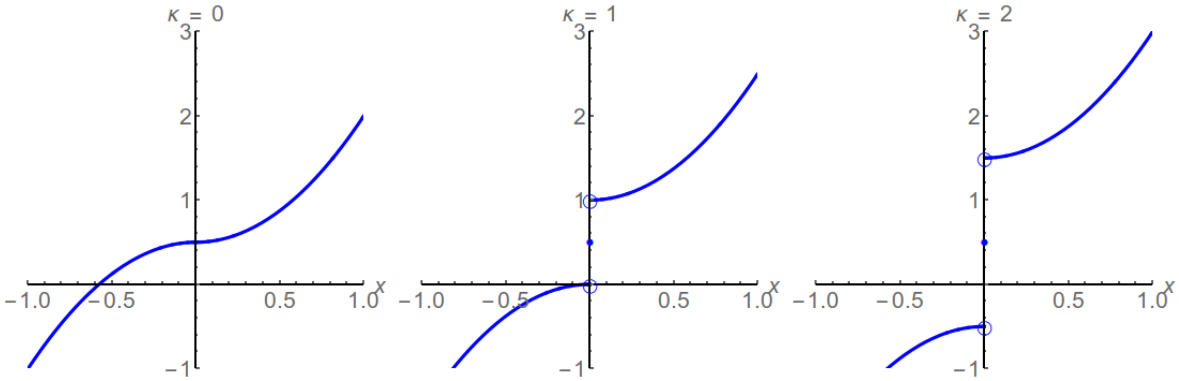
d.h. eine Nullstelle für $g(x)$ ist $x_1 \approx 1.330$.

(c) Das Bisektionsverfahren wird für die folgenden Funktionen im Intervall $[0, 1]$ angewendet.

i. Die Funktion $f_\kappa(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sign}(x)(3x^2+\kappa)$

$$f_\kappa(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(3x^2+\kappa), & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(3x^2+\kappa), & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} (1-\kappa-3x^2)2, & x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ (1+\kappa+3x^2)/2, & x > 0 \end{cases}$$

hat die folgenden Graphen jeweils für $\kappa = 0, 1, 2$:



Es gibt eine Nullstellen nur für den Fall $\kappa = 0$. Man erinnert sich an die Voraussetzungen der Konvergenz des Bisektionsverfahrens zu einer Nullstelle der Funktion. Für den Fall $\kappa = 0$ ist $f_\kappa(x)$ im Intervall $[-1, +1]$ stetig, und es gilt $f_0(-1)f_0(+1) < 0$. Mit den Anfangswerten $a = -1$ und $b = +1$ konvergieren die Iterierten des Bisektionsverfahrens zur Nullstelle $x = -1/\sqrt{3}$ für den Fall $\kappa = 0$,

c	$f_0(c)$	a	b
0.0	0.5	−1.0	1.0
−0.5	0.125	−1.0	0.0
−0.75	−0.34375	−1.0	−0.5
⋮	⋮	⋮	⋮
−0.5774	0.0000	−0.5774	−0.5774

Für den Fall $\kappa = 1$ ist $f_1(x)$ an der Stelle $x = 0$ nicht stetig, d.h. die Voraussetzungen der Konvergenz des Bisektionsverfahrens sind nicht erfüllt. Mit den Anfangswerten $a = -1$ und $b = +1$ konvergieren die Iterierten des Bisektionsverfahrens zum Wert $x = 0$,

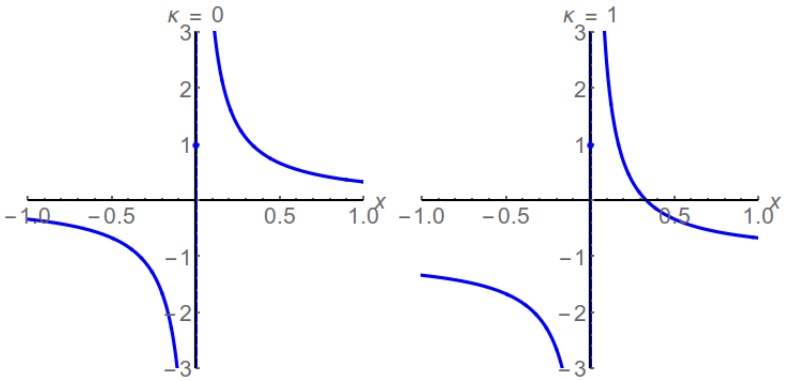
c	$f_1(c)$	a	b
0.0	0.5	−1.0	1.0
−0.5	−0.375	−1.0	0.0
−0.25	−0.09375	−0.5	0.0
⋮	⋮	⋮	⋮
0.0000^-	0.0000^-	0.0000^-	0.0

aber diese ist keine Nullstelle, da $f_1(0) = \frac{1}{2}$ gilt.
Für den Fall $\kappa = 2$ ist $f_2(x)$ an der Stelle $x = 0$ nicht stetig. d.h. die Voraussetzungen der Konvergenz des Bisektionsverfahrens sind nicht erfüllt. Mit den Anfangswerten $a = -1$ und $b = +1$ konvergieren die Iterierten des Bisektionsverfahrens zum Wert $x = 0$,

c	$f_2(c)$	a	b
0.0	0.5	−1.0	1.0
−0.5	−0.875	−1.0	0.0
−0.25	−0.59375	−0.5	0.0
⋮	⋮	⋮	⋮
0.0000^-	0.0000^-	0.0000^-	0

aber diese ist keine Nullstelle, da $f_2(0) = \frac{1}{2}$ gilt.

ii. Die Funktion $g_\kappa(x) = (1/3 - \kappa x)/x$, $x \neq 0$, $g_\kappa(0) = 1$, $x = 0$, hat die folgenden Graphen jeweils für $\kappa = 0, 1$:



Es gibt eine Nullstellen nur für den Fall $\kappa = 1$. Man erinnert sich an die Voraussetzungen der Konvergenz des Bisektionsverfahrens zu einer Nullstelle der Funktion. Für die beiden Fälle $\kappa = 0, 1$ ist $g_\kappa(x)$ an der Stelle $x = 0$ nicht stetig, d.h. im Intervall $[-1, +1]$ sind die Voraussetzungen der Konvergenz des Bisektionsverfahrens für die beiden Fälle $\kappa = 0, 1$ nicht erfüllt.
Mit den Anfangswerten $a = -1$ und $b = +1$ konvergieren die Iterierten des Bisektionsverfahrens zum Wert $x = 0$ für den Fall $\kappa = 0$,

c	$g_0(c)$	a	b
0.0	1.0	−1.0	1.0
−0.5	−0.66667	−1.0	0.0
−0.25	−1.3333	−0.5	0.0
⋮	⋮	⋮	⋮
0.0000^-	$-\infty$	0.0000^-	0.0

aber diese ist keine Nullstelle, da $g_0(0) = 1$ gilt.
Mit den Anfangswerten $a = -1$ und $b = +1$ konvergieren die Iterierten des Bisektionsverfahrens zum Wert $x = 0$ für den Fall $\kappa = 1$,

c	$g_1(c)$	a	b
0.0	1.0	−1.0	1.0
−0.5	−1.6667	−1.0	0.0
−0.25	−2.3333	−0.5	0.0
⋮	⋮	⋮	⋮
0.0000^-	0.0000^-	0.0000^-	0

aber diese ist keine Nullstelle, da $g_1(0) = 1$ gilt.
Im Intervall $[1/10, 1]$ erfüllt $g_1(x)$ die Voraussetzungen der Konvergenz des Bisektionsverfahrens. Mit den Anfangswerten $a = 1/10$ und $b = 1$ konvergieren die Iterierten des Bisektionsverfahrens zur Nullstelle $x = 1/3$ für den Fall $\kappa = 1$,

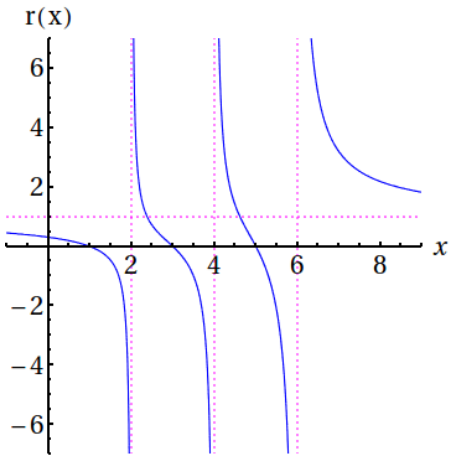
c	$g_1(c)$	a	b
0.55	−0.39394	0.1	1.0
0.325	0.025641	0.1	0.55
0.4375	−0.2381	0.325	0.55
⋮	⋮	⋮	⋮
0.3333	0.0000	0.3333	0.3333

4. Zwischenwertsatz:

   (a) Die rationale Funktion
$$r(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x-2)(x-4)(x-6)}$$
   besitzt die Nullstellen $\{1,3,5\}$ und die Polstellen $\{2,4,6\}$.

   (b) Anhand der Stetigkeit der rationalen Funktion zwischen Nullstellen und Polstellen bedeuten die Werte
$$\begin{array}{rcrcll} r(0.5) & \approx & +0.195 & & r(x)>0, & x\in(-\infty,1) \\ r(1.5) & \approx & -0.467 & & r(x)<0, & x\in(1,2) \\ r(2.5) & \approx & +0.714 & & r(x)>0, & x\in(2,3) \\ r(3.5) & \approx & -1.000 & \text{dass} & r(x)<0, & x\in(3,4) \\ r(4.5) & \approx & +1.400 & & r(x)>0, & x\in(4,5) \\ r(5.5) & \approx & -2.143 & & r(x)<0, & x\in(5,6) \\ r(6.5) & \approx & +5.133 & & r(x)>0, & x\in(6,+\infty) \end{array}$$

   (c) Die grafische Darstellung von $r(x)$ ist:



5. Geometrische Reihen:

   (a) Nach n Minuten geht der Student so viele Meter,
$$100\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 100\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}$$
   Man überzeugt sich davon durch eine Kontrolle mit bestimmten kleinen Werten von n. Diese Summe lässt sich durch eine geometrische Reihe vereinfachen:
$$100\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i} = 100\left(-1+\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i\right) = 100\left[-1+\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-(1/2)}\left(\frac{2}{2}\right)\right] = 100(1-2^{-n})$$
   Insbesondere nach 10 Minuten geht er
$$100(1-2^{-10}) = 99.9023 \text{ Meter}$$

   (b) Die Anzahl der Minuten n, nach der der Student 90% des Weges zum Ziel kommt, d.h. 90 Meter geht, erfüllt:
$$\begin{array}{rcl|l} 100(1-2^{-n}) & = & 90 & \div 100 \\ 1-2^{-n} & = & 0.9 & +2^{-n}-0.9 \\ 0.1 = 1-0.9 & = & 2^{-n} & \log_2(\cdot) \\ \log_2(0.1) & = & \log_2(2^{-n}) = -n & \times -1 \\ 3.322 \approx \log_2(10) & = & n & \end{array}$$

d.h. es dauert ≈ 3.322 Minuten. Grober beschrieben ist er nach 3 Minuten 87.5% des Weges und nach 4 Minuten 93.75% des Weges gegangen.

7 Tangenten, Regeln für Ableitungen, Differenzierbarkeit

7.1 Beispiele

1. Grafische Beziehung zwischen Funktion und Ableitung:

   Sei $f(x) = x^3 - x$.

   (a) Bestimmen Sie $f'(x)$.

   (b) Stellen Sie $f(x)$ und $f'(x)$ gemeinsam grafisch dar und erklären Sie die Beziehung zwischen den Graphen.

   (c) Bestimmen Sie die Tangente durch die Punkte

   $$(-1, f(-1)), \quad (-1/\sqrt{3}, f(-1/\sqrt{3})), \quad (0, f(0)), \quad (+1/\sqrt{3}, f(+1/\sqrt{3})) \quad \text{und} \quad (+1, f(+1)).$$

   (d) Stellen Sie $f(x)$ und die Tangenten gemeinsam grafisch dar.

   Hinweis: Sehen Sie Beispiel im Kapitel 2.

2. Ableitungen von log und exp-Funktionen:

   Bestimmen Sie die Ableitungen

   (a) $f_1(x) = \ln(u(x))$

   (b) $f_2(x) = \log_2(u(x))$

   (c) $f_3(x) = e^{u(x)}$

   (d) $f_4(x) = 2^{u(x)}$

   für eine allgemeine Funktion $u(x)$ und dann für die bestimmten Funktionen,

   (i) $u(x) = x$, (ii) $u(x) = xe^x$, (iii) $u(x) = (1+\ln(x))/(1+e^x)$, (iv) $u(x) = \ln(1+x^2)$,

3. Ableitungen von Winkelfunktionen und ihrer Umkehrfunktionen:

   Bestimmen Sie die Ableitungen

   (a) $g_1(x) = \sin(u(x))$

   (b) $g_2(x) = \cos(u(x))$

   (c) $g_3(x) = \tan(u(x))$

   (d) $g_4(x) = \sin^{-1}(u(x))$

   (e) $g_5(x) = \cos^{-1}(u(x))$

   (f) $g_6(x) = \tan^{-1}(u(x))$

   für eine allgemeine Funktion $u(x)$ und dann für die bestimmten Funktionen,

   (i) $u(x) = x$, (ii) $u(x) = x\sin(x)$, (iii) $u(x) = (1+\sin(x))/(1+\cos(x))$, (iv) $u(x) = \tan^{-1}(1+x^2)$

4. Vorbereitung auf die Monotonie und die Krümmung:

   Verwenden Sie zutreffende Regeln, um die erste und die zweite Ableitung der folgenden Funktionen zu berechnen. Für jedes $i = 1, \ldots, 14$ stellen Sie $y_i(x)$, $y_i'(x)$ und $y_i''(x)$ gemeinsam grafisch dar.

(a) $y_1(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$

(b) $y_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

(c) $y_3(x) = x^4$

(d) $y_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$

(e) $y_5(x) = 1/(2x^2)$

(f) $y_6(x) = |x|$

(g) $y_7(x) = (x^2 - 5x + 6)/(x^2 - 5x + 4)$

(h) $y_8(x) = 2|x+1| - 3|x| + 2|x-1| - 1$

(i) $y_9(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$

(j) $y_{10}(x) = 8\sqrt[3]{x^2}/(8 + x^2)$

(k) $y_{11}(x) = xe^{-x}$

(l) $y_{12}(x) = x\ln(x) - x$

(m) $y_{13}(x) = \sin^2(x)$

(n) $y_{14}(x) = \tan^{-1}(x)/(1 + x^2)$

Hinweis: Sehen Sie Seiten 92 – 101 und Seiten 107 – 116 im Skriptum.

5. Differenzierbarkeit:

Stellen Sie die folgenden Funktionen grafisch dar. Erklären Sie mit Begründung, welche sind an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar.

(a) $z_1(x) = |x|$

(b) $z_2(x) = \sqrt[3]{x}$

(c) $z_3(x) = \mathrm{sign}(x)/(1 + |x|)$

(d) $z_4(x) = x\sin(1/x)$, $x \neq 0$, $z_4(0) = 0$

(e) $z_5(x) = x^2\ln(1/x^2)$, $x \neq 0$, $z_5(0) = 0$

(f) $z_6(x) = \exp(-1/x^2)$, $x \neq 0$, $z_6(0) = 0$

Hinweis: Laut der Definition soll man die Existenz der Grenzwerte kontrollieren:

$$\lim_{h \to 0} \frac{z_i(h) - z_i(0)}{h - 0}$$

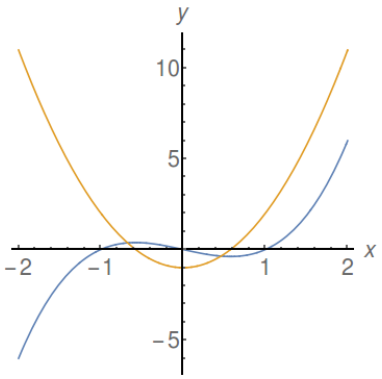
7.2 Lösungen

1. Grafische Beziehung zwischen Funktion und Ableitung:

   (a) Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3 - x$ ist

   $$f'(x) = D_x(x^3 - x) = 3x^2 - 1$$

   (b) Die grafische Darstellung von $f(x)$ und $f'(x)$ ist

   Man merkt, $f'(x)$ ist positive oder negativ, wenn die Steigung von $f(x)$ positiv bzw. negativ ist. Weiters ist $|f'(x)|$ desto größer, je steiler die Tangente von $f(x)$ ist.

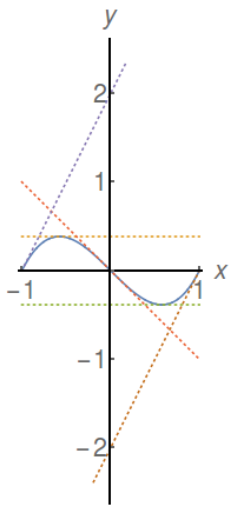
   (c) Die Tangente durch einen beliebigen Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist

   $$(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0)$$

   und insbesondere

   $$\begin{array}{llcll}
   \text{für} & (-1, f(-1)) & : & (y-0) = 2(x+1) & \text{oder} \quad y = 2x+2 \\
   \text{für} & (-\frac{1}{\sqrt{3}}, f(-\frac{1}{\sqrt{3}})) & : & (y - \frac{2}{3\sqrt{3}}) = 0(x + \frac{1}{\sqrt{3}}) & \text{oder} \quad y = \frac{2}{3\sqrt{3}} \\
   \text{für} & (0, f(0)) & : & (y-0) = -(x-0) & \text{oder} \quad y = -x \\
   \text{für} & (\frac{1}{\sqrt{3}}, f(\frac{1}{\sqrt{3}})) & : & (y + \frac{2}{3\sqrt{3}}) = 0(x - \frac{1}{\sqrt{3}}) & \text{oder} \quad y = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \\
   \text{für} & (1, f(1)) & : & (y-0) = 2(x-1) & \text{oder} \quad y = 2x-2
   \end{array}$$

   (d) Die grafische Darstellung der Funktion gemeinsam mit diesen Tangenten ist:

2. Ableitungen von log und exp-Funktionen:

(a) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$f_1(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \ln(x), \quad v'(x) = \frac{1}{x}, \quad f_1'(x) = v'(u(x))u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = \dfrac{1}{x}$

ii. $u(x) = xe^x, \quad u'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x, \quad D_x v(u(x)) = \dfrac{(1+x)e^x}{xe^x} = \dfrac{1}{x} + 1$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1+e^x}, \quad u'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+e^x) - (1+\ln(x))e^x}{(1+e^x)^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{\frac{1}{x}(1+e^x) - (1+\ln(x))e^x}{(1+e^x)^2} \Big/ \left(\frac{1+\ln(x)}{1+e^x}\right) = \frac{(1+e^x) - xe^x(1+\ln(x))}{x(1+\ln(x))(1+e^x)}$$

iv. $u(x) = \ln(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{(1+x^2)'}{(1+x^2)} = \dfrac{2x}{1+x^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{2x}{1+x^2} \Big/ \ln(1+x^2) = \frac{2x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}$$

(b) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$f_2(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \log_2(x), \quad v'(x) = D_x \log_2(e)\ln(x) = \log_2(e)\frac{1}{x},$$

$$f_2'(x) = v'(u(x))u'(x) = \log_2(e)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

wobei die Regel der Logarithmusfunktionen

$$\log_a(x) = \log_a(b^{\log_b(x)}) = \log_b(x)\log_a(b)$$

verwendet worden ist. Anhand der Lösungen des letzten Teils ergeben sich hier ähnliche Lösungen einfach durch Multiplikation mit $\log_2(e)$,

i. $u(x) = x, \quad D_x v(u(x)) = \log_2(e)\dfrac{1}{x}$

ii. $u(x) = xe^x, \quad D_x v(u(x)) = \log_2(e)\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1+e^x}, \quad D_x v(u(x)) = \log_2(e)\dfrac{(1+e^x) - xe^x(1+\ln(x))}{x(1+\ln(x))(1+e^x)}$

iv. $u(x) = \ln(1+x^2), \quad D_x v(u(x)) = \log_2(e)\dfrac{2x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}$

(c) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$f_3(x) = v(u(x)), \quad v(x) = e^x, \quad v'(x) = e^x, \quad f_3'(x) = v'(u(x))u'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = e^x$

ii. $u(x) = xe^x, \quad u'(x) = (1+x)e^x, \quad D_x v(u(x)) = (1+x)e^x e^{xe^x}$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1+e^x}, \quad u'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+e^x) - (1+\ln(x))e^x}{(1+e^x)^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{\frac{1}{x}(1+e^x) - (1+\ln(x))e^x}{(1+e^x)^2} \exp\left(\frac{1+\ln(x)}{1+e^x}\right)$$

iv. $u(x) = \ln(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{2x}{1+x^2} \exp\left(\ln(1+x^2)\right) = \frac{2x}{1+x^2}(1+x^2) = 2x$$

(d) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$f_4(x) = v(u(x)), \quad v(x) = 2^x = \exp_2(x)$$

$$v'(x) = D_x 2^x = D_x e^{\ln(2^x)} = D_x e^{x\ln(2)} = \ln(2)e^{x\ln(2)} = \ln(2)e^{\ln(2^x)} = \ln(2)2^x$$

$$f_4'(x) = v'(u(x))u'(x) = \ln(2)u'(x)2^{u(x)}$$

wobei die Regeln der Logarithmusfunktionen verwendet worden sind. Anhand der Lösungen des letzten Teils ergeben sich hier ähnliche Lösungen durch Multiplikation mit $\ln(2)$,

i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x 2^x = \ln(2)2^x$

ii. $u(x) = xe^x, \quad u'(x) = (1+x)e^x, \quad D_x v(u(x)) = \ln(2)(1+x)e^x 2^{xe^x}$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1+e^x}, \quad u'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+e^x) - (1+\ln(x))e^x}{(1+e^x)^2}$

$$D_x v(u(x)) = \ln(2)\left(\frac{\frac{1}{x}(1+e^x) - (1+\ln(x))e^x}{(1+e^x)^2}\right)\exp_2\left(\frac{1+\ln(x)}{1+e^x}\right)$$

iv. $u(x) = \ln(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

$$D_x v(u(x)) = \ln(2)\frac{2x}{1+x^2}\exp_2(\ln(1+x^2))$$

3. Ableitungen von Winkelfunktionen und ihrer Umkehrfunktionen:

(a) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_1(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \sin(x), \quad v'(x) = \cos(x), \quad g_1'(x) = v'(u(x))u'(x) = \cos(u(x))u'(x)$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = \cos(x)$

ii. $u(x) = x\sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

$D_x v(u(x)) = (\sin(x) + x\cos(x))\cos(x\sin(x))$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}$

$$u'(x) = \frac{\cos(x)(1+\cos(x)) - (1+\sin(x))(-\sin(x))}{(1+\cos(x))^2}$$

$$= \frac{(\cos^2(x)+\sin^2(x))_{=1} + \cos(x) + \sin(x)}{(1+\cos(x))^2} = \frac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}$$

$$D_x v(u(x)) = \frac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}\cos\left(\frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)$$

iv. $u(x) = \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{(1+x^2)'}{1+(1+x^2)^2} = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}\cos(\tan^{-1}(1+x^2)) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}\frac{1}{\sqrt{1+(1+x^2)^2}}$$

$$= \frac{2x}{(1+(1+x^2)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(b) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_2(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \cos(x), \quad v'(x) = -\sin(x), \quad g_2'(x) = v'(u(x))u'(x) = -\sin(u(x))u'(x)$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = -\sin(x)$

ii. $u(x) = x\sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

$D_x v(u(x)) = -(\sin(x) + x\cos(x))\sin(x\sin(x))$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}, \quad u'(x) = \dfrac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}$

$D_x v(u(x)) = -\dfrac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}\sin\left(\dfrac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)$

iv. $u(x) = \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}$

$D_x v(u(x)) = -\dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}\sin(\tan^{-1}(1+x^2)) = -\dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}\dfrac{1+x^2}{\sqrt{1+(1+x^2)^2}}$

$= -\dfrac{2x(1+x^2)}{(1+(1+x^2)^2)^{\frac{3}{2}}}$

(c) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_3(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \tan(x), \quad v'(x) = \sec^2(x), \quad g_3'(x) = v'(u(x))u'(x) = \sec^2(u(x))u'(x)$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = \sec^2(x)$

ii. $u(x) = x\sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

$D_x v(u(x)) = (\sin(x) + x\cos(x))\sec^2(x\sin(x))$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}, \quad u'(x) = \dfrac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}$

$D_x v(u(x)) = \dfrac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}\sec^2\left(\dfrac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)$

iv. $u(x) = \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}$

$D_x v(u(x)) = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}\sec^2(\tan^{-1}(1+x^2)) = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}(1+(1+x^2)^2) = 2x$

(d) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_4(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \sin^{-1}(x), \quad v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g_4'(x) = v'(u(x))u'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ii. $u(x) = x\sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x\cos(x), \quad D_x v(u(x)) = \dfrac{\sin(x) + x\cos(x)}{\sqrt{1-(x\sin(x))^2}}$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}, \quad u'(x) = \dfrac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}$

$D_x v(u(x)) = \dfrac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2} \Big/ \sqrt{1-\left(\dfrac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)^2}$

iv. $u(x) = \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \Big/ \sqrt{1-(\tan^{-1}(1+x^2))^2}$$

(e) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_5(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \cos^{-1}(x), \quad v'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g_5'(x) = v'(u(x))u'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ii. $u(x) = x\sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x\cos(x), \quad D_x v(u(x)) = -\dfrac{\sin(x)+x\cos(x)}{\sqrt{1-(x\sin(x))^2}}$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}, \quad u'(x) = \dfrac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}$

$$D_x v(u(x)) = -\frac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2} \Bigg/ \sqrt{1-\left(\frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)^2}$$

iv. $u(x) = \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}$

$$D_x v(u(x)) = -\frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \Big/ \sqrt{1-(\tan^{-1}(1+x^2))^2}$$

(f) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_5(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \tan^{-1}(x), \quad v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g_5'(x) = v'(u(x))u'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = \dfrac{1}{1+x^2}$

ii. $u(x) = x\sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x\cos(x), \quad D_x v(u(x)) = \dfrac{\sin(x)+x\cos(x)}{1+(x\sin(x))^2}$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}, \quad u'(x) = \dfrac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}$

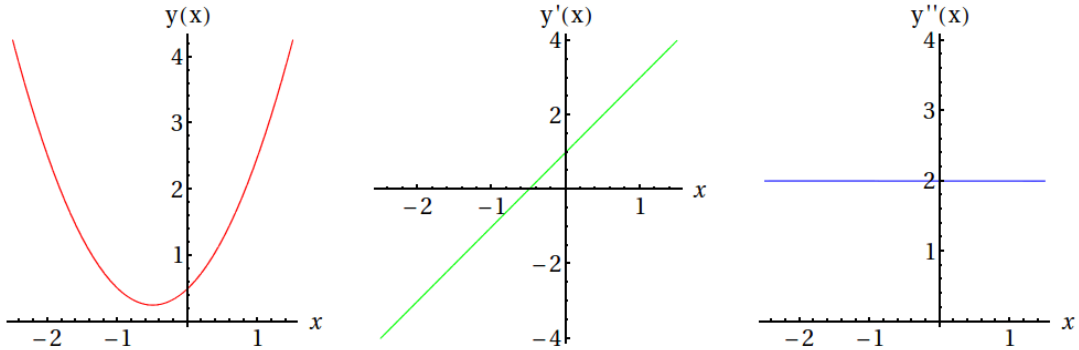
$$D_x v(u(x)) = \frac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2} \Bigg/ \left(1+\left(\frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)^2\right) = \frac{1+\sin(x)+\cos(x)}{3+2\sin(x)+2\cos(x)}$$

iv. $u(x) = \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}$

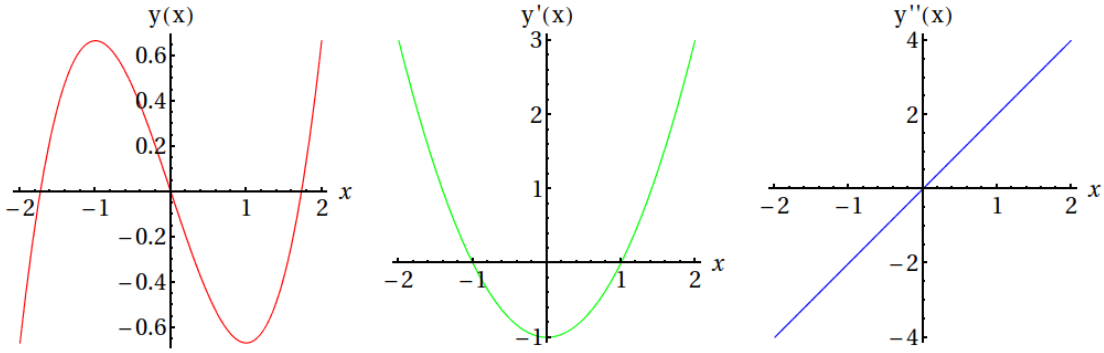
$$D_x v(u(x)) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \Big/ \left(1+(\tan^{-1}(1+x^2))^2\right)$$

4. Vorbereitung auf die Monotonie und Krümmung:

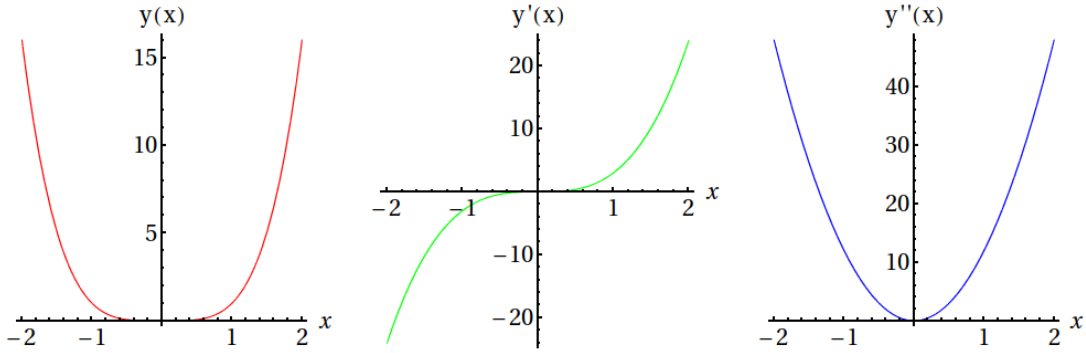
(a) $y_1(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$, $y_1'(x) = 2x+1$, $y_1''(x) = 2$, grafische Darstellung:



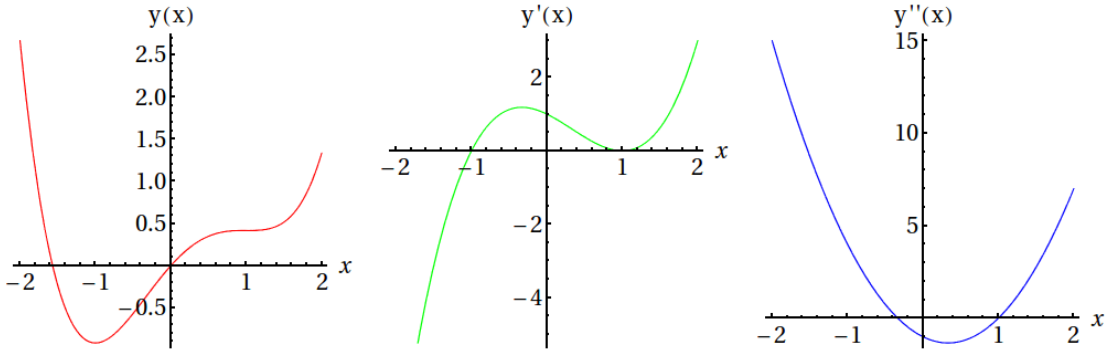
(b) $y_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, $y_2'(x) = x^2 - 1$, $y_2''(x) = 2x$, grafische Darstellung:



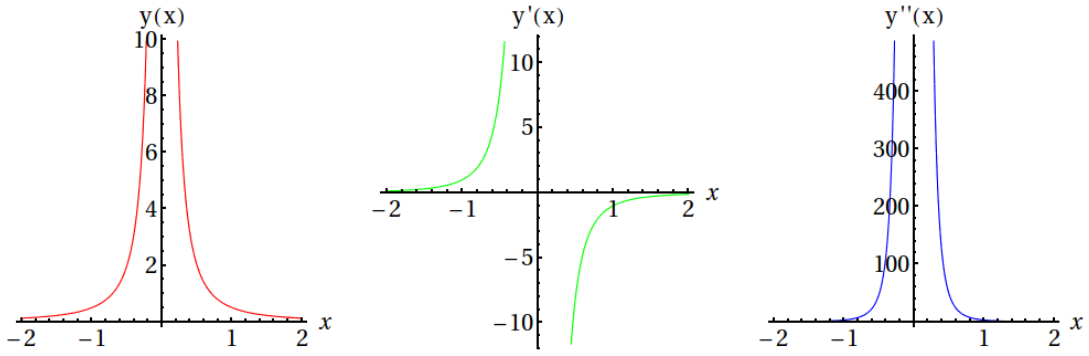
(c) $y_3(x) = x^4$, $y_3'(x) = 4x^3$, $y_3''(x) = 12x^2$, grafische Darstellung:



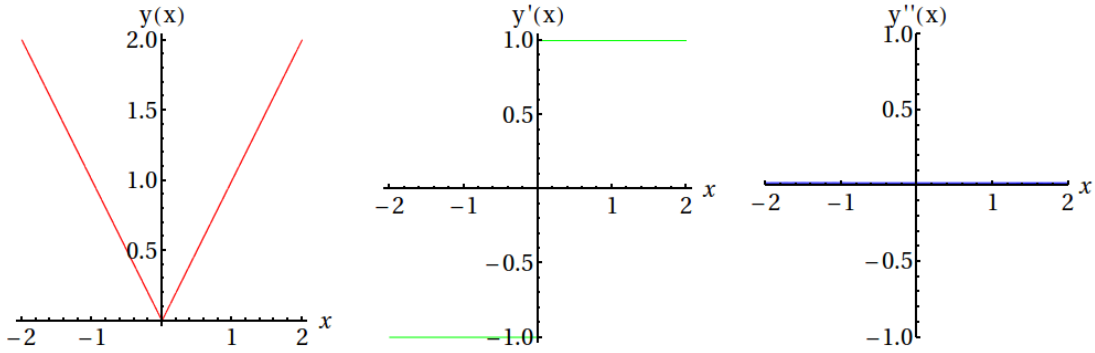
(d) $y_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$, $y_4'(x) = 1 - x - x^2 + x^3$, $y_4''(x) = -1 - 2x + 3x^2$, grafische Darstellung:



(e) $y_5(x) = \frac{1}{2}x^{-2}$, $y_5'(x) = -x^{-3}$, $y_5''(x) = 3x^{-4}$, grafische Darstellung:



(f) $y_6(x) = |x|$, $y_6'(x) = \operatorname{sign}(x)$, $x \neq 0$, (Seite 79 im Skriptum), $y_6''(x) = 0$, $x \neq 0$, grafische Darstellung:

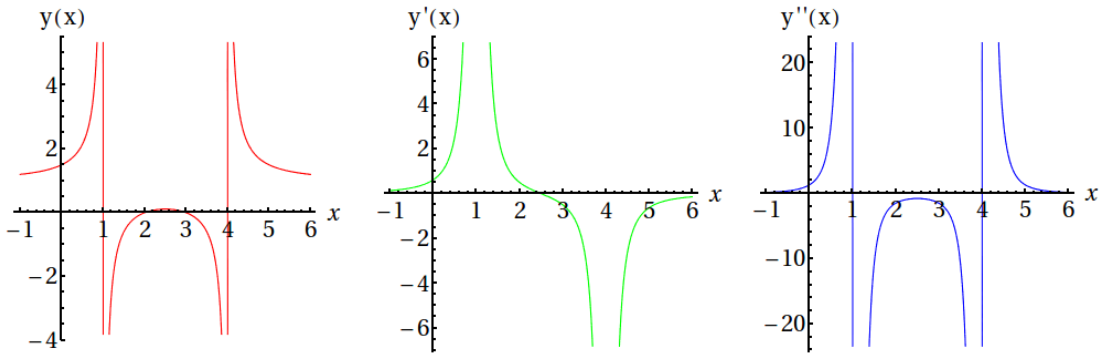


(g) $y_7(x) = (x^2 - 5x + 6)/(x^2 - 5x + 4)$,

$$y_7'(x) = \frac{(2x-5)(x^2-5x+4) - (x^2-5x+6)(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{10-4x}{(x^2-5x+4)^2},$$

$$y_7''(x) = \frac{-4(x^2-5x+4)^2 - (10-4x)2(x^2-5x+4)(2x-5)}{(x^2-5x+4)^4} = \frac{12(7-5x+x^2)}{(4-5x+x^2)^3},$$

grafische Darstellung:



(h) Für $v(x) = |x|$ und $v'(x) = \operatorname{sign}(x)$, $x \neq 0$, (Seite 79 im Skriptum) folgt mit der Kettenregel

$$D_x v(u(x)) = v'(u(x)) = \operatorname{sign}(u(x))u'(x), \quad u(x) \neq 0.$$

Die Ableitung existiert nicht, wo $u(x) = 0$ gilt, außer $u'(x) = 0$ zusätzlich gilt. Insbesondere gelten

$$D_x 2|x+1| = 2D_x|x+1| = 2\text{sign}(x+1), \quad x+1 \neq 0$$

$$D_x 3|x| = 3D_x|x| = 3\text{sign}(x), \quad x \neq 0$$

und

$$D_x 2|x-1| = 2D_x|x-1| = 2\text{sign}(x-1), \quad x-1 \neq 0$$

Daher für $y_8(x) = 2|x+1| - 3|x| + 2|x-1| - 1$ folgt

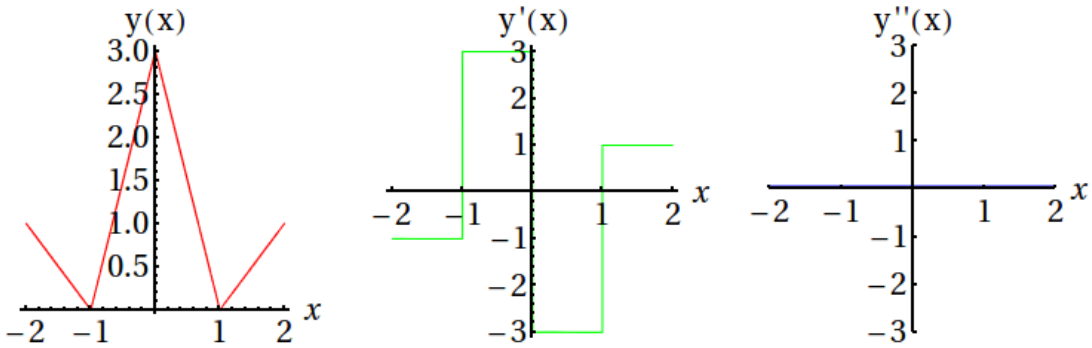
$$y_8'(x) = 2D_x|x+1| - 3D_x|x| + 2D_x|x-1| - D_x 1$$

$$= 2\text{sign}(x+1) - 3\text{sign}(x) + 2\text{sign}(x-1), \quad x \neq -1, 0, +1.$$

Die Ableitung existiert nicht in $x = -1, 0, +1$. Da $y_8'(x)$ in den Teilintervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ und $(0, +1)$ konstant ist, folgt

$$y_8''(x) = 0, \quad x \neq -1, 0, +1$$

Die grafische Darstellung ist

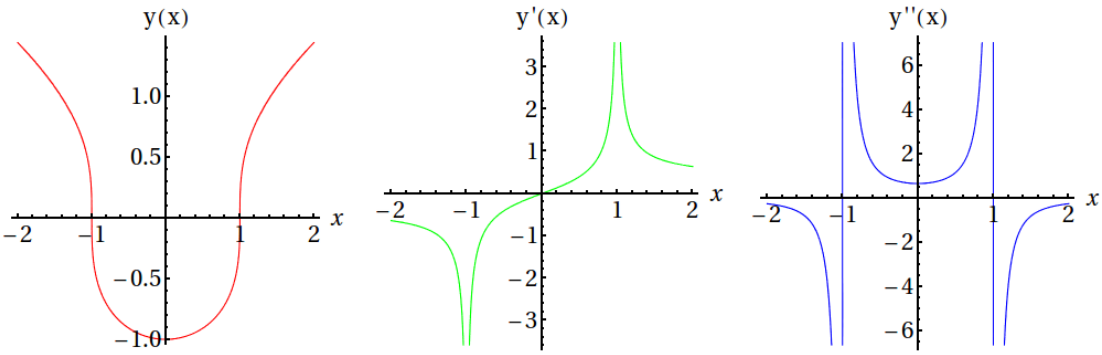


(i) $y_9(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$,

$$y_9'(x) = \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}(2x) = \frac{2x}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$y_9''(x) = \frac{2 \cdot 3(x^2-1)^{\frac{2}{3}} - (2x) \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}(2x)}{9(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} = -\frac{2(x^2+3)}{9(x^2-1)^{\frac{5}{3}}}$$

grafische Darstellung:



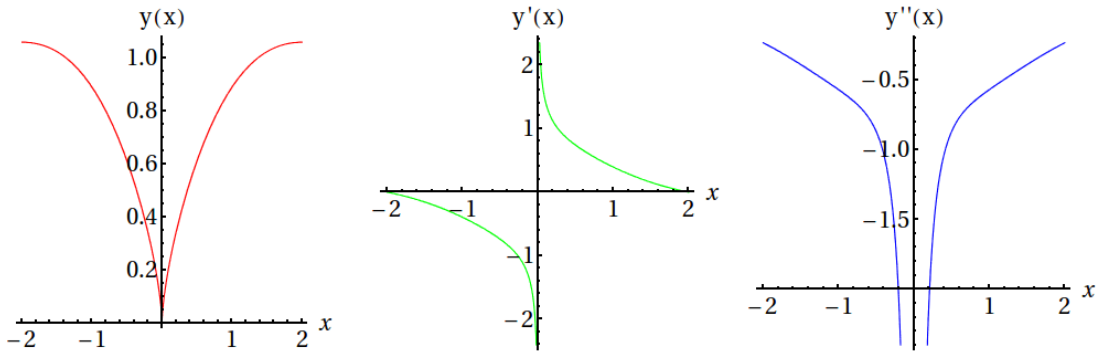
(j) $y_{10}(x) = 8x^{\frac{2}{3}}/(8+x^2)$,

$$y'_{10}(x) = \frac{8 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(8+x^2) - 8x^{\frac{2}{3}}(2x)}{(8+x^2)^2} = \frac{32(4-x^2)}{3x^{\frac{1}{3}}(8+x^2)^2}$$

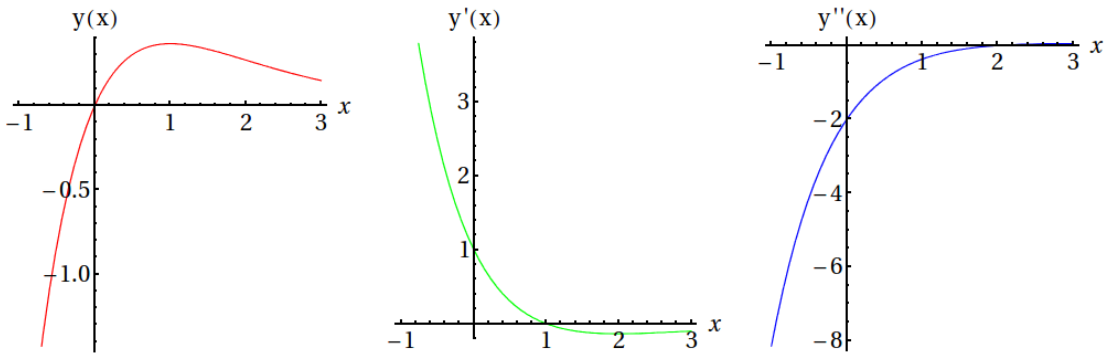
$$y''_{10}(x) = \frac{-32 \cdot 2x(3x^{\frac{1}{3}}(8+x^2)^2) - 32(4-x^2)[3 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(8+x^2)^2 + 3x^{\frac{1}{3}}2(8+x^2)(2x)]}{9x^{\frac{2}{3}}(8+x^2)^4}$$

$$= \frac{32(7x^4 - 92x^2 - 32)}{9x^{\frac{4}{3}}(8+x^2)^3}$$

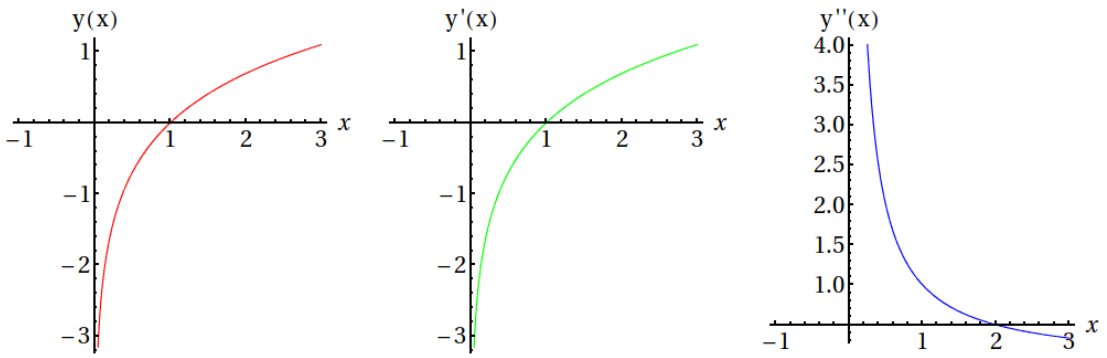
grafische Darstellung:



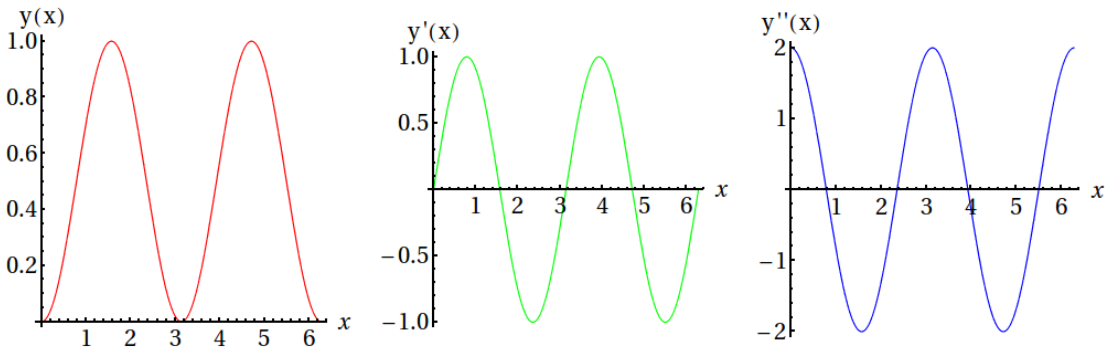
(k) $y_{11}(x) = xe^{-x}$, $y'_{11}(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$, $y''_{11}(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$, grafische Darstellung:



(l) $y_{12}(x) = x\ln(x) - x$, $y'_{12}(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$, $y''_{12}(x) = 1/x$, grafische Darstellung:



(m) $y_{13}(x) = \sin^2(x)$, $y'_{13}(x) = 2\sin(x)\cos(x)$, $y''_{13}(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$, grafische Darstellung:



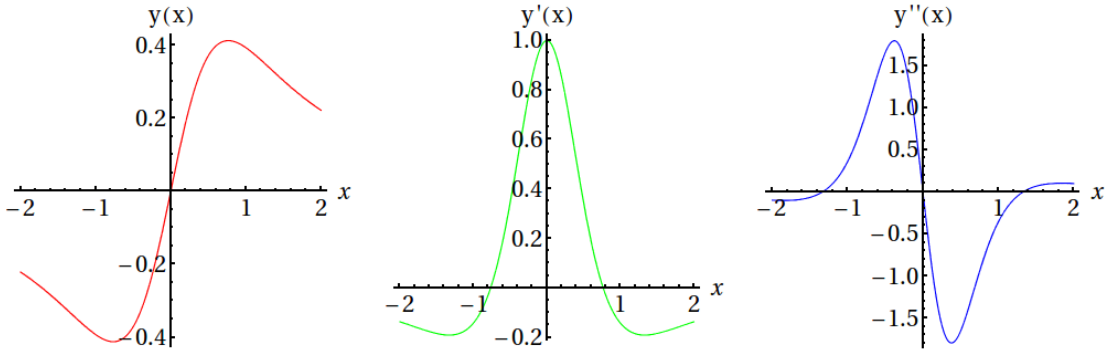
(n) $y_{14}(x) = \tan^{-1}(x)/(1+x^2)$,

$$y'_{14}(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}(1+x^2) - \tan^{-1}(x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1 - 2x\tan^{-1}(x)}{(1+x^2)^2}$$

$$y''_{14}(x) = \frac{(-2\tan^{-1}(x) - 2x\frac{1}{1+x^2})(1+x^2)^2 - (1-2x\tan^{-1}(x))2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}$$

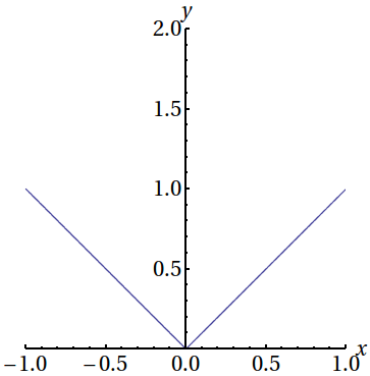
$$= \frac{-6x + (6x^2-2)\tan^{-1}(x)}{(1+x^2)^3}$$

grafische Darstellung:



5. Differenzierbarkeit:

(a) Die grafische Darstellung von $z_1(x) = |x|$ ist



und ein Knick ist in $(0,0)$ ersichtlich. Die Ableitung ist

$$z_1'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{z_1(x+h) - z_1(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}$$

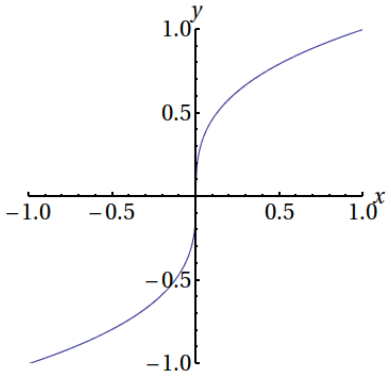
$$= \lim_{h\to 0} \begin{cases} \dfrac{+(x+h) - x}{h}, & x > 0 \\ \dfrac{-(x+h) + x}{h}, & x < 0 \\ \dfrac{|h|}{h}, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ ?, & x = 0 \end{cases} = \operatorname{sign}(x), \quad x \neq 0$$

d.h. $z_1'(x) = \operatorname{sign}(x)$ gilt nur für $x \neq 0$. Die Ableitung an der Stelle $x = 0$ existiert nicht, wie man folgendmaßen sieht. Die einseitigen Grenzwerte existieren,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1, \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{+h}{h} = +1$$

aber sie stimmen nicht überein. Sollte der (allgemeine, nicht einseitige) Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ existieren, muss ein solcher Wert von $|h|/h$ angenähert werden, wenn h sich an $h = 0$ *beliebig* annähern würde, insbesondere von links oder von rechts. Da unterschiedliche Werte von links und rechts angenähert werden, existiert der (allgemeine, nicht einseitige) Grenzwert nicht. Daher ist z_1 an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

(b) Die grafische Darstellung von $z_2(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ist



und ein Vertikal ist in $(0,0)$ ersichtlich. Die Ableitung ist

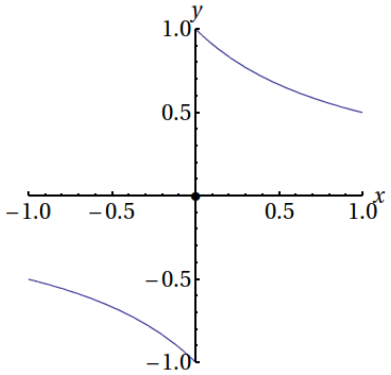
$$z_2'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad x \neq 0$$

und für $x = 0$,

$$z_2'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{z_2(0+h) - z_2(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

d.h. der Grenzwert ist uneigentlich, und die Ableitung kann keinen reelen Wert in $x = 0$ annehmen. Daher ist z_2 an dieser Stelle nicht differenzierbar.

(c) Die grafische Darstellung von $z_3(x) = \operatorname{sign}(x)/(1 + |x|)$ ist



und eine Unstetigkeit ist in $(0,0)$ ersichtlich. Damit eine eindeutige Tangente an einer Stelle existiert, muss die Kurve an der Stelle ununterbrochen sein, d.h. eine differenzierbare Funktion muss stetig sein. Da z_3 an der Stelle $x = 0$ nicht stetig ist, ist die Funktion hier nicht differenzierbar. Sonst wird die Ableitung an anderen Stellen folgendermaßen bestimmt.

$$z_3'(x) = D_x \begin{cases} \dfrac{+1}{1+x}, & x > 0 \\ \dfrac{-1}{1-x}, & x < 0 \end{cases} = D_x \begin{cases} (x+1)^{-1}, & x > 0 \\ (x-1)^{-1}, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -(x+1)^{-2}, & x > 0 \\ -(x-1)^{-2}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{1}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \end{cases} = -\frac{1}{(1+|x|)^2}, \quad x \neq 0$$

Zur Bestätigung sieht man folgendermaßen, dass die Ableitung an der Stelle $x = 0$ nicht existiert,

$$z_3'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{z_3(0+h) - z_3(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sign}(h)}{h(1+|h|)} = \lim_{h\to 0} \begin{cases} \dfrac{+1}{h(1+h)}, & h > 0 \\ \dfrac{-1}{h(1-h)}, & h < 0 \end{cases} = +\infty$$

d.h. der Grenzwert ist uneigentlich, und die Ableitung kann keinen reelen Wert in $x = 0$ annehmen. Daher ist z_3 an dieser Stelle nicht differenzierbar.

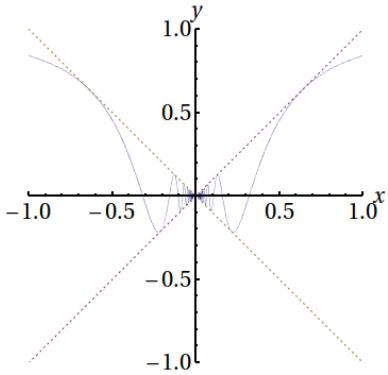
Achtung: Man darf zeilenweise ableiten, nur wenn eine für die Funktion definierende Formel in einem Intervall gilt, z.B. in der folgenden Darstellung,

$$z_3(x) = \begin{cases} \dfrac{+1}{1+x}, & x > 0 \\ \dfrac{-1}{1-x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

gilt die Formel $z_3(0) = 0$ nur in einem Punkt $x = 0$, und die irrtümliche (zeilenweise) Rechnung $z_3'(0) = D_x 0 = 0$ stimmt mit dem (richtigen) Ergebnis nicht überein, dass z_3 in $x = 0$ nicht stetig und daher nicht differenzierbar ist. Die anderen definierenden Formeln gelten in Intervallen, und hier darf man zeilenweise ableiten: $z_3'(x) = D_x[+1/(1+x)]$, $x > 0$, $z_3'(x) = D_x[-1/(1-x)]$, $x < 0$.

Bemerkung: Die Ableitungsfunktion $z_3'(x)$ lässt sich mit dem Punkt $(0,1)$ stetig ergänzen. Man sieht von der grafischen Darstellung von $z_3(x)$, dass die Steigung links und rechts von $x = 0$ gegen -1 strebt.

(d) Die grafische Darstellung von $z_4(x) = x\sin(1/x)$, $x \neq 0$, $z_4(0) = 0$, ist



wobei die Kurve von $z_4(x)$ zwischen den gestrichelten Kurven $y_1(x) = +|x|$ und $y_2(x) = -|x|$ liegt. Da $z_4(x)$ sich in der Nähe von $x = 0$ an die nicht differenzierbaren Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ annähert, gibt es schon den Hinweis, dass $z_4(x)$ an dieser Stelle nicht differenzierbar ist. Dies ist der Fall, wie man mit der folgenden direkten Rechnung bestätigt.

$$z_4'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{z_4(0+h) - z_4(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sin(1/h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \sin(1/h) = \ ?$$

Wie im 1. Beispiel im Kapitel 5 gesehen, es gelten

$$h_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \sin(1/h_n) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

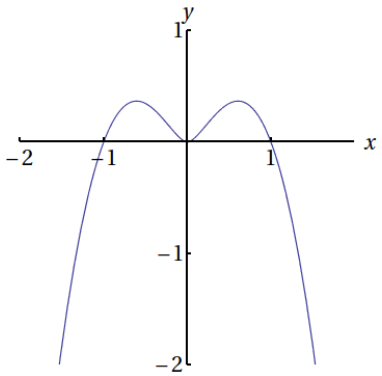
und

$$h_m = -\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2m\pi} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \sin(1/h_m) = \sin(-\tfrac{\pi}{2} - 2m\pi) = -1 \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} -1$$

d.h. unterschiedliche Werte werden von $\sin(1/h)$ angenähert, wenn h sich an 0 auf unterschiedlichen Wegen annähert. Daher existiert der Grenzwert $\lim_{h\to 0} \sin(1/h)$ nicht. Also ist $z_4(x)$ an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar. Sonst für $x \neq 0$ gilt

$$z_4'(x) = \sin(1/x) + x\cos(1/x)(-1/x^2) = \sin(1/x) - \frac{\cos(1/x)}{x^2}$$

(e) Die grafische Darstellung von $z_5(x) = x^2 \ln(1/x^2)$, $x \neq 0$, $z_5(0) = 0$, ist



und die globale Glattheit der Kurve ist ersichtlich, d.h. trotz der scheinbar schwierigen Stelle $x = 0$ in der Formel für $z_5(x)$ ist zu vermuten, dass die Funktion an jeder Stelle differenzierbar ist. Dies ist der Fall, wie man mit der folgenden direkten Rechnung bestätigt. (Seite 63 im Skriptum)

$$z_5'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{z_5(0+h) - z_5(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \ln(1/h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} h\ln(h^{-2}) = -2\lim_{h\to 0} h\ln(h) = 0$$

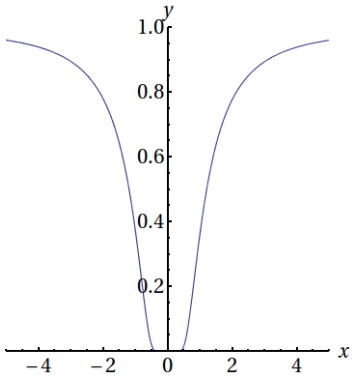
Sonst für $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} z_5'(x) = D_x x^2 \ln(x^{-2}) = -D_x x^2 \ln(x^2) &= -\left[(x^2)' \ln(x^2) + x^2 (\ln(x^2))'\right] \\ &= -2x \ln(x^2) - x^2 \frac{(x^2)'}{x^2} = -2x \ln(x^2) - 2x \end{aligned}$$

wobei die letzte Logarithmusfunktion sich (für $x > 0$ *oder* $x < 0$) so umschreiben lässt:

$$\ln(x^2) = \ln(|x|^2) = 2\ln(|x|)$$

(f) Die grafische Darstellung von $z_6(x) = \exp(-1/x^2)$, $x \neq 0$, $z_6(0) = 0$, ist



und die globale Glattheit der Kurve ist ersichtlich, d.h. trotz der scheinbar schwierigen Stelle $x = 0$ in der Formel für $z_6(x)$ ist zu vermuten, dass die Funktion an jeder Stelle differenzierbar ist. Dies ist der Fall, wie man mit der folgenden direkten Rechnung bestätigt.

$$z_6'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{z_6(0+h) - z_6(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(-1/h^2)}{h} = 0$$

Um die letzte Gleichung zu zeigen, berechnet man die übereinstimmenden einseitigen Grenzwerte (Seite 63 im Skriptum):

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{e^{-1/h^2}}{h} \overset{\sqrt{t} = -1/h}{=} -\lim_{t \to \infty} \sqrt{t} e^{-t} = 0$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-1/h^2}}{h} \overset{\sqrt{t} = +1/h}{=} +\lim_{t \to \infty} \sqrt{t} e^{-t} = 0$$

d.h. $z_6'(0) = 0$. Sonst für $x \neq 0$ gilt

$$z_6'(x) = D_x e^{-x^{-2}} = e^{-x^{-2}} D_x(-x^{-2}) = e^{-x^{-2}}(+2x^{-3}) = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$$

8 Monotonie, Lokale Extrema, Krümmung, Wendepunkte

8.1 Beispiele

1. Steigende und fallende Funktionen:

   Für die Funktion $r(t) = t/(2t+3)$ bestimmen Sie die Werte $t \in \mathbb{R}_+$, bei denen gilt

   $$|r(t) - r^*| < 1/10 \quad \text{wobei} \quad r^* = \lim_{t\to\infty} r(t)$$

   Hinweis: Man bestimmt die Stelle τ, bei der die *Gleichung* gilt

   $$|r(t) - r^*| = 1/10$$

   und dann zeigt man wie auf Seite 218 im Skriptum, die gewünschte *Ungleichung* gilt für $t > \tau$.

2. Bildbereich durch lokale Extrema:

   Anhand der lokalen Extrema bestimmen Sie die Bildbereiche der folgenden Funktionen auf den gegebenen Definitionsbereichen.

   (a) $p_1(x) = (4 - 5x^2 + x^4)/2$, $D = [-2, +2]$
   (b) $p_2(x) = 1 + x - x^3 - x^4$, $D = [-2, +2]$
   (c) $r_1(x) = 3x/(1 + x^2)$, $D = [-2, +2]$
   (d) $r_2(x) = (x^2 - 5x + 6)/(x^2 - 5x + 4)$, $D = [0, 5]\backslash\{1, 3\}$

   Hinweis: Sehen Sie Seiten 31, 35 und 68 im Skriptum.

3. Kriterien der lokalen Extrema:

   (a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der auf Seiten 92 - 101 im Skriptum abgebildeten Funktionen, für die das Kriterium der ersten Ableitung zutrifft.
   (b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der auf Seiten 107 - 116 im Skriptum abgebildeten Funktionen, für die das Kriterium der zweiten Ableitung zutrifft.

4. Sonderfälle von Extremstellen:

   Stellen Sie die folgenden Funktionen $f_1(x), \ldots, f_4(x)$ grafisch dar, und lösen Sie anschließend die Aufgabestellungen.

   (a) Zeigen Sie, $f_1(x) = x^4$ besitzt eine lokale Minimumstelle in $x = 0$, die mit dem Kriterium der ersten Ableitung aber nicht mit dem Kriterium der zweiten Ableitung identifiziert wird.
   (b) Zeigen Sie, $f_2(x) = \text{sign}(x)/(1 + |x|)$, $x \neq 0$, $f_2(0) = 1$, besitzt eine lokale Maximumstelle in $x = 0$. Findet man diese Stelle mit dem Kriterium der ersten oder der zweiten Ableitung?
   (c) Zeigen Sie, $f_3(x) = x^3$ hat eine Nullstelle der ersten Ableitung, die keiner lokalen Extremstelle entspricht.
   (d) Zeigen Sie, $f_4(x) = \sqrt[3]{x^2}$ besitzt eine lokale Minimumstelle in $x = 0$, die mit dem Kriterium der ersten Ableitung aber nicht mit dem Kriterium der zweiten Ableitung identifiziert wird, und zwar gibt es keine zweite Ableitung an dieser Stelle.

5. Wendepunkte:

(a) Zeigen Sie, $g_1(x) = x^4$ besitzt eine Nullstelle der zweiten Ableitung in $x = 0$, obwohl diese Stelle keinem Wendepunkt entspricht.

(b) Zeigen Sie, $g_2(x) = \sqrt[3]{x}$ besitzt keine zweite Ableitung in $x = 0$, aber diese Stelle entspricht einem Wendepunkt.

(c) Bestimmen Sie alle Wendepunkte der auf Seiten 107 - 116 im Skriptum abgebildeten Funktionen.

6. Logistisches Wachstum:

(a) Für verschiedene Parameter (K, t_0, τ) stellen Sie die *logistische Funktion* grafisch dar,

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-(t-t_0)/\tau}}$$

Hinweis: Durch diese grafischen Darstellungen wird ersichtlich, K ist die *Kapazität* einer Population, t_0 ist die *Wendezeit* des Wachstums und τ ist die *Zeitskala* des Wachstums.

(b) Für die Werte $(K, t_0, \tau) = (1, 0, 1)$ zeigen Sie, $(t, P) = (0, 1/2)$ ist ein Wendepunkt für die Funktion.

(c) Mit den Daten $P(0) = 1$, $P(\ln(2)) = 4/3$ und $P(\ln(4)) = 8/5$ bestimmen Sie die entsprechenden Parameter (K, t_0, τ).

8.2 Lösungen

1. Steigende und Fallende Funktionen:

   Die waagerechte Asymptote für die Funktion $r(t) = t/(2t+3)$ ist gegeben durch

$$r^* = \lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{2t+3}\left(\frac{t^{-1}}{t^{-1}}\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2+3/t} = \frac{1}{2}$$

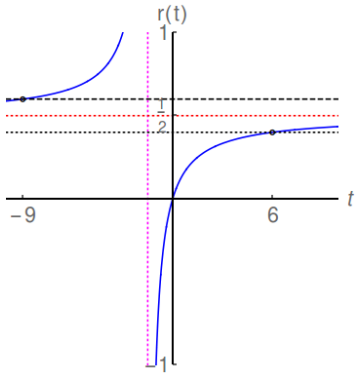
   Die Gleichung $|r^* - r(\tau)| = 1/10$ gilt, wenn entweder $r^* - r(\tau) = -1/10$ oder $r^* - r(\tau) = 1/10$ gelten. Die Gleichung $r^* - r(t_1) = -1/10$ gilt, wenn

$$-\frac{1}{10} = r^* - r(t_1) = \frac{1}{2} - \frac{t_1}{2t_1+3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{5} = \frac{t_1}{2t_1+3} \quad \Leftrightarrow \quad 6t_1 + 9 = 5t_1 \quad \text{oder} \quad t_1 = -9$$

   Die Gleichung $r^* - r(t_2) = 1/10$ gilt, wenn

$$\frac{1}{10} = r^* - r(t_2) = \frac{1}{2} - \frac{t_2}{2t_2+3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{5} = \frac{t_2}{2t_2+3} \quad \Leftrightarrow \quad 4t_2 + 6 = 5t_2 \quad \text{oder} \quad t_2 = 6$$

   Man sieht diese Punkte $(t_1, r(t_1)) = (-9, r(-9))$ und $(t_2, r(t_2)) = (6, r(6))$ in der folgenden grafischen Darstellung des Beispiels.



   Die Grafik für $r(t)$ ist blau, die waagerechte Asymptote ($y = r^* = \frac{1}{2}$) ist gepunktet rot, die senkrechte Asymptote ($x = -\frac{2}{3}$) ist gepunktet magenta und der *Schlauch* rund um die waagerechte Asymptote (d.h. $y = r^* - \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$, $y = r^* + \frac{1}{10} = \frac{6}{10}\}$) liegt zwischen den schwarz gestrichelten waagerechten Linien.

   Der Wert $\tau \in \mathbb{R}_+$ (d.h. $\tau > 0$ und $t_1 = -9 \notin \mathbb{R}_+, t_2 = +6 \in \mathbb{R}_+$), bei dem $|r^* - r(\tau)| = 1/10$ gilt, ist daher $\tau = t_2 = 6$.

   Die Ableitung von $r(t)$ erfüllt

$$r'(t) = \frac{1(2t+3) - t(2)}{(2t+3)^2} = \frac{3}{(2t+3)^2} > 0, \quad \forall t > \tau \quad (\text{tatsächlich } \forall t \neq -\tfrac{3}{2})$$

   und daher ist $r(t)$ streng steigend auf dem Intervall $(\tau, +\infty)$, wie man in der oberen Grafik sieht. Daher für $t > \tau$ gilt

$$r^* - \frac{1}{10} = r(\tau) < r(t) < \lim_{t\to\infty} = r^*$$

   Wenn mit (-1) multipliziert wird, ergibt sich

$$\frac{1}{10} - r^* > -r(t) > -r^*$$

Wenn r^* summiert wird, ergibt sich

$$\frac{1}{10} > r^* - r(t) > 0$$

und daher folgt die gewünschte Ungleichung

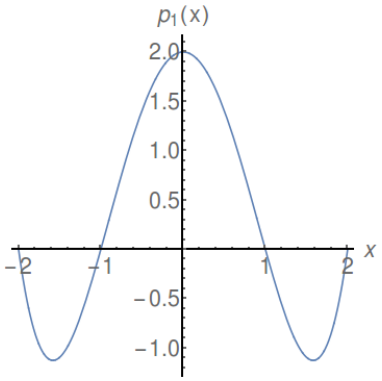
$$0 < r^* - r(t) = |r^* - r(t)| < \frac{1}{10}, \quad \forall t > \tau = 6.$$

2. Bildbereich durch lokale Extrema:

   (a) Das Polynom

   $$p_1(x) = (4 - 5x^2 + x^4)/2 \quad \text{mit} \quad D = [-2, +2]$$

   hat die grafische Darstellung,



   Die Ableitung ist

   $$p_1'(x) = (-10x + 4x^3)/2 = x(2x^2 - 5) = 2x(x + \sqrt{5/2})(x - \sqrt{5/2})$$

   Anhand der folgenden Tabelle,

	$[-2, -\sqrt{5/2})$	$(-\sqrt{5/2}, 0)$	$(0, \sqrt{5/2})$	$(\sqrt{5/2}, +2]$
$2x$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x + \sqrt{5/2})$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x - \sqrt{5/2})$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$p_1'(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
p_1 ist	fallend	steigend	fallend	steigend

   sieht man, $p_1(x)$ besitzt lokale Extrema in

   $$x = -2, \quad -\sqrt{5/2}, \quad 0, \quad +\sqrt{5/2} \quad \text{und} \quad +2.$$

   Auswertungen in diesen Stellen sind

   $$p_1(-2) = 0, \quad p_1(-\sqrt{5/2}) = -9/8, \quad p_1(0) = 2, \quad p_1(+\sqrt{5/2}) = -9/8 \quad \text{und} \quad p_1(+2) = 0.$$

   Da $p_1(x)$ in den jeweiligen Teilintervallen, $[-2, -\sqrt{5/2})$, $(\sqrt{5/2}, 0)$, $(0, \sqrt{5/2})$ und $(\sqrt{5/2}, 2]$, stetig und monoton ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass $p_1(x)$ genau alle Werte annimmt, die zwischen den p_1-Werten der Endpunkte dieser Teilintervalle liegen. Insbesondere gelten die folgenden Aussagen.

   In $[-2, -\sqrt{5/2})$ nimmt $p_1(x)$ genau die Werte zwischen $p_1(-2) = 0$ und $p_1(-\sqrt{5/2}) = -9/8$ an.

   In $(-\sqrt{5/2}, 0)$ nimmt $p_1(x)$ genau die Werte zwischen $p_1(-\sqrt{5/2}) = -9/8$ und $p_1(0) = 2$ an.

   In $(0, \sqrt{5/2})$ nimmt $p_1(x)$ genau die Werte zwischen $p_1(0) = 2$ und $p_1(\sqrt{5/2}) = -9/8$ an.

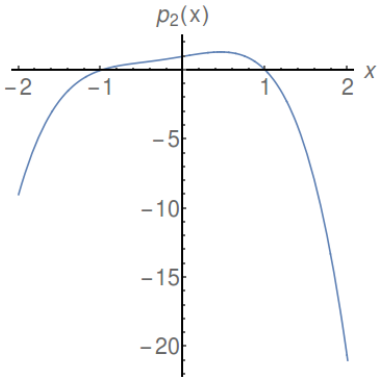
   In $(\sqrt{5/2}, 2]$ nimmt $p_1(x)$ genau die Werte zwischen $p(\sqrt{5/2}) = -9/8$ und $p_1(2) = 0$ an.

   Daher ist der Bildbereich $B = [-9/8, 2]$. (vgl. Seite 31 im Skriptum)

(b) Das Polynom

$$p_2(x) = 1 + x - x^3 - x^4 \quad \text{mit} \quad D = [-2, +2]$$

hat die grafische Darstellung,



Die Ableitung ist

$$p_2'(x) = 1 - 3x^2 - 4x^3$$

Wegen der Stetigkeit von $p_2'(x)$ und den Auswertungen $p_2'(0) = 1$ und $p_2'(1) = -6$ existiert eine Nullstelle für $p_2'(x)$ im Intervalle $[0, 1]$. Man sieht mit dem Bisektionsverfahren,

c	$p_2'(c)$	a	b
0.50000	−0.25000	0.00000	1.00000
0.25000	0.75000	0.00000	0.50000
0.37500	0.36719	0.25000	0.50000
0.43750	0.09082	0.37500	0.50000
0.46875	−0.07117	0.43750	0.50000
0.45312	0.01189	0.43750	0.46875
0.46094	−0.02912	0.45312	0.46875
0.45703	−0.00849	0.45312	0.46094
0.45508	0.00173	0.45312	0.45703
0.45605	−0.00337	0.45508	0.45703
0.45557	−0.00082	0.45508	0.45605
0.45532	0.00046	0.45508	0.45557
0.45544	−0.00018	0.45532	0.45557
0.45538	0.00014	0.45532	0.45544
0.45541	−0.00002	0.45538	0.45544
0.45540	0.00006	0.45538	0.45541
0.45541	0.00002	0.45540	0.45541

$p_2'(x)$ besitzt eine Nullstelle in $x_3 \approx 0.45541$. Durch Polynomdivision

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & -4.00000x^3 & -3.00000x^2 & & 1.00000 & \div \; x - 0.45541 \;=\; -4.00000x^2 - 4.82164x - 2.19582 \\
\ominus & -4.00000x^3 & +1.82164x^2 & & & \\
\hline
 & 0 & -4.82164x^2 & & 1 & \\
\ominus & & -4.82164x^2 & +2.19582x & 1.00000 & \\
\hline
 & & 0 & -2.19582x & 1.00000 & \\
\ominus & & & -2.19582x & 1.00000 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

ergibt sich die Faktorisierung,

$$p_2'(x) = (x - 0.45541)(-4.00000x^2 - 4.82164x - 2.19582)$$

und die Nullstellen des quadratischen Faktors $(-4.00000x^2 - 4.82164x + 2.19582)$ sind

$$x_{1,2} = \frac{4.82164 \pm \sqrt{4.82164^2 - 4(-4.00000)(-2.19582)}}{2(-4.00000)} = \frac{4.82164 \pm \sqrt{-11.8849}}{-8.00000} \in \mathbb{C}$$

Daher ist $x_3 \approx 0.45541$ die *einzige* (reele) Nullstelle von $p_2'(x)$. Anhand der Stetigkeit von $p_2'(x)$ folgt mit dem Zwischenwertsatz durch die Auswertungen,

$$\begin{array}{lll} p_2'(0) = +1 > 0 & \text{dass} & p_2'(x) > 0 \text{ gilt in } [-2, x_3) \\ p_2'(1) = -6 < 0 & \text{dass} & p_2'(x) < 0 \text{ gilt in } (x_3, +2] \end{array}$$

Daher besitzt $p_2(x)$ lokale Extrema in

$$x = -2, \quad x_3 \approx 0.45541 \quad \text{und} \quad +2.$$

Auswertungen in diesen Stellen sind

$$p_2(-2) = -9, \quad p_2(x_3) = \mu \approx 1.31794 \quad \text{und} \quad p_2(+2) = -21.$$

Da $p_2(x)$ in den jeweiligen Teilintervallen, $[-2, -x_3)$ und $(x_3, 2]$, stetig und monoton ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass $p_2(x)$ genau alle Werte annimmt, die zwischen den p_2-Werten der Endpunkte dieser Teilintervalle liegen. Insbesondere gelten die folgenden Aussagen.

In $[-2, x_3)$ nimmt $p_2(x)$ genau die Werte zwischen $p_2(-2) = -9$ und $p_2(x_3) = \mu \approx 1.31794$ an.

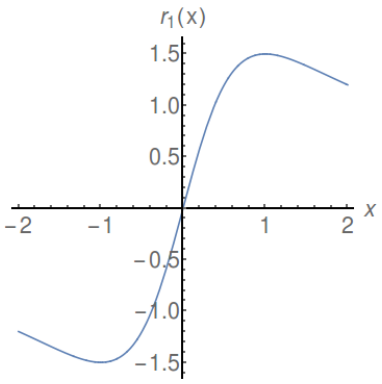
In $(x_3, +2]$ nimmt $p_2(x)$ genau die Werte zwischen $p_2(x_3) = \mu \approx 1.31794$ und $p_2(2) = -21$ an.

Daher ist der Bildbereich $B = [-21, \mu]$. (vgl. Seite 31 im Skriptum)

(c) Die rationale Funktion

$$r_1(x) = 3x/(1 + x^2) \quad \text{mit} \quad D = [-2, +2]$$

hat die grafische Darstellung



Die Ableitung ist

$$r_1'(x) = \frac{3(1 + x^2) - (3x)(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{3(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = \frac{3(1 + x)(1 - x)}{(1 + x^2)^2}$$

Anhand der folgenden Tabelle,

	$[-2, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, +2]$
$(1 + x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(1 - x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$
$(1 + x^2)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$r_1'(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$
r_1 ist	fallend	steigend	fallend

sieht man, $r_1(x)$ besitzt lokale Extrema in

$$x = -2, \quad -1, \quad +1 \qquad \text{und} \qquad +2.$$

Auswertungen in diesen Stellen sind

$$r_1(-2) = -6/5, \quad r_1(-1) = -3/2, \quad r_1(+1) = +3/2 \qquad \text{und} \quad r_1(+2) = 6/5.$$

Da $r_1(x)$ in den jeweiligen Teilintervallen, $[-2,-1)$, $(-1,+1)$ und $(+1,+2]$, stetig und monoton ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass $r_1(x)$ genau alle Werte annimmt, die zwischen den r_1-Werten der Endpunkte dieser Teilintervalle liegen. Insbesondere gelten die folgenden Aussagen.

In $[-2,-1)$ nimmt $r_1(x)$ genau die Werte zwischen $r_1(-2) = -6/5$ und $r_1(-1) = -3/2$ an.

In $(-1,+1)$ nimmt $r_1(x)$ genau die Werte zwischen $r_1(-1) = -3/2$ und $r_1(+1) = +3/2$ an.

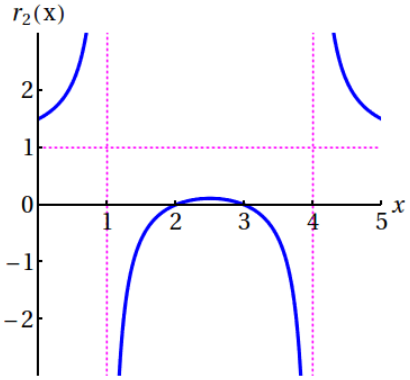
In $(+1,+2]$ nimmt $r_1(x)$ genau die Werte zwischen $r_1(+1) = +3/2$ und $r_1(+2) = +6/5$ an.

Daher ist der Bildbereich $B = [-3/2, 3/2]$. (vgl. Seite 35 im Skriptum)

(d) Die rationale Funktion

$$r_2(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} \quad \text{mit} \quad D = [0,5]\backslash\{1,3\}$$

hat die grafische Darstellung



Die Ableitung ist

$$r_2'(x) = \frac{(2x-5)(x^2-5x+4) - (x^2-5x+6)(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{10-4x}{(x^2-5x+4)^2}$$

Anhand der folgenden Tabelle,

	$[0,1)$	$(1,5/2)$	$(5/2,4)$	$(4,5]$
$(10-4x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
$(x^2-5x+4)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$r_2'(x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
r_2 ist	steigend	steigend	fallend	fallend

sieht man, $r_2(x)$ besitzt lokale Extrema in

$$x = 0, \quad 5/2 \qquad \text{und} \qquad 5.$$

Auswertungen in diesen Stellen und Grenzwerte in $\{1^{\pm}, 4^{\pm}\}$ (isolierte Punkte außerhalb von D) sind

$$r_2(0) = 3/2,$$

$$\lim_{x\to 1^-} r_2(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} r_2(x) = -\infty,$$
$$r_2(5/2) = 1/9$$
$$\lim_{x\to 4^-} r_2(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 4^+} r_2(x) = +\infty$$
$$\text{und} \quad r_2(5) = 3/2.$$

Da $r_2(x)$ in den jeweiligen Teilintervallen, $[0,1)$, $(1,5/2]$, $[5/2,4)$ und $(4,5]$, stetig und monoton ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass $r_2(x)$ genau alle Werte annimmt, die zwischen den r_2-Werten oder r_2-Grenzwerten der Endpunkte dieser Teilintervalle liegen. Insbesondere gelten die folgenden Aussagen.

In $[0,1)$ nimmt $r_2(x)$ genau die Werte zwischen $r_2(0) = 3/2$ und $\lim_{x\to 1^-} r_2(x) = +\infty$ an.

In $(1,5/2]$ nimmt $r_2(x)$ genau die Werte zwischen $\lim_{x\to 1^+} r_2(x) = -\infty$ und $r_2(5/2) = 1/9$ an.

In $[5/2,4)$ nimmt $r_2(x)$ genau die Werte zwischen $r_2(5/2) = 1/9$ und $\lim_{x\to 4^-} r_2(x) = -\infty$ an.

In $(4,5]$ nimmt $r_2(x)$ genau die Werte zwischen $\lim_{x\to 4^+} r_2(x) = +\infty$ und $r_2(5) = 3/2$ an.

Daher ist der Bildbereich $B = [3/2,+\infty) \cup (-\infty, 1/9]$. (vgl. Seite 68 im Skriptum)

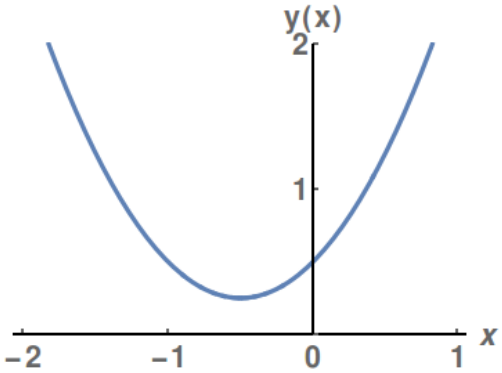
3. Kriterien der lokalen Extrema:

   (a) Die folgenden sind alle lokalen Extrema der auf Seiten 92 - 101 im Skriptum abgebildeten Funktionen, für die das Kriterium der ersten Ableitung zutrifft. Für Details über die Berechnung der Ableitungen sehen Sie Kapitel 7, Beispiel 4.

      i. Die grafische Darstellung der Funktion

$$y(x) = x^2 + x + 1/2, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4a, Kapitel 6)

$$y'(x) = 2x + 1 = 2(x + 1/2)$$

	$(-\infty,-1/2)$	$(-1/2,+\infty)$
$(x+1/2)$	$\ominus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\ominus$	$\oplus$
y ist	fallend	steigend

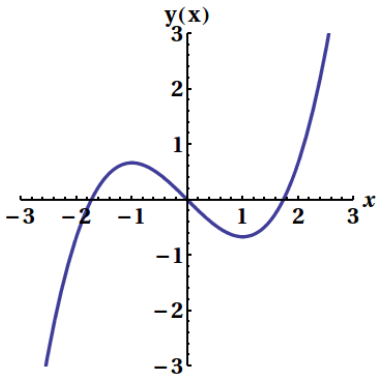
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = -\frac{1}{2}$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2,+1]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +1$.

ii. Die grafische Darstellung der Funktion

$$y(x) = x^3/3 - x, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4b, Kapitel 6)

$$y'(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, \infty)$
$(x+1)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-1)$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
y ist	steigend	fallend	steigend

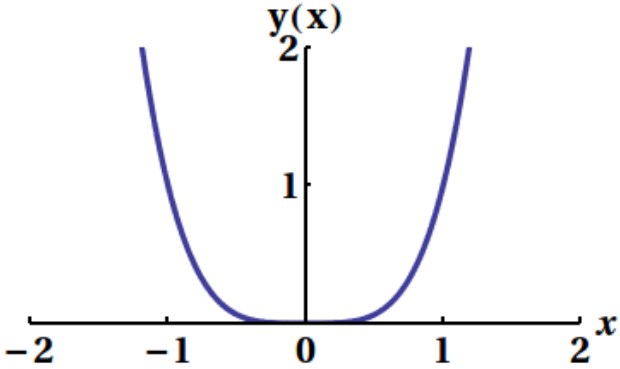
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Maximum in $x = -1$ und ein lokales Minimum in $x = +1$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung ein lokales Minimum in $x = -2$ und ein lokales Maximum in $x = +2$.

iii. Die grafische Darstellung der Funktion

$$y(x) = x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4c, Kapitel 6)

$$y'(x) = 4x^3$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
x^3	$\ominus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\ominus$	$\oplus$
y ist	fallend	steigend

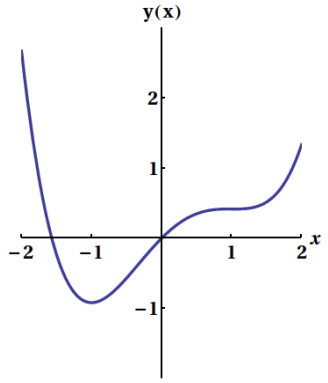
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = 0$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$.

iv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4d, Kapitel 6)

$$y'(x) = 1 - x - x^2 + x^3 = (x+1)(x-1)^2$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, \infty)$
$(x+1)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-1)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
y ist	fallend	steigend	steigend

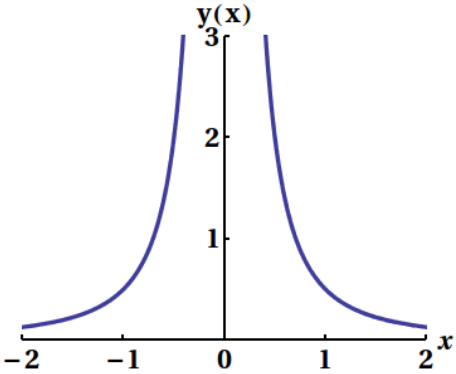
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = -1$. Laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es aber kein lokales Extremum in $x = 1$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$.

v. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{1}{2x^2}, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4e, Kapitel 6)

$$y'(x) = -\frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$-x^3$	$\oplus$	$\ominus$
$y'(x)$	$\oplus$	$\ominus$
y ist	steigend	fallend

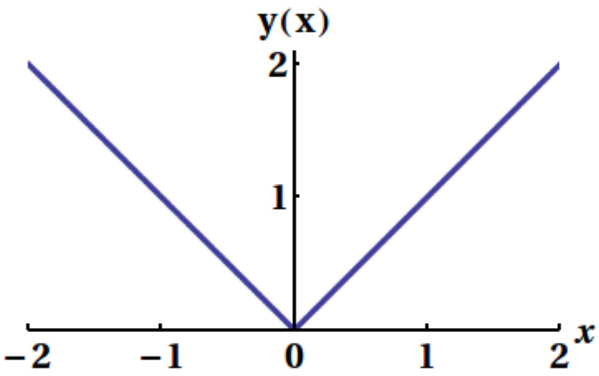
Anhand der Tabelle vermutet man, dass $x = 0$ ein lokales Maximum ist, aber diese Stelle ist nicht im Definitionsbereich der Funktion. Daher besitzt die Funktion *keine* lokalen Extrema.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Minima in $x = -2$ und in $x = +2$.

vi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = |x|, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4f, Kapitel 6)

$$y'(x) = \text{sign}(x), \quad x \neq 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\text{sign}(x) =$	-1	$+1$
$y'(x)$	$\ominus$	$\oplus$
y ist	fallend	steigend

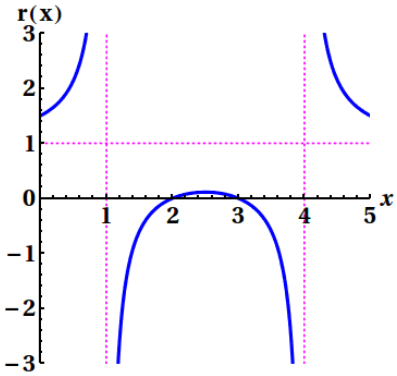
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = 0$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$.

vii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$r(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}, \quad D = \mathbb{R} \backslash \{1, 4\}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4g, Kapitel 6)

$$r'(x) = \frac{10-4x}{(x^2-5x+4)^2} = 4\frac{5/2-x}{(x-1)^2(x-4)^2}, \quad x \neq 1, 4$$

	$(-\infty, +1)$	$(+1, +5/2)$	$(+5/2, +4)$	$(+4, +\infty)$
$(x-1)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-4)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(5/2-x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
$r'(x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
r ist	steigend	steigend	fallend	fallend

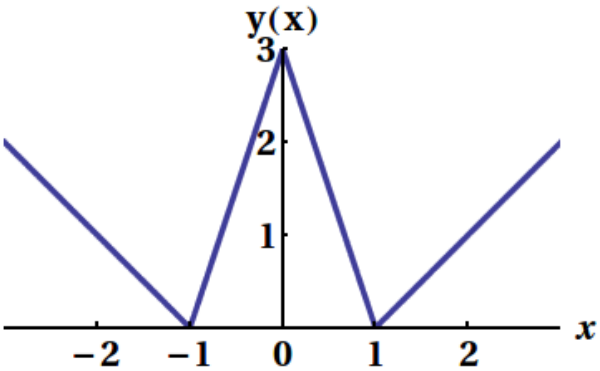
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Maximum in $x = 5/2$. Obwohl es hier wenig gefähr gibt, dass man die Stellen der senkrechten Asymptoten irrtümlich als Extremstellen nennen würde, darf man nicht vergessen, dass die Stellen $x = 1$ und $x = 4$ nicht im Definitionsbereich liegen, und daher sind sie für Extremstellen sowieso ausgeschlossen.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [0, 5]\backslash\{1, 4\}$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Minima in $x = 0$ und in $x = 5$.

viii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = 2|x+1| - 3|x| + 2|x-1| - 1, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4h, Kapitel 6)

$$y'(x) = 2\text{sign}(x+1) - 3\text{sign}(x) + 2\text{sign}(x-1), \quad x \neq -1, 0, +1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +1)$	$(+1, +\infty)$
$+2\text{sign}(x+1) =$	-2	$+2$	$+2$	$+2$
$-3\text{sign}(x) =$	$+3$	$+3$	-3	-3
$+2\text{sign}(x-1) =$	-2	-2	-2	$+2$
$y'(x) =$	-1	$+3$	-3	$+1$
y ist	fallend	steigend	fallend	steigend

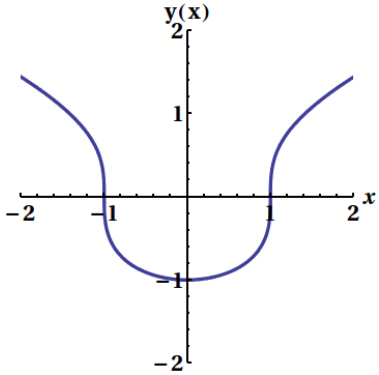
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es lokale Minima in $x = -1$ und $x = +1$ und ein lokales Maximum in $x = 0$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-3, +3]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in $x = -3$ und in $x = +3$.

ix. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4i, Kapitel 6)

$$y'(x) = \frac{2x}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}, \quad x \neq -1, +1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +1)$	$(+1, +\infty)$
$(x+1)^{\frac{2}{3}}$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-1)^{\frac{2}{3}}$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
x	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
y ist	fallend	fallend	steigend	steigend

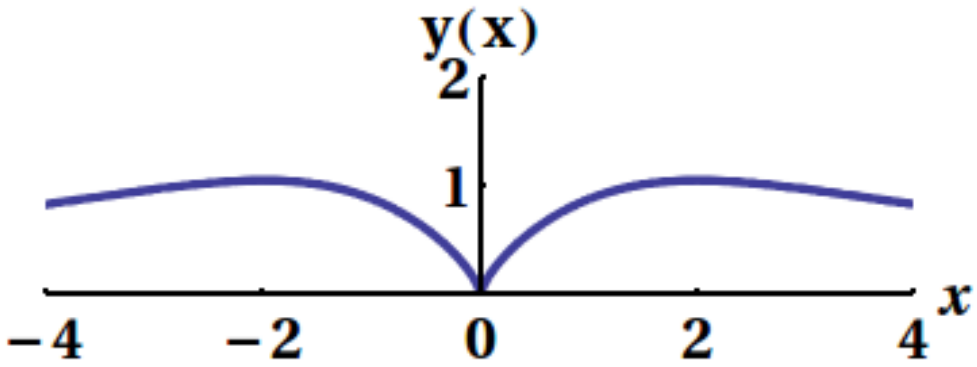
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = 0$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$.

x. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{8\sqrt[3]{x^2}}{8 + x^2}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4j, Kapitel 6)

$$y'(x) = \frac{32(4-x^2)}{3\sqrt[3]{x}(8+x^2)^2} = \frac{32}{3(8+x^2)^2}\frac{(2+x)(2-x)}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+2)$	$(+2,\infty)$
$(2+x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(2-x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$
$\sqrt[3]{x}$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$
y ist	steigend	fallend	steigend	fallend

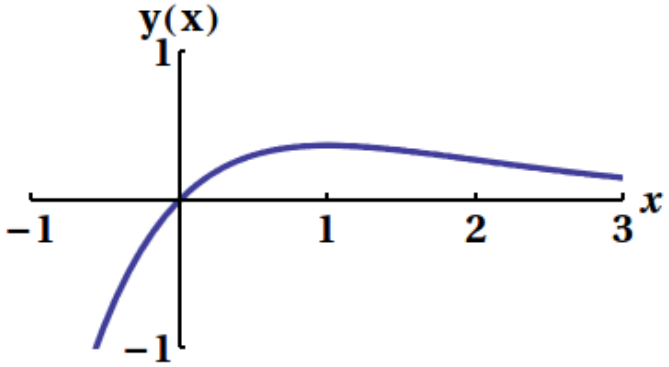
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es lokale Maxima in $x = -2$ und $x = +2$ und ein lokales Minimum in $x = 0$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-4, +4]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Minima in $x = -4$ und in $x = +4$.

xi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = xe^{-x}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4k, Kapitel 6)

$$y'(x) = e^{-x}(1-x) \quad \begin{cases} > 0, & x < 1 \\ < 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$y \text{ ist} \begin{cases} \text{steigend in} & (-\infty, 1) \\ \text{fallend in} & (1, +\infty) \end{cases}$$

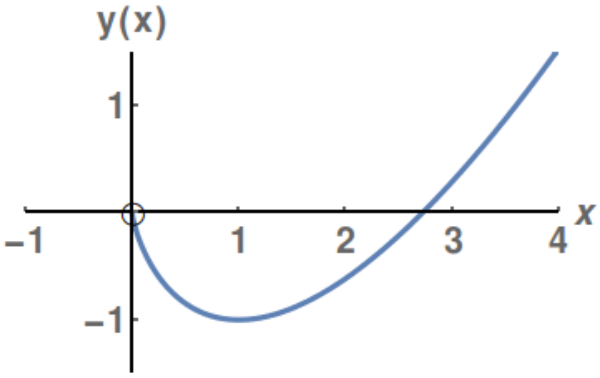
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Maximum in $x = 1$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-1, +3]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Minima in $x = -1$ und in $x = +3$.

xii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x\ln(x) - x, \quad D = \mathbb{R}_+$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4l, Kapitel 6)

$$y'(x) = \ln(x), \quad x > 0$$

$$y'(x) \begin{cases} < 0, & x \in (0,1) \\ > 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$y \text{ ist} \begin{cases} \text{fallend in} & (0,1) \\ \text{steigend in} & (1,+\infty) \end{cases}$$

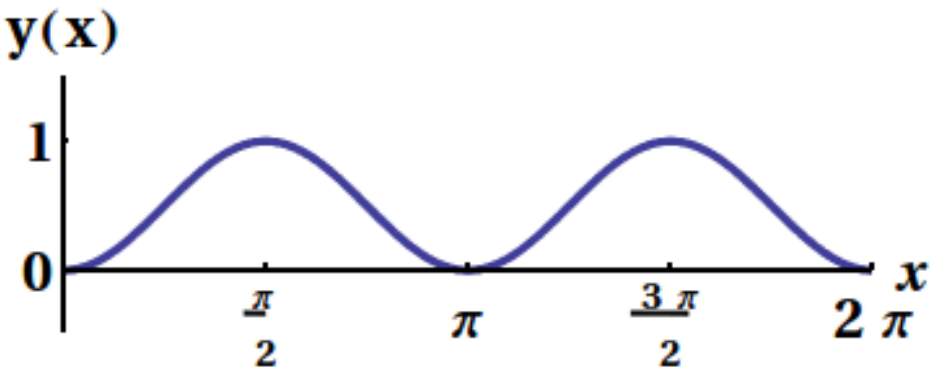
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = 1$.

Die Funktion lässt sich mit dem Punkt $(0,0)$ stetig ergänzen. Falls der Definitionsbereich auf $D = [0,+4]$ ergänzt bzw. eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in $x = 0$ und in $x = +4$.

xiii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \sin^2(x), \quad D = [0, 2\pi]$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4m, Kapitel 6)

$$y'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$$

$$y'(x) \begin{cases} = \quad 0, & x = \frac{k}{2}\pi, & & & k = 0,1,2,3,4 \\ = +1, & x = \frac{1}{4}\pi & \Rightarrow & > 0, & x \in (0, \frac{1}{2}\pi) \\ = +1, & x = \frac{5}{4}\pi & \Rightarrow & > 0, & x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi) \\ = -1, & x = \frac{3}{4}\pi & \Rightarrow & < 0, & x \in (\frac{1}{2}\pi, \pi) \\ = -1, & x = \frac{7}{4}\pi & \Rightarrow & < 0, & x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi) \end{cases}$$

$$y \text{ ist} \begin{cases} \text{steigend in} & (0, \frac{1}{2}\pi) \text{ und in } (\pi, \frac{3}{2}\pi) \\ \text{fallend in} & (\frac{1}{2}\pi, \pi) \text{ und in } (\frac{3}{2}\pi, 2\pi) \end{cases}$$

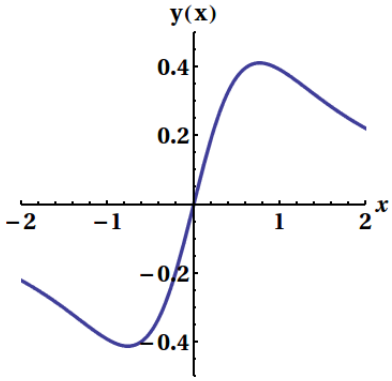
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es lokale Minima in $x = 0, \pi, 2\pi$ und lokale Maxima in $x = \pi/2, 3\pi/2$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [\pi/4, 5\pi/4]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung ein lokales Minimum in $x = \pi/4$ und ein lokales Maximum in $x = 5\pi/4$.

xiv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \tan^{-1}(x)/(1 + x^2), \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Gefunden sei $x_0 \approx 0.7654$ durch das Bisektionsverfahren (im Kapitel 6, Beispiel 3a). Es gelten (Details im Beispiel 4n, Kapitel 6)

$$y'(x) = \frac{1 - 2x\tan^{-1}(x)}{(1 + x^2)^2}, \quad y'(x_0) = 0,$$

$$y'(x) \begin{cases} = \quad 0, & x = \pm x_0 \\ = \ +1, & x = 0 \quad \Rightarrow > 0, \quad x \in (-x_0, x_0) \\ \approx -0.1, & x = -1 \quad \Rightarrow < 0, \quad x \in (-\infty, -x_0) \\ \approx -0.1, & x = +1 \quad \Rightarrow < 0, \quad x \in (x_0, +\infty) \end{cases}$$

$$y \text{ ist} \begin{cases} \text{fallend in} & (-\infty, -x_0) \\ \text{steigend in} & (-x_0, x_0) \\ \text{fallend in} & (x_0, +\infty) \end{cases}$$

und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = -x_0$ und ein lokales Maximum in $x = x_0$.

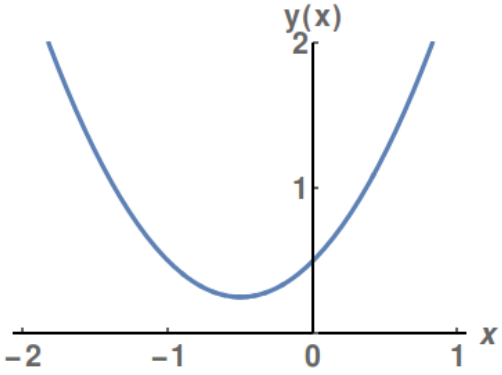
Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung ein lokales Maximum in $x = -2$ und ein lokales Minimum in $x = +2$.

(b) Die folgenden sind alle lokalen Extrema der auf Seiten 107 - 116 im Skriptum abgebildeten Funktionen, für die das Kriterium der zweiten Ableitung zutrifft. Für Details über die Berechnung der Ableitungen sehen Sie Kapitel 7, Beispiel 4.

i. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^2 + x + 1/2, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4a, Kapitel 6)

$$y'(x) = 2(x + 1/2), \quad y''(x) = 2 > 0$$

$$y'(-\tfrac{1}{2}) = 0, \quad y''(-\tfrac{1}{2}) = 2 > 0$$

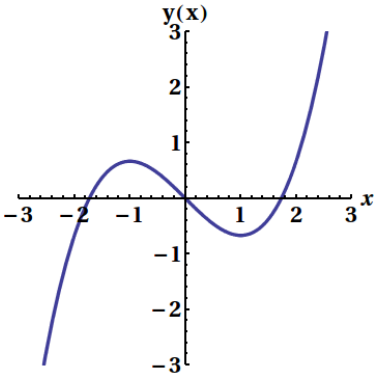
und daher laut des Kriteriums der zweiten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = -\frac{1}{2}$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +1]$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +1$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

ii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^3/3 - x, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4b, Kapitel 6)

$$y'(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1), \quad y''(x) = 2x$$

$$y'(-1) = 0, \quad y''(-1) = -2 < 0$$

$$y'(+1) = 0, \quad y''(+1) = +2 > 0$$

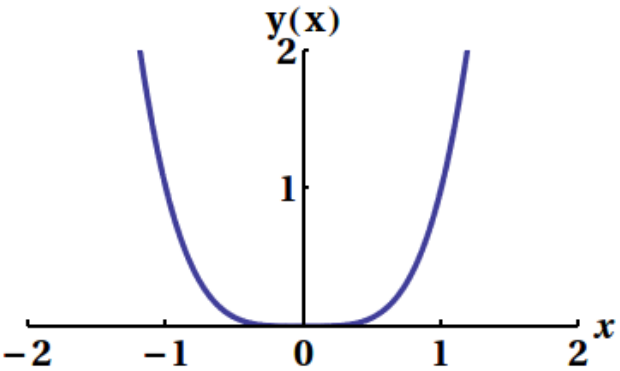
und daher laut des Kriteriums der zweiten Ableitung gibt es ein lokales Maximum in $x = -1$ und ein lokales Minimum in $x = +1$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, 2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es ein lokales Minimum in $x = -2$ und ein lokales Maximum in $x = 2$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

iii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4c, Kapitel 6)

$$y'(x) = 4x^3, \quad y''(x) = 12x^2$$

$$y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$$

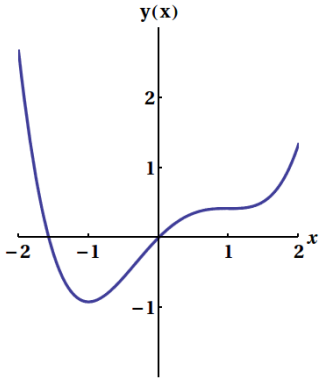
und daher kann mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Minimum in $x = 0$ gibt!

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

iv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4d, Kapitel 6)

$$y'(x) = 1 - x - x^2 + x^3 = (x+1)(x-1)^2$$

$$y''(x) = -1 - 2x + 3x^2 = (x-1)(3x+1)$$

$$y'(-1) = 0, \quad y''(-1) = 2 > 0$$

$$y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0$$

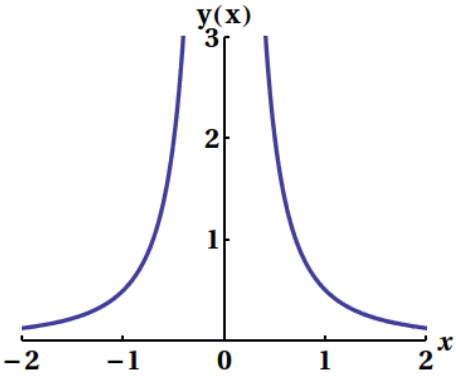
und daher gibt es ein lokales Minimum in $x = -1$, aber mit dem Kriterium der zweiten Ableitung kann es nicht festgestellt werden, dass es kein lokales Extremum in $x = 1$ gibt!

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

v. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{1}{2x^2}, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4e, Kapitel 6)

$$y'(x) = -\frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

$$y''(x) = \frac{3}{x^4}, \quad x \neq 0$$

$$y'(0) \text{ exisitert nicht und } y''(0) \text{ exisitert nicht.}$$

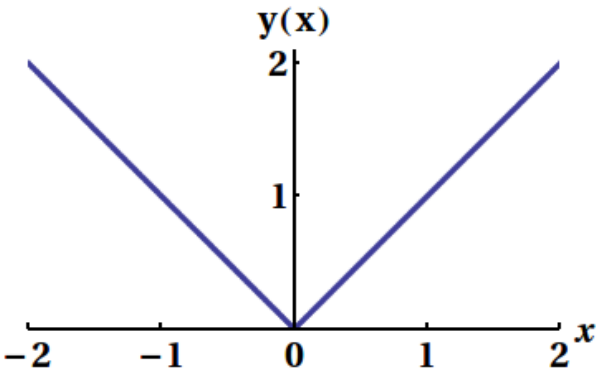
und daher kann mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nichts über die Stelle $x = 0$ festgestellt werden.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

vi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = |x|, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4f, Kapitel 6)

$$y'(x) = \text{sign}(x), \quad x \neq 0$$

$$y''(x) = 0, \quad x \neq 0$$

$$y'(0) \text{ exisitert nicht und } y''(0) \text{ exisitert nicht.}$$

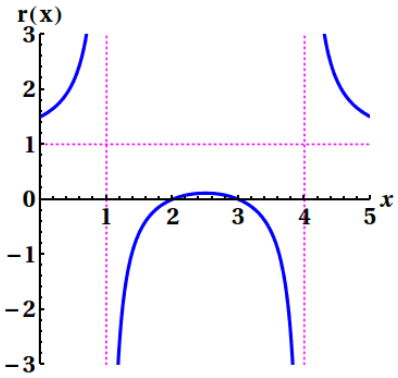
und daher kann mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Minimum in $x = 0$ gibt.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

vii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$r(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{1, 4\}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4g, Kapitel 6)

$$r'(x) = \frac{10 - 4x}{(x^2 - 5x + 4)^2} = 4\frac{5/2 - x}{(x-1)^2(x-4)^2}, \quad x \neq 1, 4$$

$$r''(x) = \frac{12(7 - 5x + x^2)}{(x^2 - 5x + 4)^3} = 12\frac{(x - 5/2)^2 + 3/4}{(x-1)^3(x-4)^3}, \quad x \neq 1, 4$$

$$y'(1) \ \& \ y''(1) \text{ und } y'(4) \ \& \ y''(4) \text{ exisitieren nicht, aber}$$

$$y'(5/2) = 0, \quad y''(5/2) = -64/81 < 0$$

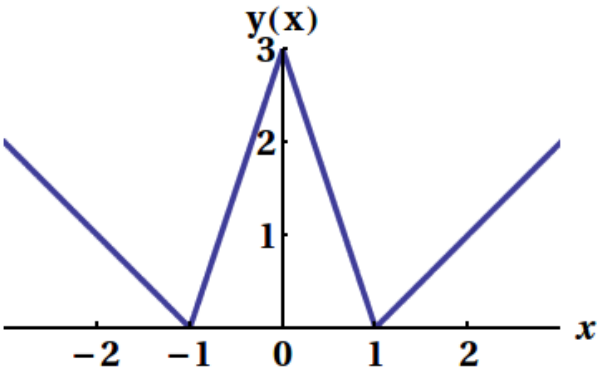
und daher gibt es ein lokales Maximum in $x = 5/2$, aber mit dem Kriterium der zweiten Ableitung kann nichts über die Stellen $x = 1, 4$ festgestellt werden.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [0, 5]\backslash\{1, 4\}$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Minima in $x = 0$ und in $x = 5$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

viii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = 2|x + 1| - 3|x| + 2|x - 1| - 1, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4h, Kapitel 6)

$$y'(x) = 2\text{sign}(x+1) - 3\text{sign}(x) + 2\text{sign}(x-1), \quad x \neq -1, 0, +1$$

$$y''(x) = 0, \quad x \neq -1, 0, +1$$

$$y'(-1) \;\&\; y''(-1), \quad y'(0) \;\&\; y''(0) \text{ und } y'(+1) \;\&\; y''(+1) \text{ existieren nicht}$$

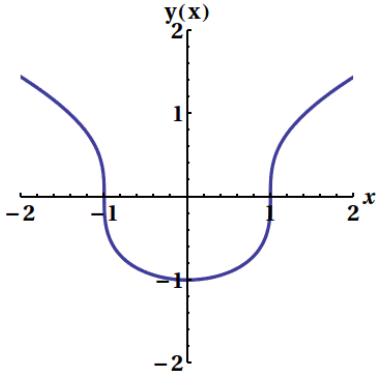
und daher mit dem Kriterium der zweiten Ableitung kann nicht festgestellt werden, dass es lokale Extrema in $x = -1, 0, +1$ gibt.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-3, +3]$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in $x = -3$ und in $x = +3$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

ix. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4i, Kapitel 6)

$$y'(x) = \frac{2x}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}, \quad x \neq -1, +1$$

$$y''(x) = \frac{-2(x^2+3)}{9(x^2-1)^{\frac{5}{3}}} = \frac{2(x^2+3)}{9(1+x)^{\frac{5}{3}}(1-x)^{\frac{5}{3}}}, \quad x \neq -1, +1$$

$$y'(-1) \;\&\; y''(-1) \text{ und } y'(+1) \;\&\; y''(+1) \text{ exisitieren nicht, aber}$$

$$y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2/3 > 0$$

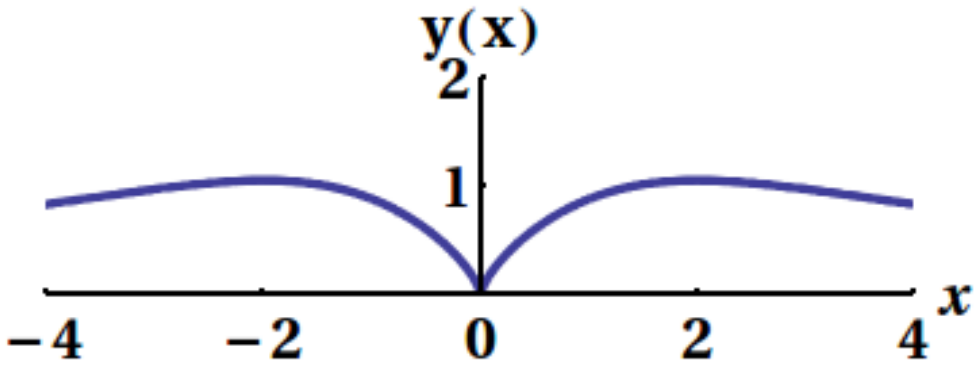
und daher gibt es ein lokales Minimum in $x = 0$, aber mit dem Kriterium der zweiten Ableitung kann nichts über die Stellen $x = -1, +1$ festgestellt werden.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in $x = -2$ und in $x = +2$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

x. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{8\sqrt[3]{x^2}}{8+x^2}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4j, Kapitel 6)

$$y'(x) = \frac{32(4-x^2)}{3\sqrt[3]{x}(8+x^2)^2} = \frac{32}{3(8+x^2)^2}\frac{(2+x)(2-x)}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0$$

$$y''(x) = \frac{32(7x^4-92x^2-32)}{9\sqrt[3]{x^4}(8+x^2)^3}, \quad x \neq 0$$

$$y'(0) \ \& \ y''(0) \text{ existieren nicht, aber}$$

$$y'(-2) = 0, \quad y''(-2) = -4^{\frac{4}{3}}/27 < 0 \quad \text{und} \quad y'(+2) = 0, \quad y''(+2) = -4^{\frac{4}{3}}/27 < 0$$

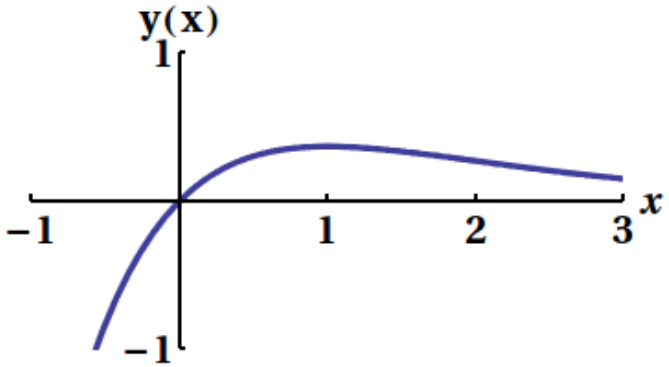
und daher gibt es lokale Maxima in $x = -2$ und $x = +2$, aber mit dem Kriterium des zweiten Ableitung kann nicht festgestellt, dass es ein lokales Minimum in $x = 0$ gibt!

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-4, +4]$ eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Minima in $x = -4$ und in $x = +4$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

xi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = xe^{-x}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4k, Kapitel 6)

$$y'(x) = e^{-x}(1-x)$$

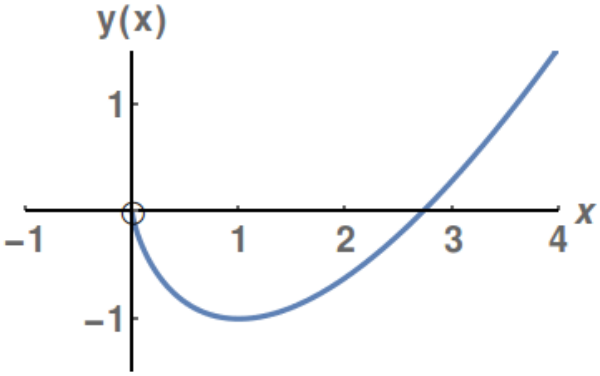
$$y''(x) = e^{-x}(x-2)$$

$$y'(1) = 0, \quad y''(1) = -e < 0$$

und daher gibt es ein lokales Maximum in $x = 1$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-1, +3]$ eingeschränkt wäre, gäbe es ein lokale Minima in $x = -1$ und in $x = +3$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

xii. Die grafische Darstellung der Funktion,



Es gelten (Details im Beispiel 4l, Kapitel 6)

$$y(x) = x\ln(x) - x, \quad D = \mathbb{R}_+$$
$$y'(x) = \ln(x), \quad x > 0$$
$$y''(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$
$$y'(1) = 0, \quad y''(1) = 1 > 0$$

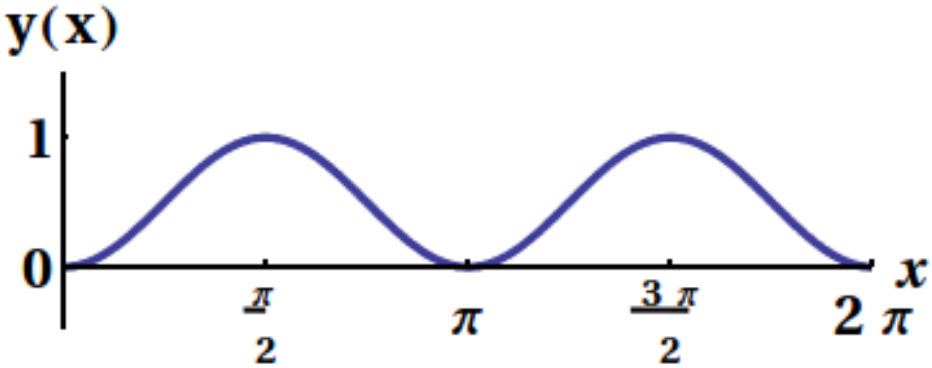
und daher gibt es ein lokales Minimum in $x = 1$.

Die Funktion lässt sich mit dem Punkt $(0, 0)$ stetig ergänzen. Falls der Definitionsbereich auf $D = [0, +4]$ ergänzt bzw. eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in $x = 0$ und in $x = +4$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

xiii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \sin^2(x), \quad D = [0, 2\pi]$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4m, Kapitel 6)

$$y'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$$
$$y''(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) = 2\cos(2x)$$
$$y'(0) = y'(\pi) = y'(2\pi) = 0 = y'(\pi/2) = y'(3\pi/2)$$
$$y''(0) = y''(\pi) = y''(2\pi) = 2, \quad y''(\pi/2) = y''(3\pi/2) = -2$$

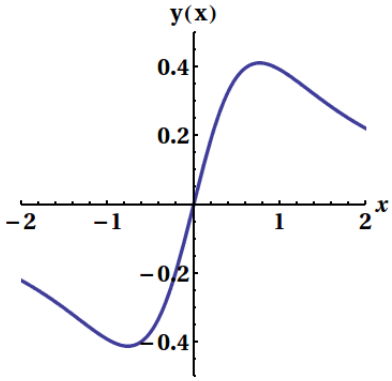
und daher gibt es lokale Minima in $x = 0, \pi, 2\pi$ und lokale Maxima in $x = \pi/2, 3\pi/2$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [\pi/4, 5\pi/4]$ eingeschränkt wäre, gäbe es ein lokales Minimum in $x = \pi/4$ und ein lokales Maximum in $x = 5\pi/4$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

xiv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \tan^{-1}(x)/(1+x^2), \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Gefunden sei $x_0 \approx 0.7654$ durch das Bisektionsverfahren (Kapitel 6, Beispiel 3a). Es gelten (Details im Beispiel 4n, Kapitel 6)

$$y'(x) = \frac{1 - 2x\tan^{-1}(x)}{(1+x^2)^2}$$

$$y''(x) = \frac{(6x^2-2)\tan^{-1}(x) - 6x}{(1+x^2)^3}$$

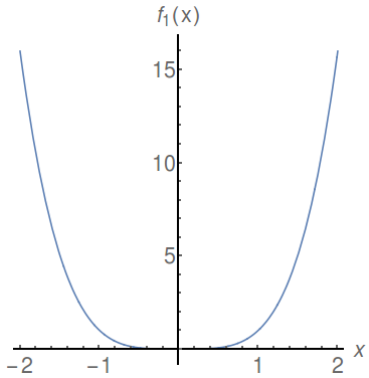
$y'(-x_0) = 0, \quad y''(-x_0) \approx +0.903332 > 0 \quad$ und $\quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) \approx -0.903332 < 0$

und daher gibt es ein lokales Minimum in $x = -x_0$ und ein lokales Maximum in $x = x_0$.

Falls der Definitionsbereich auf $D = [-2, +2]$ eingeschränkt wäre, gäbe es ein lokales Maximum in $x = -2$ und ein lokales Minimum in $x = +2$, aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

4. Sonderfälle von Extremstellen:

(a) Die grafische Darstellung der Funktion $f_1(x) = x^4$ ist

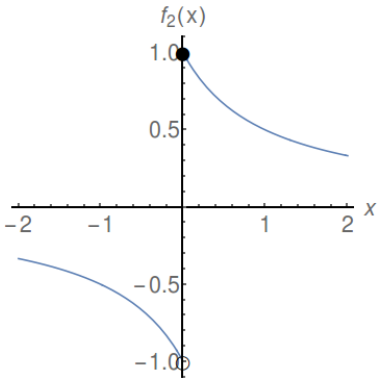


Die erste Ableitung ist $f_1'(x) = 4x^3$, und es gelten $f_1'(x) < 0$, $x < 0$, und $f_1'(x) > 0$, $x > 0$. Daher mit dem Kriterium der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = 0$. Die zweite Ableitung ist $f_1''(x) = 12x^2$, und es gilt $f_1''(0) = 0$. Daher kann mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Minimum in $x = 0$ gibt!

(b) Die Funktion (strategisch definiert an der Stelle $x = 0$)

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(x)}{1+|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-1}{1-x}, & x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

hat die grafische Darstellung



und besitzt klar ein lokales Maximum in $x = 0$. Die erste Ableitung ist

$$f_2'(x) = \begin{cases} D_x \dfrac{-1}{1-x}, & x < 0 \\ D_x \dfrac{1}{1+x}, & x > 0 \\ \text{nicht stetig} \Rightarrow \text{nicht differenzierbar}, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ \text{existiert nicht}, & x = 0 \end{cases}$$

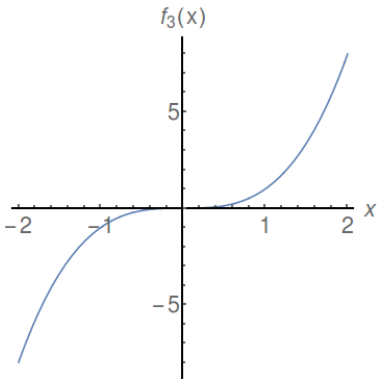
Um eine eindeutige Tangente an einer Stelle zu besitzen, muss eine Kurve an dieser Stelle stetig sein. Also wenn eine Funktion nicht stetig ist, ist sie nicht differenzierbar. Daher ist $f_2(x)$ an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar. Weiters gilt $f_2'(x) < 0$, $x \neq 0$, und daher mit dem Kriterium der ersten Ableitung kann nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Maximum in $x = 0$ gibt.

Da die Funktion in $x = 0$ nicht differenzierbar ist, ist sie an dieser Stelle nicht zweimal differenzierbar. Sonst ist die zweite Ableitung gegeben durch

$$f_2''(x) = \begin{cases} D_x \dfrac{-1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ D_x \dfrac{-1}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ \text{existiert nicht}, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2}{(1-x)^3}, & x < 0 \\ \dfrac{2}{(1+x)^3}, & x > 0 \\ \text{existiert nicht}, & x = 0 \end{cases}$$

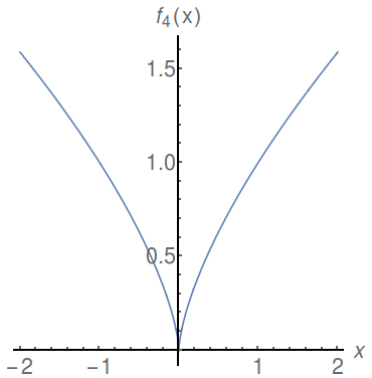
Da $f_3''(0)$ nicht existiert, kann mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Maximum in $x = 0$ gibt.

(c) Die grafische Darstellung der Funktion $f_3(x) = x^3$ ist



Die erste Ableitung ist $f_3'(x) = 3x^2$, und es gilt $f_3'(0) = 0$. Weiters gilt $f_3'(x) > 0$, $x \neq 0$. Da das Vorzeichen von $f_3'(x)$ durch $x = 0$ sich nicht ändert, gibt es kein lokales Extremum an dieser Stelle.

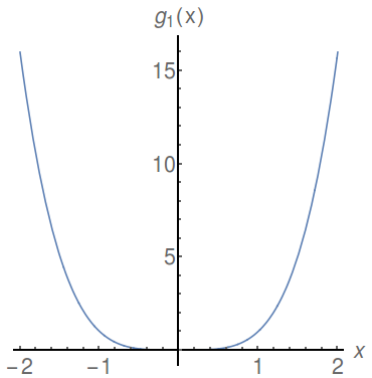
(d) Die grafische Darstellung von $f_4(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ist



Die erste Ableitung ist $f_4'(x) = D_x x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, $x \neq 0$, d.h. die Funktion ist nicht differenzierbar in $x = 0$. Es gelten aber $f_4'(x) < 0$, $x < 0$, und $f_4'(x) > 0$, $x > 0$. Laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in $x = 0$. Da die Funktion in $x = 0$ nicht differenzierbar ist, ist sie nicht zweimal differenzierbar, d.h. $f''(0)$ existiert nicht, und es kann daher mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Minimum in $x = 0$ gibt.

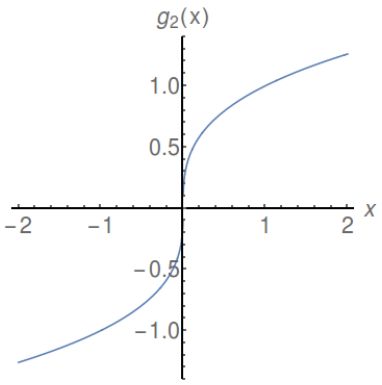
5. Wendepunkte:

(a) Die grafische Darstellung der Funktion $g_1(x) = x^4$ ist



Die erste Ableitung ist $g_1'(x) = 4x^3$ und die zweite Ableitung ist $g_1''(x) = 12x^2$. Es gilt $g_1''(0) = 0$, aber die Stelle $x = 0$ entspricht keinem Wendepunkt, da $g_1''(x) > 0$ für $x \neq 0$ gilt, d.h. das Krümmungsverhalten von $g(x)$ ändert sich durch $x = 0$ nicht.

(b) Die grafische Darstellung der Funktion $g_2(x) = \sqrt[3]{x}$ ist



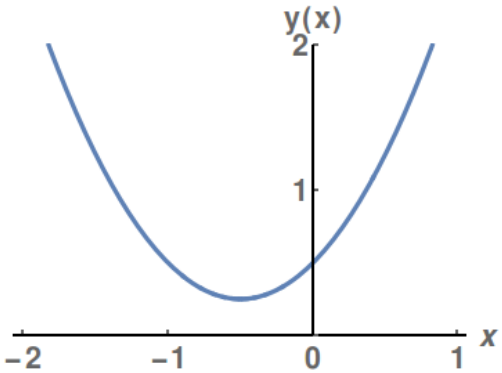
Die erste Ableitung ist $g_2'(x) = D_x x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $x \neq 0$, und die zweite Ableitung ist $g_2''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, $x \neq 0$. Die Funktion ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar und deswegen nicht zweimal differenzierbar. Es gelten $g_2''(x) > 0$, $x < 0$, und $g_2''(x) < 0$, $x > 0$. Da das Krümmungsverhalten sich durch $x = 0$ wechselt, entspricht diese Stelle einem Wendepunkt.

(c) Die folgenden sind alle Wendepunkte der auf Seiten 107 - 116 im Skriptum abgebildeten Funktionen. Für Details über die Berechnung der Ableitungen sehen Sie Kapitel 7, Beispiel 4.

i. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^2 + x + 1/2, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4a, Kapitel 6)

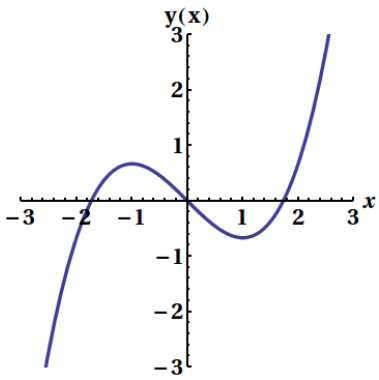
$$y'(x) = 2(x + 1/2), \quad y''(x) = 2 > 0$$

Die Funktion ist konvex überall im $\mathbb{R}$, und das Krümmungsverhalten ändert sich durch keine Stelle. Es gibt daher keine Wendepunkte.

ii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^3/3 - x, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4b, Kapitel 6)

$$y'(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

$$y''(x) = 2x \begin{cases} < 0, & x \in (-\infty, 0) \\ > 0, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

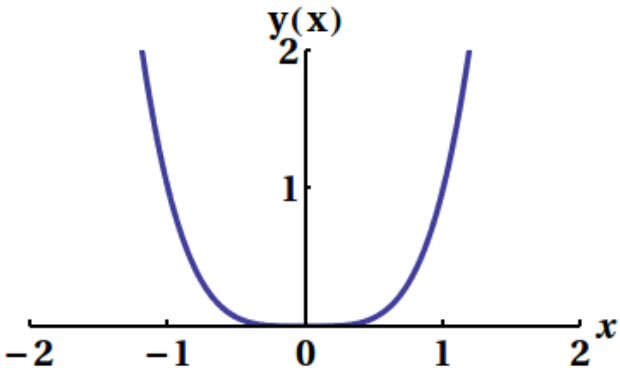
$$y \text{ ist} \begin{cases} \text{konkav in} & (-\infty, 0) \\ \text{konvex in} & (0, +\infty) \end{cases}$$

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stelle $x = 0$. Diese Stelle entspricht daher einem Wendepunkt.

iii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4c, Kapitel 6)

$$y'(x) = 4x^3, \quad y''(x) = 12x^2$$

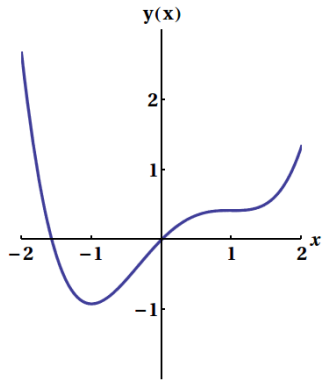
	$(-\infty, 0]$	$[0, +\infty)$
x^2	$\oplus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\oplus$	$\oplus$
y ist	konvex	konvex

Weiters laut der Definition ist y im ganzen $\mathbb{R}$ konvex. Das Krümmungsverhalten ändert sich durch keine Stelle. Es gibt daher keine Wendepunkte.

iv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2/2 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4d, Kapitel 6)

$$y'(x) = 1 - x - x^2 + x^3 = (x+1)(x-1)^2$$

$$y''(x) = -1 - 2x + 3x^2 = (x-1)(3x+1)$$

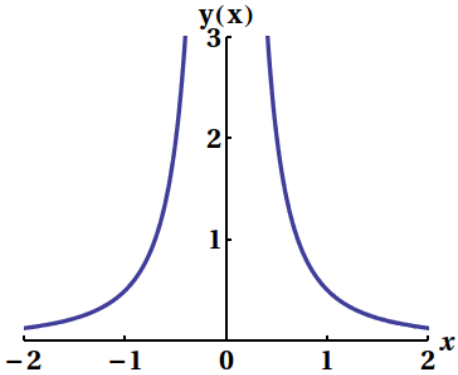
	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3}, +1)$	$(+1, \infty)$
$(3x+1)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-1)$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$y''(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
y ist	konvex	konkav	konvex

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stellen $x = -\frac{1}{3}$ und $x = 1$. Diese Stellen entsprechen daher jeweils einem Wendepunkt.

v. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{1}{2x^2}, \quad D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4e, Kapitel 6)

$$y'(x) = -\frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

$$y''(x) = \frac{3}{x^4}, \quad x \neq 0$$

$$y''(x) \begin{cases} > 0, & x \in (-\infty, 0) \\ > 0, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

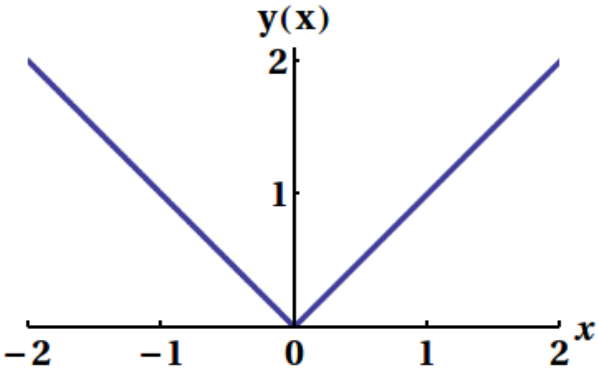
$$y \text{ ist} \begin{cases} \text{konvex in} & (-\infty, 0) \\ \text{konvex in} & (0, +\infty) \end{cases}$$

Da die Stelle $x = 0$ sich im Definitionsbereich der Funktion nicht befindet, kann diese Stelle sowieso keinem Wendepunkt entsprechen. Außerdem ändert sich das Krümmungsverhalten durch diese Stelle nicht. Es gibt keine Wendepunkte.

vi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = |x|, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4f, Kapitel 6)

$$y'(x) = \operatorname{sign}(x), \quad x \neq 0$$

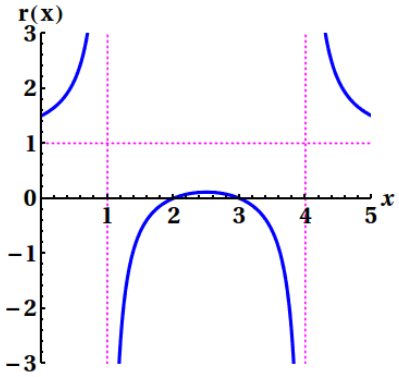
$$y''(x) = 0, \quad x \neq 0$$

Die Gerade durch $(x_1, y(x_1))$ und $(x_2, y(x_2))$ liegt oberhalb vom Graphen von $y(x)$, wenn $x_1 x_2 < 0$ gilt, aber nicht für beliebige $\{x_1, x_2\}$. Daher ist die Funktion konvex aber nicht streng konvex in D. Es gibt keine Wendepunkte, da das Krümmungsverhalten sich durch keine Stelle ändert.

vii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$r(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}, \quad D = \mathbb{R} \backslash \{1, 4\}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4g, Kapitel 6)

$$r'(x) = \frac{10 - 4x}{(x^2 - 5x + 4)^2} = 4\frac{5/2 - x}{(x-1)^2(x-4)^2}, \quad x \neq 1, 4$$

$$r''(x) = \frac{12(7 - 5x + x^2)}{(x^2 - 5x + 4)^3} = 12\frac{(x - 5/2)^2 + 3/4}{(x-1)^3(x-4)^3}, \quad x \neq 1, 4$$

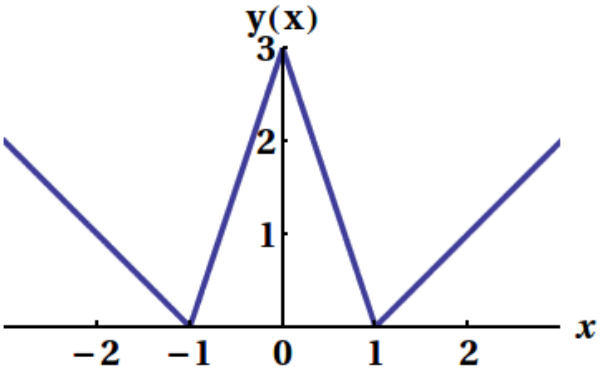
	$(-\infty, +1)$	$(+1, +4)$	$(+4, +\infty)$
$(x-1)^3$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-4)^3$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$(x-5/2)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$r''(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
r ist	konvex	konkav	konvex

Obwohl das Krümmungsverhalten sich durch die Stellen $x = 1, 4$ ändert, befinden sich diese Stellen im Definitionsbereich nicht. Daher gibt es keine Wendepunkte.

viii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = 2|x+1| - 3|x| + 2|x-1| - 1, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4h, Kapitel 6)

$$y'(x) = 2\text{sign}(x+1) - 3\text{sign}(x) + 2\text{sign}(x-1), \quad x \neq -1, 0, +1$$

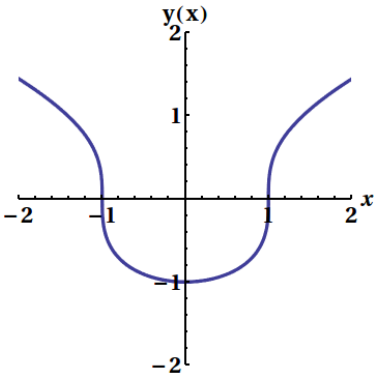
$$y''(x) = 0, \quad x \neq -1, 0, +1$$

Die Gerade durch $(x_1, y(x_1))$ und $(x_2, y(x_2))$ liegt oberhalb vom Graphen von $y(x)$, wenn $x_1 < -1$ und $x_2 \in (-1, 0]$ gelten, aber nicht für beliebige $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$. Daher ist die Funktion konvex (nicht streng) in $(-\infty, 0]$. Ähnlich ist die Funktion konvex (nicht streng) in $[0, +\infty)$. Die Gerade durch $(x_1, y(x_1))$ und $(x_2, y(x_2))$ liegt unterhalb vom Graphen von $y(x)$, wenn $x_1 \in [-1, 0)$ und $x_2 \in (0, +1]$ gelten, aber nicht für beliebige $x_1, x_2 \in [-1, +1]$. Daher ist die Funktion konkav (nicht streng) in $[-1, +1]$. Für jedes $x_1 \in (-1, 0)$ gibt es einen Wendepunkt in $(x_1, y(x_1))$, da die Funktion in den Intervallen $(-\infty, x_1)$ und $(x_1, +1)$ konvex bzw. konkav ist. Für jedes $x_2 \in (0, +1)$ gibt es einen Wendepunkt in $(x_2, y(x_2))$, da die Funktion in den Intervallen $(-1, x_2)$ und $(x_2, +\infty)$ konkav bzw. konvex ist.

ix. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4i, Kapitel 6)

$$y'(x) = \frac{2x}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}, \quad x \neq -1, +1$$

$$y''(x) = \frac{2(x^2+3)}{9(x^2-1)^{\frac{5}{3}}} = \frac{2(x^2+3)}{9(x+1)^{\frac{5}{3}}(x-1)^{\frac{5}{3}}}, \quad x \neq -1, +1$$

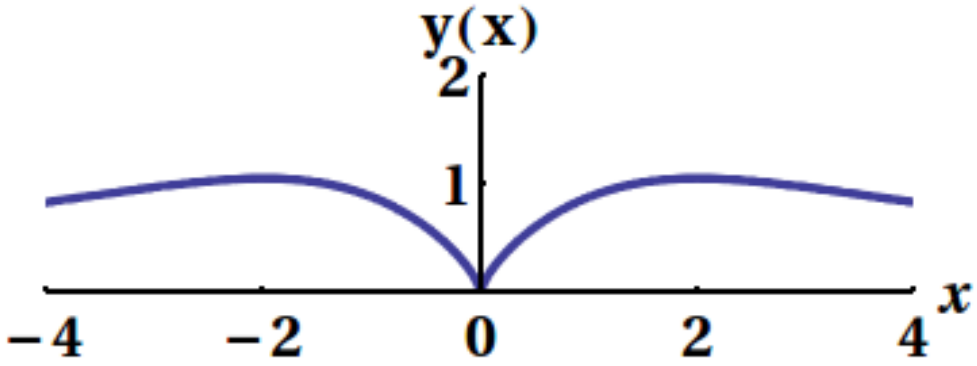
	$(-\infty, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, +\infty)$
$(1+x)^{\frac{5}{3}}$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(1-x)^{\frac{5}{3}}$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$
(x^2+3)	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$y''(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$
y ist	konkav	konvex	konkav

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stellen $x = -1$ und $x = +1$. Diese Stellen entsprechen daher jeweils einem Wendepunkt.

x. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{8\sqrt[3]{x^2}}{8+x^2}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4j, Kapitel 6)

$$y'(x) = \frac{32(4-x^2)}{3\sqrt[3]{x}(8+x^2)^2} = \frac{32}{3(8+x^2)^2}\frac{(2+x)(2-x)}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0$$

und mit $\{\frac{92 \pm \sqrt{92^2 - 4\cdot 7\cdot(-32)}}{2\cdot 7}\} = \{-\tilde{x}^2, \hat{x}^2\}$, $\tilde{x}^2 \approx 0.339$, $\hat{x} \approx 3.67$,

$$y''(x) = \frac{32(7x^4 - 92x^2 - 32)}{9\sqrt[3]{x^4}(8+x^2)^3} = \left[\frac{7\cdot 32(x^2+\tilde{x}^2)}{9\sqrt[3]{x^4}(8+x^2)^2}\right]_{=A}(x+\hat{x})(x-\hat{x}), \quad x \neq 0$$

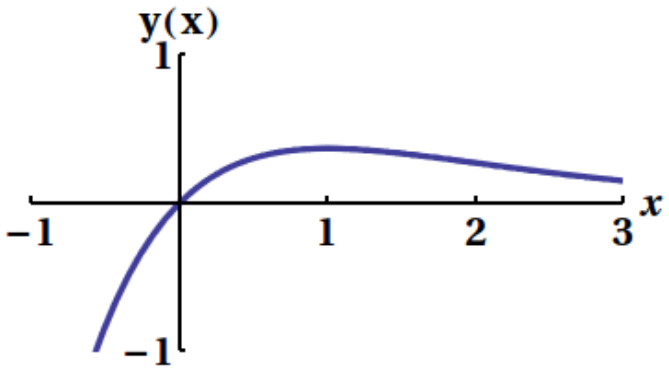
	$(-\infty, -\hat{x})$	$(-\hat{x}, 0)$	$(0, \hat{x})$	$(\hat{x}, \infty)$
$(x+\hat{x})$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-\hat{x})$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
A	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$y''(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
y ist	konvex	konkav	konkav	konvex

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stellen $x = x_1$ und $x = x_2$. Diese Stellen entsprechen daher jeweils einem Wendepunkt.

xi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = xe^{-x}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4k, Kapitel 6)

$$y'(x) = e^{-x}(1-x)$$

$$y''(x) = e^{-x}(x-2)$$

$$y''(x) \begin{cases} < 0, & x < 2 \\ > 0, & x > 2 \end{cases}$$

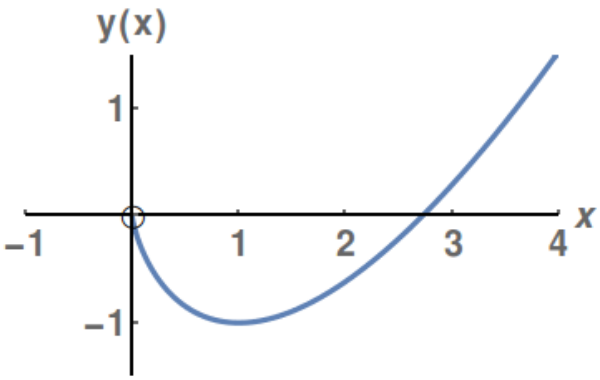
$$y \text{ ist} \begin{cases} \text{konkav in} & (-\infty, 2) \\ \text{konvex in} & (2, +\infty) \end{cases}$$

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stelle $x = 2$. Die Stelle entspricht daher einem Wendepunkt.

xii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x\ln(x) - x, \quad D = \mathbb{R}_+$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4l, Kapitel 6)

$$y'(x) = \ln(x), \quad x > 0$$

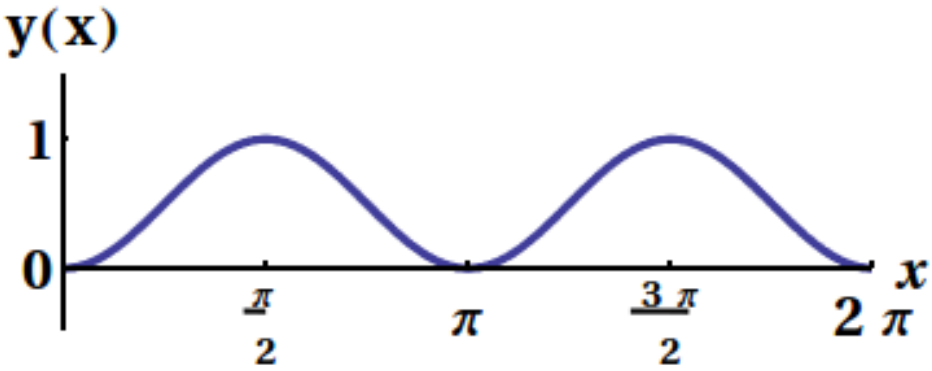
$$y''(x) = \frac{1}{x} > 0, \quad x > 0$$

Die Funktion ist konvex in $(0, +\infty)$. Es gibt keine Wendepunkte, da das Krümmungsverhalten sich durch keine Stelle ändert.

xiii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \sin^2(x), \quad D = [0, 2\pi]$$

ist



Es gelten (Details im Beispiel 4m, Kapitel 6)

$$y'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$$

$$y''(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) = 2\cos(2x)$$

$$y''(x) = \begin{cases} = \quad 0, & x = \frac{2k+1}{4}\pi, & & k = 0,1,2,3 \\ = \sqrt{2}, & x = \frac{1}{8}\pi & \Rightarrow \; > 0, & x \in (\frac{0}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi) \\ = -2, & x = \frac{1}{2}\pi & \Rightarrow \; < 0, & x \in (\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi) \\ = +2, & x = \pi & \Rightarrow \; > 0, & x \in (\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi) \\ = -2, & x = \frac{3}{2}\pi & \Rightarrow \; < 0, & x \in (\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi) \\ = \sqrt{2}, & x = \frac{15}{8}\pi & \Rightarrow \; > 0, & x \in (\frac{7}{4}\pi, \frac{8}{4}\pi) \end{cases}$$

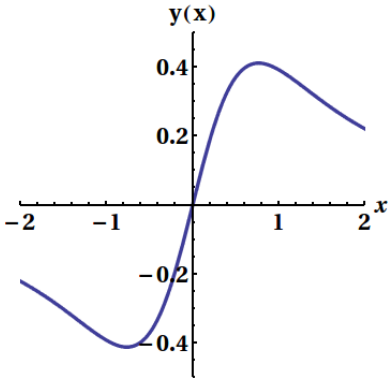
$$y \text{ ist} \begin{cases} \text{konvex in} & (0, \frac{1}{4}\pi) \text{ in } (\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi) \text{ und in } (\frac{7}{4}\pi, \frac{8}{4}\pi) \\ \text{konkav in} & (\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi) \text{ und in } (\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi) \end{cases}$$

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stellen $x = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$. Diese Stellen entsprechen daher jeweils einem Wendepunkt.

xiv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \tan^{-1}(x)/(1+x^2), \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Gefunden sei $x_1 \approx 1.330$ durch das Bisektionsverfahren (im Kapitel 6, Beispiel 3b). Es gelten (Details im Beispiel 4n, Kapitel 6)

$$y'(x) = \frac{1 - 2x\tan^{-1}(x)}{(1+x^2)^2}$$

$$y''(x) = \frac{(6x^2-2)\tan^{-1}(x) - 6x}{(1+x^2)^3}, \quad y''(x_1) = 0$$

$$y''(x)\begin{cases} = \quad 0, & x = 0, \pm x_1 \\ \approx -0.1, & x = -2 \quad \Rightarrow \; < 0, \quad x \in (-\infty, -x_1) \\ \approx +0.6, & x = -1 \quad \Rightarrow \; > 0, \quad x \in (-x_1, 0) \\ \approx -0.6, & x = +1 \quad \Rightarrow \; < 0, \quad x \in (0, x_1) \\ \approx +0.1, & x = +2 \quad \Rightarrow \; > 0, \quad x \in (x_1, +\infty) \end{cases}$$

$$y \text{ ist} \begin{cases} \text{konkav in} & (-\infty, -x_1) \text{ und in } (0, x_1) \\ \text{konvex in} & (-x_1, 0) \text{ und in } (x_1, +\infty) \end{cases}$$

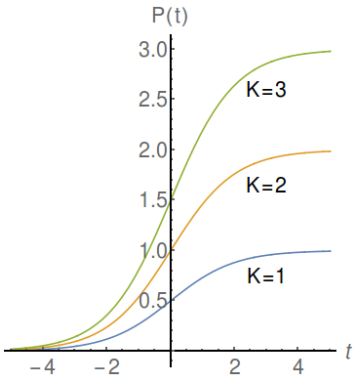
Die Stellen $x = -x_1$ und $x = +x_1$ entsprechen jeweils einem Wendepunkt, da das Krümmungsverhalten sich durch diese Stellen ändert.

6. Logistisches Wachstum:

   (a) Die grafische Darstellung für

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-t}}, \quad K = 1, 2, 3$$

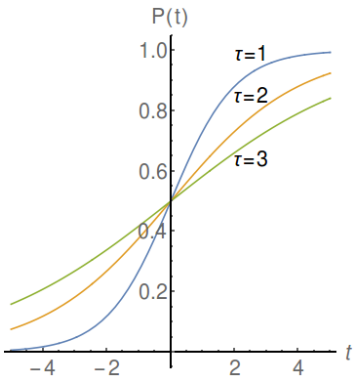
ist



So sieht man, K (die Kapazität) entspricht einer waagerechten Asymptote. Die grafische Darstellung für

$$P(t) = \frac{1}{1 + e^{-t/\tau}}, \quad \tau = 1, 2, 3$$

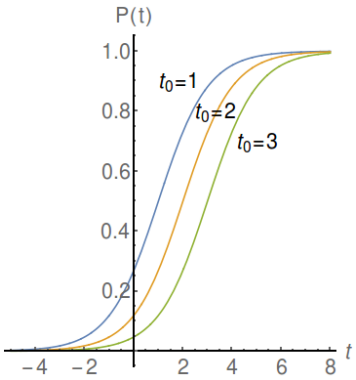
ist



So sieht man, die Steigung im Wendepunkt wird seichter, wenn τ (die Zeitskala) größer wird. Die grafische Darstellung für

$$P(t) = \frac{1}{1 + e^{-(t-t_0)}}, \quad t_0 = 1, 2, 3$$

ist



So sieht man, der Wendepunkt $(t_0, K/2)$ wird verschoben, wenn t_0 verschoben wird.

(b) Für die Funktion

$$P(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$$

gelten

$$P'(t) = D_t(1+e^{-t})^{-1} = -(1+e^{-t})^{-2}D_t(1+e^{-t}) = \frac{+e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$$

und

$$P''(t) = \frac{(e^{-t})'(1+e^{-t})^2 - e^{-t}((1+e^{-t})^2)'}{(1+e^{-t})^4} = \frac{-e^{-t}(1+e^{-t})^2 + 2e^{-t}(1+e^{-t})e^{-t}}{(1+e^{-t})^4}$$

$$= \left(\frac{1+e^{-t}}{1+e^{-t}}\right)\frac{-e^{-t}(1+e^{-t}) + 2e^{-t}e^{-t}}{(1+e^{-t})^3} = \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{(1+e^{-t})^3}$$

oder

$$P''(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^3}(e^{-t}-1) \quad \begin{cases} > 0, & t < 0 \\ < 0, & t > 0 \end{cases}$$

und daher ist $(t_0, P(t_0)) = (t_0, 1/2)$ ein Wendepunkt.

(c) Mit den Daten $P(0) = 1$, $P(\ln(2)) = 4/3$ und $P(\ln(4)) = 8/5$ ergibt sich das Gleichungssystem für die unbekannten Parameter (K, τ, t_0),

$$\begin{aligned} 1 = P(0) &= \frac{K}{1+e^{-(0-t_0)/\tau}} \\ 4/3 = P(\ln(2)) &= \frac{K}{1+e^{-(\ln(2)-t_0)/\tau}} \\ 8/5 = P(\ln(4)) &= \frac{K}{1+e^{-(\ln(4)-t_0)/\tau}} \end{aligned}$$

Die jeweiligen Nenner können so vereinfacht werden,

$$\begin{aligned} e^{-(0-t_0)/\tau} &= e^{t_0/\tau} \\ e^{-(\ln(2)-t_0)/\tau} &= e^{\ln(2^{-1/\tau})}e^{t_0/\tau} = 2^{-1/\tau}e^{t_0/\tau} \\ e^{-(\ln(4)-t_0)/\tau} &= e^{\ln(4^{-1/\tau})}e^{t_0/\tau} = 2^{-2/\tau}e^{t_0/\tau} \end{aligned}$$

Man löst nach K im Gleichungssystem auf und bekommt

$$K = 1 + e^{t_0/\tau} = \tfrac{4}{3}(1 + 2^{-1/\tau}e^{t_0/\tau}) = \tfrac{8}{5}(1 + 2^{-2/\tau}e^{t_0/\tau})$$

Aus der Gleichung $1 + e^{t_0/\tau} = \frac{4}{3}(1 + 2^{-1/\tau}e^{t_0/\tau})$ folgt

$$(1 - \tfrac{4}{3}2^{-1/\tau})e^{t_0/\tau} = \tfrac{4}{3} - 1 = \tfrac{1}{3} \quad \text{oder} \quad e^{t_0/\tau} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{3}2^{-1/\tau}}\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{1}{3 - 4\cdot 2^{-1/\tau}}$$

Aus der Gleichung $1 + e^{t_0/\tau} = \frac{8}{5}(1 + 2^{-2/\tau} e^{t_0/\tau})$ folgt

$$(1 - \tfrac{8}{5}2^{-2/\tau})e^{t_0/\tau} = \tfrac{8}{5} - 1 = \tfrac{3}{5} \quad \text{oder} \quad e^{t_0/\tau} = \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{8}{5}2^{-2/\tau}} \left(\frac{5}{5}\right) = \frac{3}{5 - 8 \cdot 2^{-2/\tau}}$$

Aus den letzten zwei Gleichungen

$$e^{t_0/\tau} = \frac{1}{3 - 4 \cdot 2^{-1/\tau}} = \frac{3}{5 - 8 \cdot 2^{-2/\tau}}$$

folgt mit $x = 2^{-1/\tau}$,

$$\frac{1}{3 - 4x} = \frac{3}{5 - 8x^2} \quad \text{oder} \quad 8x^2 - 12x + 4 = 0 \quad \text{d.h.} \quad x = \tfrac{1}{2} \text{ oder } x = 1$$

Die Lösung $x = 1 = 2^{-1/\tau}$ kann ausgeschlossen werden, da der Wert $\tau = +\infty$ sich ergeben würde. Die Lösung $x = \frac{1}{2} = 2^{-1/\tau}$ entspricht dem Wert

$$\boxed{\tau = 1}$$

Mit $\tau = 1$ folgt aus der Gleichung $1 + e^{t_0/\tau} = \frac{4}{3}(1 + 2^{-1/\tau} e^{t_0/\tau})$,

$$\tfrac{1}{3}e^{t_0} = (1 - \tfrac{4}{3}2^{-1})e^{t_0} = \tfrac{4}{3} - 1 = \tfrac{1}{3} \quad \text{oder} \quad e^{t_0} = 1 \quad \text{oder} \quad \boxed{t_0 = 0}$$

Mit $\tau = 1$ und $t_0 = 0$ folgt aus der Gleichung $K = 1 + e^{t_0/\tau}$ der Wert $\boxed{K = 2}$.

9 Globale Extrema, l'Hôpital, Newtonverfahren, Implizites Ableiten

9.1 Beispiele

1. Globale Extrema:

   Bestimmen Sie die globalen Extrema auf dem gegebenen Definitionsbereich:

   (a) $y_1(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$, $D = [-2, +2]$

   (b) $y_2(x) = 8\sqrt[3]{x^2}/(8 + x^2)$, $D = [-4, +4]$

   (c) $y_3(x) = \text{sign}(x)/(1 + |x|)$, $D = [-1, +1]$

   Hinweis: Sehen Sie Seiten 93 und 98 im Skriptum und Beispiel 5c im Kapitel 7.

2. Anwendung der globalen Extrema:

   (a) Das Volumen einer Dose soll $\frac{1}{2}$ Liter betragen. Die Dose wird aus Zinn hergestellt, und die Dosenwand besteht oben, unten und seitlich aus einer gleichmäßigen Verteilung von Zinn. Finden Sie den Radius und die Höhe der Dose, die die Zinnkosten pro Dose minimieren.

   (b) Die Aushöhlung für einen Tunnel hat einen halbkreisförmigen Querschnitt, der durch die Funktion $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, +1]$ gegeben ist, wobei eine geeignete Längeneinheit für x und y verwendet wird. Innerhalb dieser Aushöhlung wird ein Tunnel mit drei flachen Mauern gebaut. Diese berühren die Aushöhlung und bilden einen trapezförmigen Querschnitt, der bezüglich der y-Achse symmetrisch ist. Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt des trapezförmigen Querschnitts, der den Durchfluss maximiert.

   (c) Eine Firma produziert x Fässer vom Kürbiskernöl pro Woche, und der Profit soll maximiert werden. Marktforschung zeigt, die Gesamtmenge vom produzierten Kürbiskernöl wird verkauft, wenn der Preis pro Fass bei $p(x) = 2 - x$ eingestellt wird. Hier wird natürlich vorausgesetzt, dass $x \geq 0$ und $p(x) \geq 0$ gelten. Der wöchentliche Umsatz ist dann $U(x) = xp(x)$. Die wöchentlichen Kosten sind $K(x) = \ln(1 + x)$, um x Fässer vom Kürbiskernöl zu produzieren. Finden Sie den Wert von x, bei dem der Profit $P(x) = U(x) - K(x)$ maximiert wird. Stellen Sie die Funktionen $p(x)$, $U(x)$, $K(x)$ und $P(x)$ grafisch dar.

3. Newtonsches Verfahren

   (a) Berechnen Sie $\sqrt[3]{2}$ annäherungsweise

      i. mit dem Bisektionsverfahren und

      ii. mit dem Newtonschen Verfahren.

   Hinweis: Der Wert ist eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 2$.

   (b) Bestimmen Sie einen Startwert x_0 für die folgenden Funktionen, mit dem das Newtonsche Verfahren zur Nullstelle $x = 0$ konvergiert und einen Startwert mit dem es zur Nullstelle nicht konvergiert.

      i. $f_1(x) = x^3 - 3x$

      ii. $f_2(x) = x^3 + 3x$

4. Regel der l'Hôpital:

   Bestimmen Sie die Grenzwerte:

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$ (b) $\lim_{x\to\infty} xe^{-2x}$ (b) $\lim_{x\to 0^+} x\ln(1/x)$

5. Implizites Ableiten:

   Ein Pizzateig wird mit einer Presse so gemacht, dass ein zylinderförmiger Teig mit Volumen $V = 500\text{cm}^3$ von einer Höhe 10cm bis zu einer Höhe 0.5cm mit Geschwindigkeit 1cm/sek gedruckt wird. Der Pizzateig bleibt praktisch zylinderförmig.

   (a) Vorbereitung: Was ist die Beziehung zwischen dem Volumen, dem Radius und der Höhe des Teigs? Was ist die zeitliche Änderungsrate des Volumens und der Höhe? Was sind die Anfangshöhe und die Endhöhe? Wie lang dauert es, bis der Teig auf eine Höhe von 0.5cm zusammen gepresst ist?

   (b) Rechnungen mit dem Radius: Was ist der Anfangsradius des Teigzylinders? Was ist die zeitliche Änderungsrate des Radius am Anfang? Was ist der Endradius des Teigzylinders? Was ist die zeitliche Änderungsrate des Radius am Ende?

9.2 Lösungen

1. Globale Extrema:

   (a) Laut des Rezepts (Seite 122 im Skriptum) zur Bestimmung der globalen Extrema der Funktion

   $$y_1(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \quad \text{mit} \quad D = [-2, +2]$$

   i. bestimmt man die kritschen Punkte anhand der Ableitung (Seite 93 im Skriptum),

   $$y_1'(x) = 1 - x - x^2 + x^3 = (x+1)(x-1)^2$$

   durch

   A. $z \in D$, wobei $y'(x) = 0$, sind $z = -1, +1$,

   B. $c \in D$, wobei $y'(x)$ nicht existiert, sind keine und

   C. r am Rand von D sind $r = -2, +2$,

   ii. und wertet in diesen Stellen aus,

   A. $y_1(z)$ für jedes z sind $y_1(-1) = -11/12$, $y_1(+1) = 5/12$,

   B. $y_1(c)$ für jedes c sind keine und

   C. $y_1(r)$ für jedes r sind $y_1(-2) = 8/3$, $y_1(+2) = 4/3$.

   iii. Anhand dieser Auswertungen ist das globale Maximum gegeben durch den größten Wert $y_1(-2) = 8/3$, und das globale Minimum ist gegeben durch den kleinsten Wert $y_1(-1) = -11/12$.

   (b) Laut des Rezepts (Seite 122 im Skriptum) zur Bestimmung der globalen Extrema der Funktion

   $$y_2(x) = 8\sqrt[3]{x^2}/(8 + x^2) \quad \text{mit} \quad D = [-4, +4]$$

   i. bestimmt man die kritschen Punkte anhand der Ableitung (Seite 98 im Skriptum),

   $$y_2'(x) = \frac{32(4 - x^2)}{3\sqrt[3]{x}(8 + x^2)^2} = \frac{32}{3(8 + x^2)^2}\frac{(2 + x)(2 - x)}{\sqrt[3]{x}}$$

   durch

   A. $z \in D$, wobei $y_2'(x) = 0$, sind $z = -2, +2$,

   B. $c \in D$, wobei $y'(x)$ nicht existiert, ist $c = 0$ und

   C. r am Rand von D sind $r = -4, +4$,

   ii. und wertet in diesen Stellen aus,

   A. $y_2(z)$ für jedes z sind $y_2(-2) = 2^{\frac{5}{3}}/3 = y_2(+2)$,

   B. $y_2(c)$ für jedes c ist $y_2(0) = 0$ und

   C. $y_2(r)$ für jedes r sind $y_2(-4) = 2^{\frac{4}{3}}/3 = y_2(+4)$.

   iii. Anhand dieser Auswertungen ist das globale Maximum gegeben durch den größten Wert $y_2(-2) = y_2(+2) = 2^{\frac{5}{3}}/3$, und das globale Minimum ist gegeben durch den kleinsten Wert $y_2(0) = 0$.

   (c) Laut des Rezepts (Seite 122 im Skriptum) zur Bestimmung der globalen Extrema der Funktion

   $$y_3(x) = \frac{\text{sign}(x)}{1 + |x|} \quad \text{mit} \quad D = [-2, +2]$$

i. bestimmt man die kritschen Punkte anhand der Ableitung (vgl. Beispiel 5c im Kapitel 7),

$$y_3'(x) = \begin{cases} D_x \dfrac{-1}{1-x}, & x < 0 \\ D_x \dfrac{1}{1+x}, & x < 0 \\ \text{nicht stetig} \Rightarrow \text{nicht differenzierbar}, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ \text{existiert nicht}, & x = 0 \end{cases} \quad \text{d.h.} \quad y_3'(x) = \frac{-1}{(1+|x|)^2}, \quad x \neq 0$$

durch

A. $z \in D$, wobei $y_3'(x) = 0$, sind keine,

B. $c \in D$, wobei $y_3'(x)$ nicht existiert, ist $c = 0$ und

C. r am Rand von D sind $r = -1, +1$,

ii. und wertet in diesen Stellen aus,

A. $y_3(z)$ für jedes z sind keine,

B. $y_3(c)$ ($\lim_{x\to c^\pm} y(x)$, y nicht stetig) für jedes c sind $y_3(0) = 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} y(x) = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^+} y(x) = +1 \quad \text{und}$$

C. $y_3(r)$ für jedes r sind $y_3(-1) = -1/2$, $y_2(+1) = 1/2$.

iii. Anhand dieser Auswertungen ist der größte Wert $\lim_{x\to 0^+} y_3(0) = +1$ das globale Supremum (d.h. der Wert wird von der Funktion nur angenähert aber nicht angenommen), und der kleinste Wert $\lim_{x\to 0^-} y_3(0) = -1$ ist das globale Infimum (d.h. der Wert wird von der Funktion nur angenähert aber nicht angenommen).

2. Anwendung der globalen Extrema:

(a) Seien x der Radius der Dose und y die Höhe. Das Volumen ist $V = 0.0005\text{m}^3$, und es gilt

$$0.0005 = V = \pi x^2 y \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{2000\pi x^2}$$

Die Oberfläche der Dose ist

$$O = \pi x^2 \quad \text{(Deckel)} \quad + \pi x^2 \quad \text{(Boden)} \quad + 2\pi x y \quad \text{(Seiten)}$$

Durch die letzten zwei Gleichungen lässt sich die Oberfläche bezüglich einer einzigen Variable x darstellen,

$$O(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{1}{2000\pi x^2}$$

Diese Funktion wird natürlich auf dem Definitionsbereich $D = (0, \infty)$ eingeschränkt, d.h. es ist nur Sinnvoll dass $x > 0$ gilt, und es ist vorher unbekannt, wie groß x sein soll.

Laut des Rezepts (Seite 122 im Skriptum) zur Bestimmung der globalen Extrema der Funktion

$$O(x) = 2\pi x^2 + \frac{1}{1000x} \quad \text{mit} \quad D = (0, \infty)$$

i. bestimmt man die kritschen Punkte anhand der Ableitung,

$$O'(x) = 4\pi x - \frac{1}{1000x^2} = \frac{4000\pi x^3 - 1}{1000x^2}$$

durch

A. $z \in D$, wobei $O'(z) = 0$, ist $z = 1/(10 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}})$,
B. $c \in D$, wobei $O'(c)$ nicht existiert, sind keine (da $0 \notin D$) und
C. r am Rand von D sind $r = 0, +\infty$,

ii. und wertet in diesen Stellen aus,
A. $O(z)$ für jedes z ist $O(1/(10 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}})) = 0.03(\pi/2)^{\frac{1}{3}}$,
B. $O(c)$ für jedes c sind keine und
C. $O(r)$ ($\lim_{x \to r^{\pm}} O(x)$, D offen) für jedes r,

$$\lim_{x \to 0^+} O(x) = +\infty = \lim_{x \to \infty} O(x)$$

iii. Anhand dieser Auswertungen ist der größte Wert $\lim_{x \to 0^+} O(x) = \lim_{x \to \infty} O(x) = +\infty$ (d.h. die Funktionswerte werden beliebig groß und $+\infty$ wird von der Funktion nicht angenommen), und der kleinste Wert $O(1/(10 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}})) = 0.03(\pi/2)^{\frac{1}{3}}$ ist das globale Minimum. Daher werden Materialkosten durch

$$x^* = \frac{1}{10 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}} \mathrm{m} \approx 0.0430127\mathrm{m} \approx 4.3\mathrm{cm}$$

und

$$y^* = \frac{1}{2000\pi x^{*2}} \mathrm{m} = \frac{1}{5 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}} \mathrm{m} \approx 0.0860254\mathrm{m} \approx 8.6\mathrm{cm}.$$

minimiert.

(b) Sei der trapezförmige Querschnitt mit Eckpunkten $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(-a, h)$ und (a, h) mit $a, h \geq 0$ definiert. Da die Punkte $(-a, h)$ und (a, h) in der Kurve $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ liegen müssen, folgt $h = y(a) = \sqrt{1 - a^2}$. Der gesamte Flächeninhalt (eines Trapezes) ist gegeben durch

$$F(a) = \frac{\text{Summe der Längen der parallelen Seiten}}{2} \times \text{Höhe} = \frac{2a + 2}{2} y(a) = (a + 1)\sqrt{1 - a^2}$$

Diese Funktion wird natürlich mit dem Definitionsbereich $D = [0, 1]$ versehen, da die Aushöhlung für den Tunnel durch den halbkreisförmigen Querschnitt eingeschränkt ist.

Laut des Rezepts (Seite 122 im Skriptum) zur Bestimmung der globalen Extrema der Funktion

$$F(a) = (a + 1)\sqrt{1 - a^2} \quad \text{mit} \quad D = [0, 1]$$

i. bestimmt man die kritschen Punkte anhand der Ableitung,

$$F'(a) = \sqrt{1 - a^2} + (1 + a)\frac{-a}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{1 - a - 2a^2}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{(1 - 2a)(1 + a)}{\sqrt{1 - a}\sqrt{1 + a}}$$

durch
A. $z \in D$, wobei $F'(z) = 0$, ist $z = 1/2$ ($-1 \notin D$),
B. $c \in D$, wobei $F'(c)$ nicht existiert, ist $c = 1$ ($-1 \notin D$) und
C. r am Rand von D sind $r = 0, 1$

ii. und wertet in diesen Stellen aus,
A. $F(z)$ für jedes z ist $F(1/2) = 3\sqrt{3}/4 \approx 1.3$,
B. $F(c)$ für jedes c ist $F(1) = 0$ und
C. $F(r)$ für jedes r sind $F(0) = 1$, $F(1) = 0$.

iii. Anhand dieser Auswertungen ist das globale Maximum gegeben durch den größten Wert $F(1/2) = 3\sqrt{3}/4$, und das globale Minimum ist gegeben durch den kleinsten Wert $F(1) = 0$. Daher wird der Flächeninhalt (und folglich der Durchfluss) durch $z = 1/2$ maximiert.

(c) Da die Fässermenge x und der Preis pro Fass $p(x) = 2 - x$ beide positiv sein müssen, müssen gleichzeitig gelten,

$$x \geq 0, \quad 2 - x \geq 0, \quad \text{oder} \quad 0 \leq x \leq 2$$

und daher wird die Zielfunktion mit dem Definitionsbereich $D = [0, 2]$ versehen.

Laut des Rezepts (Seite 122 im Skriptum) zur Bestimmung der globalen Extrema der Funktion

$$P(x) = x(2 - x) - \ln(1 + x) \quad \text{mit} \quad D = [0, 2]$$

i. bestimmt man die kritschen Punkte anhand der Ableitung,

$$P'(x) = 2 - 2x - \frac{1}{1+x} = \frac{(2-2x)(1+x) - 1}{1+x} = \frac{1 - 2x^2}{1+x}$$

durch

A. $x \in D$, wobei $P'(x) = 0$, ist $z = 1/\sqrt{2}$ (da $-1/\sqrt{2} \notin D$),

B. $c \in D$, wobei $P'(c)$ nicht existiert, sind keine (da -1 $\notin D$) und

C. r am Rand von D sind $r = 0, 2$

ii. und wertet in diesen Stellen aus,

A. $P(x)$ für jedes z ist $P(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) \approx 1.41 - 0.50 - 0.53 = 0.38$,

B. $P(c)$ für jedes c sind keine und

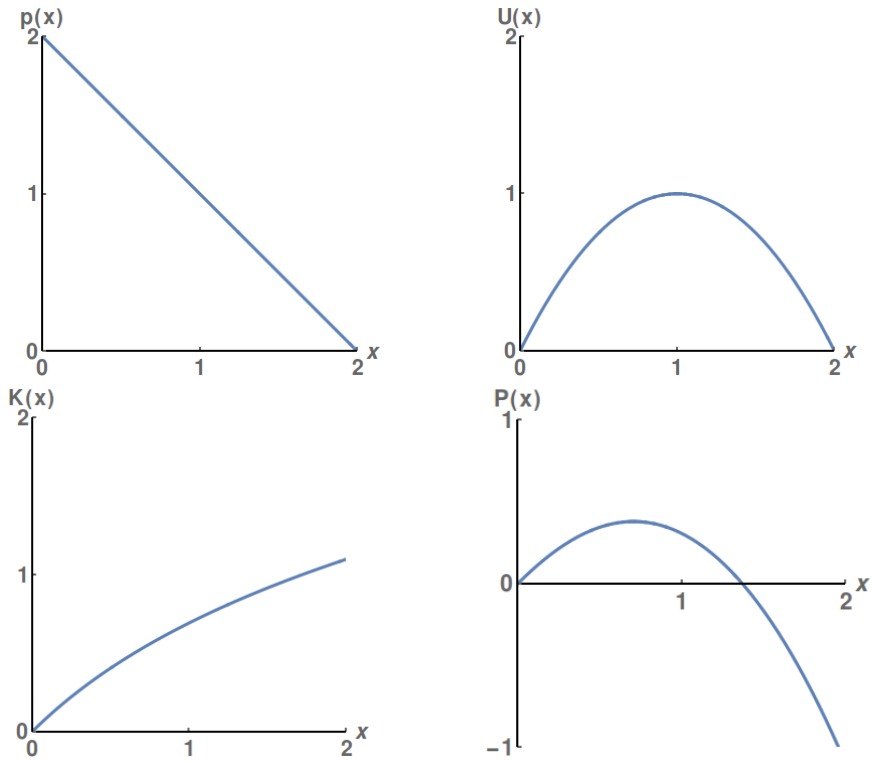
C. $P(r)$ für jedes r sind $P(0) = 0$, $P(2) = -\ln(3) < 0$.

iii. Anhand dieser Auswertungen ist das globale Maximum gegeben durch den größten Wert $P(1/\sqrt{2}) \approx 0.38$. Daher wird der Profit durch $x = z = 1/\sqrt{2} \approx 0.71$ maximiert.

Die grafische Darstellung der Funktionen

$$p(x) = 2 - x, \quad U(x) = x(2 - x), \quad K(x) = \ln(1 + x), \quad P(x) = x(2 - x) - \ln(1 + x)$$

ist:



3. Newtonschen Verfahren

(a) Der Wert $\sqrt[3]{2}$ wird als Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 2$ annäherungsweise bestimmt.

i. Bisektionsverfahren. Als Polynom ist f auf $\mathbb{R}$ stetig, und mit $a = 0$ und $b = 2$ gelten $f(a) = -2 < 0$ und $f(b) = 6 > 0$.
Daher wendet man das Bisektionsverfahren im Intervall $[0, 2]$ an. Mit den Anfangswerten $a = 0$ und $b = 2$ und immer $c = (a + b)/2$ liefert das Bisektionsverfahren folgende Ergebnisse:

c	$f(c)$	a	b
1.00000	−1.00000	0.00000	2.00000
1.50000	+1.37500	1.00000	2.00000
1.25000	−0.04688	1.00000	1.50000
1.37500	+0.59961	1.25000	1.50000
1.31250	+0.26099	1.25000	1.37500
1.28125	+0.10330	1.25000	1.31250
1.26562	+0.02729	1.25000	1.28125
1.25781	−0.01002	1.25000	1.26562
1.26172	+0.00857	1.25781	1.26562
1.25977	−0.00074	1.25781	1.26172
1.26074	+0.00391	1.25977	1.26172
1.26025	+0.00159	1.25977	1.26074
1.26001	+0.00042	1.25977	1.26025
1.25989	−0.00016	1.25977	1.26001
1.25995	+0.00013	1.25989	1.26001
1.25992	−0.00001	1.25989	1.25995
1.25993	+0.00006	1.25992	1.25995

d.h. eine Nullstelle für $f(x)$ ist $x_0 \approx 1.2599$.

ii. Newtonsches Verfahren. Als Polynom ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Die Iteration des Newtonschen Verfahrens ist

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - 2}{3x_k^2}$$

oder

$$x_{k+1} = \frac{2(1 + x_k^3)}{3x_k^2}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Mit $x_0 = 2$ liefert das Newtonsche Verfahren folgende Ergebnisse

k	x_k
0	2.0000
1	1.5000
2	1.2963
3	1.2609
4	1.2599
5	1.2599

d.h. eine Nullstelle für $f(x)$ ist $x_0 \approx 1.2599$. Hier findet man das Ergebnis mit viel weniger Aufwand durch das Newtonsche Verfahren als durch das Bisektionsverfahren.

(b) Für die folgenden Funktionen werden die Startwerte x_0 bestimmt, mit denen das Newtonsche Verfahren zur Nullstelle $x = 0$ konvergiert. Weiters werden die Startwerte bestimmt, mit denen es zu dieser Nullstelle nicht konvergiert.

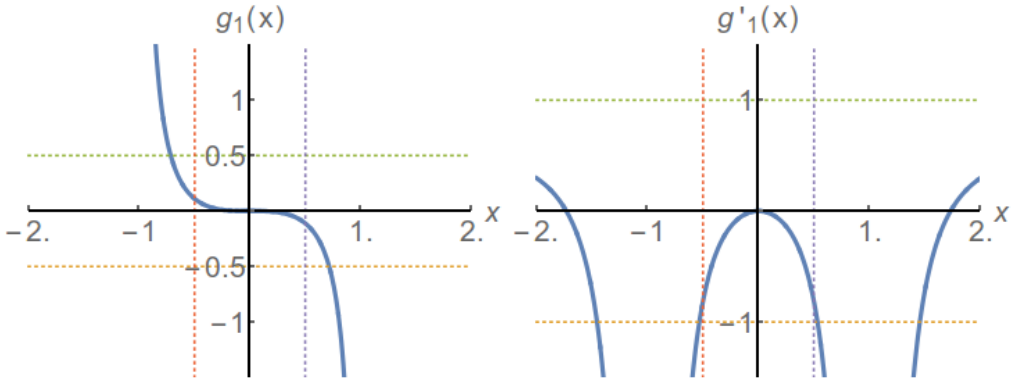
i. Anhand des Satzes auf Seite 132 im Skriptum berechnet man für $f_1(x) = x^3 - 3x$,

$$g_1(x) = x - \frac{f_1(x)}{f_1'(x)} = \frac{2x^3}{3(x^2-1)}$$

und

$$g_1'(x) = \frac{2x^2(x^2-3)}{3(x^2-1)^2}$$

mit den Grafiken



Durch diese Grafiken ist abzulesen, dass $g_1(x) \in (-0.5, +0.5)$ und $|g_1'(x)| < 1$ $\forall x \in (-0.5, 0.5)$ gelten. Laut dem Satz auf Seite 132 im Skriptum konvergieren die Iterierten des Newtonschen Verfahrens zur Nullstelle $x = 0$ für jeden Startwert im Intervall $(-0.5, 0.5)$. Klar konvergiert das Newtonsche Verfahren zur Nullstelle $x = 0$ nicht für $x_0 = \pm 1$, da $f_1'(\pm 1) = 0$ gilt. Weiters zeigen Rechnungen oder grafische Überlegungen, das Newtonsche Verfahren konvergiert zur Nullstelle $x = 0$ nicht für $|x_0| \geq 1$.

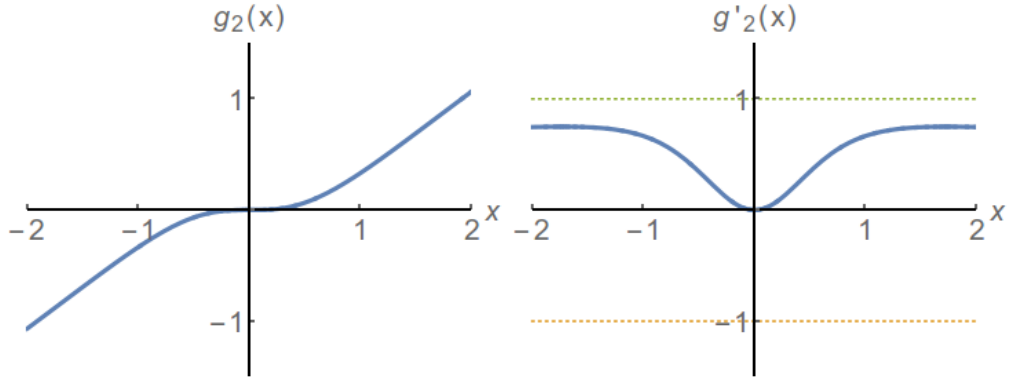
ii. Anhand des Satzes auf Seite 132 im Skriptum berechnet man für $f_2(x) = x^3 + 3x$

$$g_2(x) = x - f_2(x)/f_2'(x) = \frac{2x^3}{3(x^2+1)}$$

und

$$g_2'(x) = \frac{2x^2(x^2+3)}{3(x^2+1)^2}$$

mit den Grafiken



Durch diese Grafiken ist abzulesen, dass $g_2(x) \in \mathbb{R}$ und $|g_2'(x)| < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ gelten. Laut dem Satz auf Seite 132 im Skriptum konvergieren die Iterierten des Newtonschen Verfahrens zur Nullstelle $x = 0$ für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$. Es gibt dann keinen Startwert x_0, mit dem das Newtonsche Verfahren zur Nullstelle $x = 0$ nicht konvergiert.

4. Regel der l'Hôpital:

   Bevor die Regel der l'Hôpital angewendet werden darf, muss kontrolliert werden, ob es sich um eine unbestimmte Form handelt, z.B. $0/0$, ∞/∞, 0^∞, ∞^0, etc.

   (a) Für die Funktion $f_1(x) = \sin(2x)/x$ gibt es den Grenzwert $\sin(2x) \xrightarrow{x\to 0} 0$ für den Zahler von f_1 und den Grenzwert $x \xrightarrow{x\to 0} 0$ für den Nenner von f_1. Daher folgt mit der Regel der l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{D_x \sin(2x)}{D_x x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) D_x(2x)}{1} = \lim_{x\to 0} 2\cos(2x) = 2$$

   (b) Für die Funktion $f_2(x) = xe^{-2x}$ gibt es den Grenzwert $e^{2x} \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ für den Nenner des Terms $e^{-2x} = 1/e^{2x}$ in f_2 und den Grenzwert $x \xrightarrow{x\to\infty} +\infty$ für den Zahler x von f_2. Daher folgt mit der Regel der l'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{D_x x}{D_x e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{2x} D_x(2x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0$$

   (c) Für die Funktion $f_3(x) = x\ln(1/x)$ gibt es den Grenzwert $x^{-1} \xrightarrow{x\to 0^+} \infty$ für den Nenner des Terms $x = 1/x^{-1}$ in f_3 und den Grenzwert $\ln(1/x) = -\ln(x) \xrightarrow{x\to 0^+} +\infty$ für den Zahler $\ln(1/x)$ von f_3. Daher folgt mit der Regel der l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1/x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^{-1})}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln(x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-D_x \ln(x)}{D_x x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

5. Implizites Ableiten:

   (a) In Abhängigkeit von der Zeit t (sek) ist die Beziehung zwischen dem Volumen $V(t)$ (cm^3), dem Radius $r(t)$ (cm) und der Höhe $h(t)$ (cm) des zylinderförmigen Pizzateigs gegeben durch

$$500 = V(t) = \pi r^2(t) h(t).$$

   Da das Volumen konstant bleibt, ist die zeitliche Änderungsrate des Volumens

$$V'(t) = 0 \text{ cm}^3/\text{sek}.$$

   Gegeben worden ist, die zeitliche Änderungsrate der Höhe ist

$$h'(t) = -1 \text{ cm/sek}$$

   Auch gegeben worden sind, die Anfangshöhe ist

$$h(0) = 10 \text{ cm}$$

   und die Endhöhe ist

$$h(\tau) = 0.5 \text{ cm},$$

   wobei τ die Endzeit bezeichnet. Mit der obigen zeitlichen Änderungsrate der Höhe $h'(t) = -1$ cm/sek $= h'$ (Konstante), $0 \le t \le \tau$, folgt

$$h(t) = h(0) + h' \times t = 10 - t.$$

   Durch die Auswertung in $t = \tau$ folgt aus $0.5 = h(\tau) = 10 - \tau$ dass

$$\tau = 9.5 \text{ sek}.$$

(b) Aus der Anfangsbeziehung zwischen Volumen, Radius und Höhe,

$$500 = V(0) = \pi r(0)^2 h(0) = 10\pi r(0)^2$$

folgt der Anfangsradius

$$r(0) = \sqrt{50/\pi} \approx 4.0 \text{ cm}.$$

Aus der Endbeziehung zwischen Volumen, Radius und Höhe,

$$500 = V(\tau) = \pi r(\tau)^2 h(\tau) = 0.5\pi r(\tau)^2$$

folgt der Endradius

$$r(\tau) = \sqrt{1000/\pi} \approx 17.8 \text{ cm}.$$

Aus der Beziehung zwischen den durch implizites Ableiten gegebenen Änderungsraten

$$0 = V'(t) = 2\pi r(t) r'(t) h(t) + \pi r(t)^2 h'(t) = 2\pi r(t) r'(t)(10 - t) - \pi r(t)^2$$

folgen anfänglich d.h. zur Zeit $t = 0$,

$$0 = V'(0) = 20\pi r(0) r'(0) - \pi r(0)^2 = 20\pi\sqrt{50/\pi}\, r'(0) - \pi(\sqrt{50/\pi})^2$$

$$\text{oder} \quad r'(0) = 1/(2\sqrt{2\pi}) \approx 0.2 \text{ cm/sek}$$

und endlich d.h. zur Zeit $t = \tau$,

$$0 = V'(\tau) = \pi r(\tau) r'(\tau) - \pi r(\tau)^2 = \pi\sqrt{1000/\pi}\, r'(\tau) - \pi(\sqrt{1000/\pi})^2$$

$$\text{oder} \quad r'(\tau) = \sqrt{1000/\pi} \approx 17.8 \text{ cm/sek}.$$

10 Flächeninhalt, Stammfunktionen, Integrale und Integrationsregeln

10.1 Beispiele

1. Bestimmtes Integral durch Grenzwert:

   (a) Bestimmen Sie das bestimmte Integral

   $$\int_0^1 \sqrt{x}dx$$

   durch den Grenzwert einer Riemannschen Summe mit einer Teilung

   $$x_i = (i/n)^2, \quad i = 0, \ldots, n, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n$$

   des Intervalls $[0, 1]$ und mit Auswertungen der Funktion $\sqrt{x}$ in $\hat{x}_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$.

   (b) Kontrollieren Sie das Ergebnis durch eine Rechnung des bestimmten Integrals mit dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnungen.

   (c) Vergleichen Sie das Ergebnis mit jenem im 1d. Beispiel im Kapitel 2.

2. Stammfunktionen:

   Für die folgenden Funktionen bestimmen Sie eine Stammfunktion

   (a) $u'(x)u(x)^p$, $p \in \mathbb{R}$

   (b) $2^{u(x)}u'(x)$

   (c) $\cos(u(x))u'(x)$

   (d) $\sin(u(x))u'(x)$

   (e) $\sec^2(u(x))u'(x)$

   (f) $u'(x)/(1 + u^2(x))$

   für eine allgemeine Funktion $u(x)$ und für die bestimmte Funktion $u(x) = x$. (Mit solchen Regeln löst man die entsprechenden Hausaufgaben auf Seite 153 im Skriptum.)

3. Rationale Funktionen:

   Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale anhand der Hinweise.

   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{2 + 2x + x^2}dx$ Hinweise: quadratische Ergänzung, dann Substitution $u = x + 1$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{2 + 2x + x^2}dx$ Hinweise: $x^2 = (x^2 + 2x + 2) - 2(x + 1)$, dann $u = x + 1$, dann Kettenregel

   (c) $\displaystyle\int \frac{x + 3}{2 + 3x + x^2}dx$ Hinweise: $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ dann Partialbruchzerlegung

4. Partielle Integration:

   Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale durch partielle Integration

   (a) $\displaystyle\int x\cos(x)dx$

   (b) $\displaystyle\int x\ln(x)dx$

   (c) $\displaystyle\int xe^x dx$

   (d) $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)dx$

5. Trigonometrische Identitäten:

Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale anhand der Hinweise

(a) $\int \sqrt{1-x^2}dx$ Hinweise: $x = \sin(\theta)$, trigonometrische Identitäten (i) dann (iv) dann (v)

(b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ Hinweise: $x = \sec(\theta)$, trigonometrische Identität (ii)

wobei die folgenden trigonometrischen Identitäten zur Verfügung stehen:

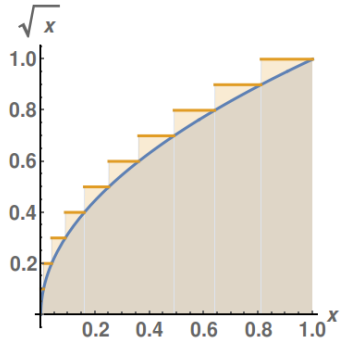
(i) $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$	(ii) $\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$
(iii) $2\sin^2(\theta) = 1 - \cos(2\theta)$	(iv) $2\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$
(v) $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$	(vi) $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$

10.2 Lösungen

1. Bestimmtes Integral durch Grenzwert:

   (a) Das bestimmte Integral ist gegeben durch den Grenzwert der Riemannschen Summe,

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx = \lim_{n\to\infty} S(n), \quad S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\hat{x}_i}\Delta x_i$$



   wobei hier ausgewählt worden sind

$$x_i = \left(\frac{i}{n}\right)^2, \quad i = 0, \ldots, n, \quad \hat{x}_i = x_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

   und

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \left(\frac{i}{n}\right)^2 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2, \quad i = 1, \ldots, n$$

   Die entsprechende Riemannsche Summe ist gegeben durch

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{i}{n}\right)^2} \left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i[i^2 - (i-1)^2]$$

   oder anhand der Summen-Formeln (Seite 70 im Skriptum),

$$S(n) = \frac{1}{n^3}\sum_i [2i^2 - i] = \frac{2}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)}{2}$$

   Der Grenzwert ist

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2}}_{=2/3} - \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{2n^2}}_{=0} = \frac{2}{3}$$

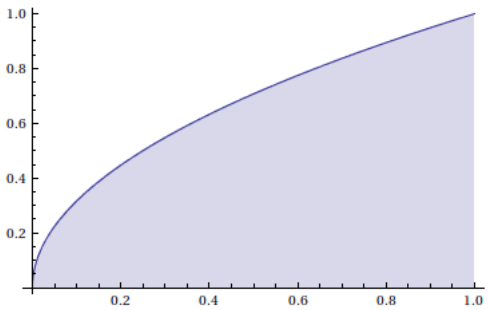
   (b) Mit dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnungen,

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

   (c) Der Befehl

```
Plot[Sqrt[x],{x,0,1}]
```

   stellt die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[0, 1]$ grafisch dar



   und der Befehl

```
Integrate[Sqrt[x],{x,0,1}]
```

   berechnet den Flächeninhalt (2/3) unter der Kurve.

2. Stammfunktionen:

   (a) Für eine allgemeine Funktion $u(x)$,

$$f(x) = u'(x)u(x)^p, \quad p \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + \begin{cases} \dfrac{u(x)^{p+1}}{p+1}, & p \neq -1 \\ \ln|u(x)|, & p = -1 \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}$$

   und für $u(x) = x$ gilt $u'(x) = 1$ in dieser Formel. Man bestätigt, es gilt $F'(x) = f(x)$.

   (b) Für eine allgemeine Funktion $u(x)$,

$$f(x) = 2^{u(x)}u'(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + \frac{2^{u(x)}}{\ln(2)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

   und für $u(x) = x$ gilt $u'(x) = 1$ in dieser Formel. Man bestätigt, es gilt $F'(x) = f(x)$.

   (c) Für eine allgemeine Funktion $u(x)$,

$$f(x) = \cos(u(x))u'(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + \sin(u(x)), \quad c \in \mathbb{R}$$

   und für $u(x) = x$ gilt $u'(x) = 1$ in dieser Formel. Man bestätigt, es gilt $F'(x) = f(x)$.

   (d) Für eine allgemeine Funktion $u(x)$,

$$f(x) = \sin(u(x))u'(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = c - \cos(u(x)), \quad c \in \mathbb{R}$$

   und für $u(x) = x$ gilt $u'(x) = 1$ in dieser Formel. Man bestätigt, es gilt $F'(x) = f(x)$.

   (e) Für eine allgemeine Funktion $u(x)$,

$$f(x) = \sec^2(u(x))u'(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + \tan(u(x)), \quad c \in \mathbb{R}$$

   und für $u(x) = x$ gilt $u'(x) = 1$ in dieser Formel. Man bestätigt, es gilt $F'(x) = f(x)$.

   (f) Für eine allgemeine Funktion $u(x)$,

$$f(x) = u'(x)/(1 + u^2(x)) \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + \tan^{-1}(u(x)), \quad c \in \mathbb{R}$$

   und für $u(x) = x$ gilt $u'(x) = 1$ in dieser Formel. Man bestätigt, es gilt $F'(x) = f(x)$.

   Die analogen Hausaufgaben auf Seite 153 im Skriptum werden ähnlich gelöst.

3. Rationale Funktionen:

   (a) Durch die quadratische Ergänzung $(x^2 + 2x + 2) = (x + 1)^2 + 1$,

$$\int \frac{1}{2 + 2x + x^2} dx = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1}$$

   Durch die Substitution $u = x + 1$, $du = dx$,

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \tan^{-1} u + c = \tan^{-1}(x + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

   (b) Durch die algebräische Modifikation $x^2 = (x^2 + 2x + 2) - 2(x + 1)$,

$$\int \frac{x^2}{2 + 2x + x^2} dx = \int \left[\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2 + 2x + x^2} \right)_{=1} - \frac{2(x+1)}{(x+1)^2 + 1} \right] dx$$

wobei die obige quadratische Ergänzung verwendet worden ist. Durch die Substitution $u = x + 1$, $du = dx$,

$$\int \frac{x^2}{2 + 2x + x^2} dx = \int dx - \int \frac{2u}{u^2 + 1} du = x - \int \frac{(u^2 + 1)'}{u^2 + 1} du$$

Durch die Kettenregel (oder äquivalent durch die Substitution $v = u^2+1$, $dv = 2udu$),

$$\int \frac{x^2}{2 + 2x + x^2} dx = x - \ln(u^2 + 1) + c = x - \ln((x + 1)^2 + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

oder ohne die quadratischen Ergänzung,

$$\int \frac{x^2}{2 + 2x + x^2} dx = x - \ln(x^2 + 2x + 2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(c) Durch die algebräische Modifikation $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$,

$$\int \frac{x + 3}{2 + 3x + x^2} dx = \int \frac{(x + 3)}{(x + 1)(x + 2)} dx$$

Für die Partialbruchzerlegung,

$$\frac{(x + 3)}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}$$

multipliziert man die Gleichung mit $(x + 1)(x + 2)$, und die unbekannten A und B erfüllen,

$$(x + 3) = A(x + 2) + B(x + 1), \quad \forall x \quad \text{oder} \quad \begin{cases} x = -1: & 2 = A(1) + B(0) \\ x = -2: & 1 = A(0) + B(-1) \end{cases}$$

d.h. $A = 2$ und $B = -1$. Daher

$$\int \frac{x + 3}{2 + 3x + x^2} dx = \int \left[\frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x + 2} \right] dx = 2 \int \frac{(x + 1)'}{x + 1} dx - \int \frac{(x + 2)'}{x + 2} dx$$

Durch die Kettenregel (oder äquivalent durch die Substitutionen $x + 1 = u$, $dx = du$ bzw. $x + 2 = v$, $dx = dv$),

$$\int \frac{x + 3}{2 + 3x + x^2} dx = \int \left[\frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x + 2} \right] dx = 2 \ln|x + 1| - \ln|x + 2| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

oder mit den Eigenschaften der Logarithmusfunktion,

$$\int \frac{x + 3}{2 + 3x + x^2} dx = \ln|x + 1|^2 - \ln|x + 2| + c = \ln\left(\frac{(x + 1)^2}{|x + 2|} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

4. Partielle Integration:

(a) Für das Integral

$$\int x\cos(x)dx$$

wird x durch ihre Ableitung vereinfacht. Daher verwendet man die Substitutionen,

$x\cos(x) = u(x)v'(x)$	$u(x) = x$	$v'(x) = \cos(x)$	
	$u'(x) = 1$	$v(x) = \sin(x)$	$u'(x)v(x) = \sin(x)$

Durch partielle Integration,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

ergibt sich

$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(b) Für das Integral

$$\int x\ln(x)dx$$

wird $\ln(x)$ durch ihre Ableitung vereinfacht. Daher verwendet man die Substitutionen,

$x\ln(x) = u(x)v'(x)$	$u(x) = \ln(x)$	$v'(x) = x$	
	$u'(x) = 1/x$	$v(x) = x^2/2$	$u'(x)v(x) = x/2$

Durch partielle Integration,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

ergibt sich

$$\int x\ln(x)dx = \tfrac{1}{2}x^2\ln(x) - \int \tfrac{1}{2}xdx = \tfrac{2}{4}x^2\ln(x) - \tfrac{1}{4}x^2 = \frac{\ln(x^2) - 1}{4}x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(c) Für das Integral

$$\int xe^x dx$$

wird x durch ihre Ableitung vereinfacht. Daher verwendet man die Substitutionen,

$xe^x = u(x)v'(x)$	$u(x) = x$	$v'(x) = e^x$	
	$u'(x) = 1$	$v(x) = e^x$	$u'(x)v(x) = e^x$

Durch partielle Integration,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

ergibt sich

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(d) Für das Integral

$$\int e^{2x}\sin(3x)dx$$

verwendet man den ähnlichen Ansatz auf Seiten 151-152 im Skriptum. Zuerst verwendet man die Substitutionen,

$e^{2x}\sin(3x) = u(x)v'(x)$	$u(x) = \sin(3x)$	$v'(x) = e^{2x}$	
	$u'(x) = 3\cos(3x)$	$v(x) = e^{2x}/2$	$u'(x)v(x) = \frac{3}{2}e^{2x}\cos(3x)$

Durch partielle Integration,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

ergibt sich

$$\int e^{2x}\sin(3x)dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin(3x) - \tfrac{3}{2}\int e^{2x}\cos(3x)dx$$

Dann für das letzte Integral verwendet man die Substitutionen,

$e^{2x}\cos(3x) = f(x)g'(x)$	$f(x) = \cos(3x)$	$g'(x) = e^{2x}$	
	$f'(x) = -3\sin(3x)$	$g(x) = e^{2x}/2$	$f'(x)g(x) = -\frac{3}{2}e^{2x}\sin(3x)$

Durch partielle Integration,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ergibt sich zwischen den eckigen Klammern,

$$\int e^{2x}\sin(3x)dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin(3x) - \tfrac{3}{2}\left[\tfrac{1}{2}e^{2x}\cos(3x) + \tfrac{3}{2}\int e^{2x}\sin(3x)dx\right]$$

Man summiert das letzte Integral auf beiden Seiten,

$$(1+\tfrac{9}{4})\int e^{2x}\sin(3x)dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin(3x) - \tfrac{3}{4}e^{2x}\cos(3x)$$

und es folgt,

$$\int e^{2x}\sin(3x)dx = e^{2x}\frac{2\sin(3x) - 3\cos(3x)}{13} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

5. Trigonometrische Identitäten:

(a) Für das Integral

$$\int \sqrt{1-x^2}dx$$

erkennt man in $\sqrt{1-x^2}$ die Form der trigonometrischen Identität $1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$. Anhand der Substitution

$$x = \sin(\theta), \quad dx = \cos(\theta)d\theta$$

bekommt man die folgende Transformation des Integrands

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} = |\cos(\theta)| = \cos(\theta)$$

wobei $|\cos(\theta)| = \cos(\theta)$ folgt aus

$$x \in [-1, +1], \quad \theta = \sin^{-1}(x) \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \quad \text{und} \quad \cos([-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]) \in [0, 1].$$

Mit der Substitution $x = \sin(\theta)$ und $dx = \cos(\theta)d\theta$ ergibt sich dann

$$\int \sqrt{1 - x^2}dx = \int \cos^2(\theta)d\theta$$

Mit der trigonometrischen Identität $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$ lässt sich der Integrand $\cos^2(\theta)$ so vereinfachen,

$$\int \cos^2(\theta)d\theta = \tfrac{1}{2}\int [1 + \cos(2\theta)]d\theta = \tfrac{1}{2}\left[\theta + \tfrac{1}{2}\sin(2\theta)\right]$$

Der Term $\sin(2\theta)$ lässt sich direkt bezüglich x umschreiben, wenn die trigonometrische Identität $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ verwendet wird. Das Integral bezüglich θ ist dann

$$\int \cos^2(\theta)d\theta = \tfrac{1}{2}\left[\theta + \sin(\theta)\cos(\theta)\right] + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Mit $x = \sin(\theta)$ und $\sqrt{1 - x^2} = \cos(\theta)$ ergibt sich

$$\int \sqrt{1 - x^2}dx = \int \cos^2(\theta)d\theta = \tfrac{1}{2}\left[\theta + \sin(\theta)\cos(\theta)\right] = \tfrac{1}{2}\left[\sin^{-1}(x) + x\sqrt{1 - x^2}\right] + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(b) Für das Integral

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}$$

erkennt man in $\sqrt{x^2 - 1}$ die Form der trigonometrischen Identität $\sec^2(\theta) - 1 = \tan^2(\theta)$. Anhand der Substitution

$$x = \sec(\theta), \quad dx = \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$$

bekommt man die folgende Transformation des Nenners des Integrands

$$x^2\sqrt{x^2 - 1} = \sec^2(\theta)\sqrt{\sec^2(\theta) - 1} = \sec^2(\theta)|\tan(\theta)| = \sec^2(\theta)\tan(\theta)$$

wobei $|\tan(\theta)| = \tan(\theta)$ folgt aus

$$\begin{gathered} |x| > 1, \quad 1/\sec(\theta) = \cos(\theta) = 1/x \in (-1, +1), \\ \theta = \cos^{-1}(1/x) \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \quad \text{und} \quad \tan((0, \tfrac{\pi}{2})) \in (0, \infty). \end{gathered}$$

Mit der Substitution $x = \sec(\theta)$ und $dx = \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$ ergibt sich dann

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta}{\sec^2(\theta)\tan(\theta)} = \int \cos(\theta)d\theta = \sin(\theta) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Durch $x = \sec(\theta)$ und

$$x\sin(\theta) = \sin(\theta)\sec(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta) = |\tan(\theta)| = \sqrt{\sec^2(\theta) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

ergibt sich

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 1}} = \sin(\theta) + c = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

11 Flächeninhalt, Leibnitz, Numerik, Differentialgleichungen

11.1 Beispiele

1. Flächeninhalt unter einer Kurve:

   (a) Berechnen Sie das bestimmte Integral von $y(x) = x^{\frac{1}{3}}$ zwischen $x = -1$ und $x = 0$.

   (b) Berechnen Sie das bestimmte Integral von $y(x) = x^{\frac{1}{3}}$ zwischen $x = 0$ und $x = +1$.

   (c) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Kurve $y(x) = x^{\frac{1}{3}}$ für $x \in [-1, +1]$ und der x-Achse.

2. Flächeninhalt zwischen Kurven

   (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen den Kurven $u(x) = x^3 - x - 3$ und $v(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ für $x \in [0, 2]$. (Hinweis: Man findet zuerst den Wert $x_0 \in [0, 2]$, im dem $u(x_0) = v(x_0)$ gilt.)

   (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen den Kurven $f(x) = 1/x^{\frac{1}{3}}$ und $g(x) = 1/x^{\frac{1}{4}}$ für $x \in [0, (\frac{9}{8})^{12}]$. (Bemerkung: $f(x), g(x) \to +\infty$ für $x \to 0^+$, aber der Flächeninhalt ist endlich.)

3. Leibniz-Regel

   (a) Um die Funktion zu vereinfachen, berechnen Sie das bestimmte Integral,

   $$F(x) = \int_{\sin(x)}^{\ln(x)} t^2 dt$$

   und dann leiten Sie das Ergebnis ab.

   (b) Leiten Sie $F(x)$ mit der Leibniz-Regel ab, und vergleichen Sie das Ergebnis mit jenem des letzten Teils.

   (c) Bestimmen Sie die Ableitung von

   $$F(x) = \int_{\tan^{-1}(x)}^{\tan(x)} e^{-t^2} dt$$

4. Numerische Integralrechnung

   Die so-genannte *Error Function* $\mathrm{erf}(x)$ ist definiert durch,

   $$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

   (a) Zur Approximation des Werts $\mathrm{erf}(1)$ bilden Sie eine Riemannsche Summe mit der Teilung

   $$t_i = i/n, \quad i = 0, \ldots, n, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1} = 1/n, \quad i = 1, \ldots, n$$

   des Intervalls $[0, 1]$ und mit Auswertungen der Funktion $2e^{-t^2}/\sqrt{\pi}$ in $\hat{t}_i = t_i$, $i = 1, \ldots, n$.

   (b) Werten Sie diese Riemannsche Summe in $n = 10, 100, 1000, 10000$ aus.
   Hinweis: Zum Beispiel für $n = 10$ bzw. 100 bekommt man das numerische Ergebnis mit den Wolfram Befehlen,

   ```
   Sum[(2./10) Exp[-(i/10)^2]/Sqrt[Pi], {i, 1, 10}]
   ```

   und

   ```
   Sum[(2./100) Exp[-(i/100)^2]/Sqrt[Pi], {i, 1, 100}]
   ```

(c) Vergleichen Sie den approximierten Wert mit dem Wert erf(1).
Hinweis: Man bekommt diesen Wert mit dem Wolfram Befehl,

```
Erf[1.]
```

5. Trennbare Differentialgleichungen

(a) Lösen Sie das Problem des exponentiellen Wachstums,

$$m'(t) = 2m(t), \quad m(0) = 3$$

(b) Lösen Sie das Problem des logistischen Wachstums,

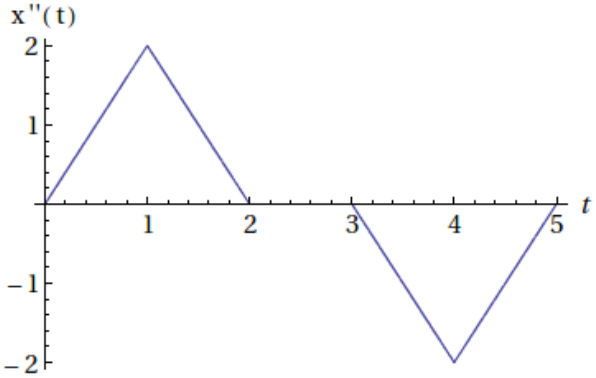
$$p'(t) = p(t)(1 - p(t)), \quad p(0) = 1/2$$

6. Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung

(a) Sei $x(t)$ die Höhe in Meter eines Steins zur Zeit t Sekunden. Zur Zeit $t = 0$ lässt man den Stein von 10 Meter hoch frei fallen, d.h. die Anfangshöhe ist $x(0) = 10$ und die Anfangsgeschwindigkeit ist $x'(0) = 0$. Angenommen ist die Beschleunigung eines fallenden Objekts auf der Erdoberfläche gegeben durch die Konstante $g = 9.8$ Meter/Sekunde^2, d.h. die Beschleunigung des Steins ist $x''(t) = -g$.

i. Finden Sie $x'(t)$ und $x(t)$.
ii. Finden Sie die Aufprallszeit τ des Steins, d.h. $x(\tau) = 0$.
iii. Finden Sie die Aufprallsgeschwindigkeit des Steins, d.h. $x'(\tau)$.

(b) Beginnend mit Geschwindigkeit $x'(0) = 0$ fährt man 5 Minuten auf der Autobahn von einer Einfahrt mit $x(0) = 0$ bis zu einer Ausfahrt mit folgender Beschleunigung.



Hier ist Zeit t in Minuten und die Beschleunigung $x''(t)$ ist in Kilometer/Minuten^2.

i. Finden Sie $x'(t)$ und $x(t)$, und stellen Sie diese grafisch dar.
ii. Wie weit fährt man von der Einfahrt bis zu der Ausfahrt?
iii. Was ist die durchschnittliche Geschwindigkeit während dieser Fahrt?

11.2 Lösungen

1. Flächeninhalt unter einer Kurve:

   (a) Das bestimmte Integral von $y(x) = x^{\frac{1}{3}}$ zwischen $x = -1$ und $x = 0$ ist

   $$\int_{-1}^{0} x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} \Big|_{x=-1}^{x=0} = 0 - \frac{\sqrt[3]{(-1)^4}}{4/3} = -\frac{3}{4}$$

   (b) Das bestimmte Integral von $y(x) = x^{\frac{1}{3}}$ zwischen $x = 0$ und $x = +1$ ist

   $$\int_{0}^{+1} x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} \Big|_{x=0}^{x=+1} = \frac{\sqrt[3]{(+1)^4}}{4/3} - 0 = +\frac{3}{4}$$

   (c) Die Funktion $y(x) = x^{\frac{1}{3}}$ erfüllt $y(x) \leq 0$ für $x \leq 0$ und $y(x) \geq 0$ für $x \geq 0$. Daher ist der Flächeninhalt zwischen der Kurve für $y(x) = x^{\frac{1}{3}}$ und der x-Achse für $x \in [-1, +1]$ gegeben durch

   $$\int_{0}^{+1} x^{\frac{1}{3}} dx - \int_{-1}^{0} x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

2. Flächeninhalt zwischen Kurven

   (a) Die Kurven für $u(x) = x^3 - x - 3$ und $v(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ treffen einander in den x-Werten, die erfüllen

   $$u(x) = x^3 - x - 3 = x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = v(x)$$

   oder

   $$x(2x - 3) = 2x^2 - 3x = 0$$

   Daher besitzt die Differenz $u(x) - v(x)$ Nullstellen in $x = 0, \frac{3}{2}$. Da die Funktion $u(x) - v(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass das Vorzeichen der Differenz durch die folgenden Auswertungen bestimmt wird:

   $$\begin{array}{rcl} u(-1) - v(-1) & = & +5 \quad \Rightarrow \quad u(x) - v(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0) \\ u(1) - v(1) & = & -1 \quad \Rightarrow \quad u(x) - v(x) < 0 \quad \forall x \in (0, \frac{3}{2}) \\ u(2) - v(2) & = & +2 \quad \Rightarrow \quad u(x) - v(x) > 0 \quad \forall x \in (\frac{3}{2}, +\infty) \end{array}$$

   Daher ist der Flächeninhalt zwischen den Kurven für $u(x)$ und $v(x)$ für $x \in [0, 2]$ gegeben durch

   $$\int_{\frac{3}{2}}^{2} \underbrace{[u(x) - v(x)]}_{2x^2-3x} dx - \int_{0}^{\frac{3}{2}} \underbrace{[u(x) - v(x)]}_{2x^2-3x} dx = \left(2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{x=\frac{3}{2}}^{x=2} - \left(2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{x=0}^{x=\frac{3}{2}}$$

   $$= \frac{11}{24} - \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{19}{12}$$

   (b) Die Kurven für $f(x) = 1/x^{\frac{1}{3}}$ und $g(x) = 1/x^{\frac{1}{4}}$ treffen einander in den x-Werten, die erfüllen

   $$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = g(x)$$

   oder

   $$1 = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{1/12}$$

Daher besitzt die Differenz $f(x) - g(x)$ eine Nullstelle in $x = 1$. Da die Funktion $f(x) - g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$ stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass das Vorzeichen der Differenz durch die folgenden Auswertungen bestimmt wird:

$$\begin{array}{rclcrcll} f(2^{-12}) - g(2^{-12}) & = & +8 & \Rightarrow & f(x) - g(x) & > & 0 & \forall x \in (0,1) \\ f(2^{+12}) - g(2^{+12}) & = & -1/16 & \Rightarrow & f(x) - g(x) & < & 0 & \forall x \in (1,\infty) \end{array}$$

Daher ist der Flächeninhalt zwischen den Kurven für $f(x)$ und $g(x)$ für $x \in [0, (\frac{9}{8})^{12}]$ gegeben durch

$$\int_0^1 \underbrace{[f(x) - g(x)]}_{x^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{4}}} dx - \int_1^{(9/8)^{12}} \underbrace{[f(x) - g(x)]}_{x^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{4}}} dx$$

$$= \left(\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} - \left(\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} \right) \Big|_{x=1}^{x=(9/8)^{12}}$$

$$= \left(\frac{x^{2/3}}{2/3} - \frac{x^{3/4}}{3/4} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} - \left(\frac{x^{2/3}}{2/3} - \frac{x^{3/4}}{3/4} \right) \Big|_{x=1}^{x=(9/8)^{12}}$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3} \right) - \left[\left(\frac{3}{2} \left(\frac{9}{8} \right)^{12 \cdot \frac{2}{3}} - \frac{4}{3} \left(\frac{9}{8} \right)^{12 \cdot \frac{3}{4}} \right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{6} - \left[\left(\frac{3}{2} \left(\frac{9}{8} \right)^{8} - \frac{4}{3} \left(\frac{9}{8} \right)^{9} \right) - \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{3} - \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\frac{9}{8} \right) \left(\frac{9}{8} \right)^{8} = \frac{1}{3}$$

3. Leibniz-Regel

(a) Das bestimmte Integral ist

$$F(x) = \int_{\sin(x)}^{\ln(x)} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{t=\sin(x)}^{t=\ln(x)} = \frac{(\ln(x))^3}{3} - \frac{(\sin(x))^3}{3}$$

und mit der Kettenregel ist die Ableitung von $F(x)$ gegeben durch

$$F'(x) = \frac{3(\ln(x))^2}{3} (\ln(x))' - \frac{3(\sin(x))^2}{3} (\sin(x))' = (\ln(x))^2 \frac{1}{x} - (\sin(x))^2 \cos(x)$$

(b) Mit der Leibniz-Regel ist die Ableitung von $F(x)$ direkt gegeben durch

$$F'(x) = t^2 \Big|_{t=\ln(x)} (\ln(x))' - t^2 \Big|_{t=\sin(x)} (\sin(x))' = (\ln(x))^2 \frac{1}{x} - (\sin(x))^2 \cos(x)$$

die mit dem Ergebnis vom Teil (a) übereinstimmt, obwohl der Aufwand mit der Leibniz-Regel weniger ist.

(c) Die Ableitung der Funktion

$$F(x) = \int_{\tan^{-1}(x)}^{\tan(x)} e^{-t^2} dt$$

kann nicht mit der Methode im Teil (a) bestimmt werden, da es keine abgeschlossene Formel für eine Stammfunktion des Integrands e^{-t^2} gibt. Trotzdem mit der Leibniz-Regel,

$$F'(x) = e^{-t^2} \Big|_{t=\tan(x)} (\tan(x))' - e^{-t^2} \Big|_{t=\tan^{-1}(x)} (\tan^{-1}(x))'$$

$$= e^{-(\tan(x))^2} \sec^2(x) - e^{-(\tan^{-1}(x))^2} \frac{1}{1+x^2}$$

4. Numerische Integralrechnung

   (a) Für eine Approximation des Werts

$$\mathrm{erf}(1), \quad \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

   wird eine Riemannsche Summe $S(n)$ mit der Teilung

$$t_i = i/n, \quad i = 0, \ldots, n, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1} = 1/n, \quad i = 1, \ldots, n$$

   des Intervalls $[0, 1]$ und mit Auswertungen der Funktion $2e^{-t^2}/\sqrt{\pi}$ in $\hat{t}_i = t_i$, $i = 1, \ldots, n$, gegeben durch

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t_i^2} \Delta t_i = \frac{2}{n\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n} e^{-(i/n)^2}$$

   (b) Die Auswertungen von $S(n)$ für $n = 10, 100, 1000, 10000$ sind

$S(10) =$ `Sum[(2./10) Exp[-(i/10)^2]/Sqrt[Pi], {i, 1, 10}]` $= 0.806345$

$S(100) =$ `Sum[(2./100) Exp[-(i/100)^2]/Sqrt[Pi], {i, 1, 100}]` $= 0.839128$

$S(1000) =$ `Sum[(2./1000) Exp[-(i/1000)^2]/Sqrt[Pi], {i, 1, 1000}]` $= 0.842344$

$S(10000) =$ `Sum[(2./10000) Exp[-(i/10000)^2]/Sqrt[Pi], {i, 1, 10000}]` $= 0.842665$

   (c) Die Auswertung der error function ist $\mathrm{erf}(1) = 0.842701$.

5. Trennbare Differentialgleichungen

   (a) Zur Lösung des Problems des exponentiellen Wachstums,

$$m'(t) = 2m(t), \quad m(0) = 3$$

   gruppiert man die m-Variablen zusammen,

$$\frac{m'(t)}{m(t)} = 2, \quad m(0) = 3 \quad \text{oder} \quad \frac{m'(s)}{m(s)} = 2, \quad m(0) = 3$$

   und integriert beide Seiten von $t = 0$ bis zu einer beliebigen Zeit $t > 0$,

$$\ln(|m(s)|) \Big|_{s=0}^{s=t} = \int_0^t \frac{m'(s)}{m(s)} ds = \int_0^t 2ds = 2t \Big|_{s=0}^{s=t} = 2t$$

   Zur Bestimmung der Stammfunktion $\ln(|m(t)|)$ erkennt man im Integrand $m'(t)/m(t)$, dass die Ableitung des Nenners im Zähler steht, und dann verwendet man die Kettenregel. Alternativ macht man die Substitution $u = m(s)$, $du = m'(s)ds$, und es gilt

$$\int \frac{m'(s)}{m(s)} ds = \int \frac{du}{u} = \ln(|u|) = \ln(|m(t)|)$$

   Durch die Auswertungen in den jeweiligen Zeiten ergibt sich mit $m(0) = 3$

$$\ln(|m(t)|/3) = \ln(|m(t)|) - \ln(3) = \ln(|m(t)|) - \ln(|m(0)|) = \ln(|m(s)|) \Big|_{s=0}^{s=t} = 2t$$

   Bei der Auswertung der Funktion $\exp(\cdot)$ in beiden Seiten ergibt sich

$$m(t)/3 = |m(t)|/3 = \exp(\ln(|m(t)|/3)) = e^{2t} \quad \text{oder} \quad m(t) = 3e^{2t}$$

   wobei $m(t) > 0$ aus $m(0) > 0$ folgt, solang die rechte Zeite keine Nullstelle hat. Zur Kontrolle bestätigt man folgendermaßen direkt, $m(t)$ löst das Problem des exponentiellen Wachstums,

$$m'(t) = D_t 3e^{2t} = 2(3e^{2t}) = 2m(t), \quad m(0) = 3e^0 = 3.$$

(b) Zur Lösung des Problems des logistischen Wachstums,

$$p'(t) = p(t)(1 - p(t)), \quad p(0) = 1/2$$

gruppiert man die p-Variablen zusammen,

$$\frac{p'(t)}{p(t)(1-p(t))} = 1, \quad p(0) = 1/2 \quad \text{oder} \quad \frac{p'(s)}{p(s)(1-p(s))} = 1, \quad p(0) = 1/2$$

und integriert beide Seiten von $t = 0$ bis zu einer beliebigen Zeit $t > 0$,

$$\int_0^t \frac{p'(s)}{p(s)(1-p(s))} ds = \int_0^t ds = t \Big|_{s=0}^{s=t} = t$$

Zur Bestimmung einer Stammfunktion verwendet man Partialbruchzerlegung,

$$\frac{1}{p(1-p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1-p}$$

Durch Multiplikation mit $p(1-p)$ sieht man, die unbekannten Koeffizienten A und B müssen für alle p erfüllen,

$$1 = A(1-p) + Bp \quad \text{und insbesondere} \quad \begin{cases} p = 0: & 1 = A \cdot 1 + B \cdot 0 \\ p = 1: & 1 = A \cdot 0 + B \cdot 1 \end{cases}$$

oder $A = 1 = B$. Das bestimmte Integral ist dann

$$\int_0^t \frac{p'(s)}{p(s)(1-p(s))} ds = \int_0^t \left[\frac{p'(s)}{p(s)} + \frac{p'(s)}{1-p(s)}\right] ds = \int_0^t \frac{p'(s)}{p(s)} ds - \int_0^t \frac{-p'(s)}{1-p(s)} ds$$

$$= \ln(|p(s)|) \Big|_{s=0}^{s=t} - \ln(|1-p(s)|) \Big|_{s=0}^{s=t}$$

wobei, wie im Teil (a), die Stammfunktionen $\ln(|p(t)|)$ und $\ln(|1-p(t)|)$ durch die Kettenregel oder durch die Substitutionen $u = p(s)$, $du = p'(s)ds$, bzw. $v = 1 - p(s)$, $dv = -p'(s)ds$, bestimmt werden. Man sammelt die obigen Ergebnisse und bekommt

$$\ln(|p(s)|) \Big|_{s=0}^{s=t} - \ln(|1-p(s)|) \Big|_{s=0}^{s=t} = t$$

Durch die entsprechenden Auswertungen mit $p(0) = 1/2$

$$t = [\ln(|p(t)|) - \ln(|p(0)|)] - [\ln(|1-p(t)|) - \ln(|1-p(0)|)]$$

$$= [\ln(|p(t)|) - \ln(1/2)] - [\ln(|1-p(T)|) - \ln(1/2)] = \ln\left(\left|\frac{p(t)}{1-p(t)}\right|\right) = \ln\left(\frac{p(t)}{1-p(t)}\right)$$

wobei $p(t)/(1-p(t)) > 0$ aus $p(0)/(1-p(0)) > 0$ folgt, solang die andere Seite keine Nullstelle hat. Bei der Auswertung der Funktion $\exp(\cdot)$ in beiden Seiten ergibt sich

$$e^t = \frac{p(t)}{1-p(t)} \quad \Rightarrow \quad (1-p(t))e^t = p(t) \quad \Rightarrow \quad e^t = p(t)(1+e^t)$$

oder

$$p(t) = \frac{e^t}{1+e^t}\left(\frac{e^{-t}}{e^{-t}}\right) = \frac{1}{1+e^{-t}}$$

Zur Kontrolle bestätigt man folgendermaßen direkt, $p(t)$ löst das Problem des logistischen Wachstums,

$$p'(t) = D_t(1+e^{-t})^{-1} = -(1+e^{-t})^{-2} D_t e^{-t} = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$$

$$p(t)(1-p(t)) = \frac{1}{1+e^{-t}}\left[1 - \frac{1}{1+e^{-t}}\right] = \frac{1}{1+e^{-t}}\left[\frac{1+e^{-t}-1}{1+e^{-t}}\right] = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = p'(t)$$

$$p(0) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$$

6. Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung

(a) Mit $x''(t) = -g = -9.8$ Meter/Sekunde^2 folgt

$$x'(t) = x'(0) + \int_0^t x''(s)ds = -\int_0^t gds = -gt$$

wobei $x'(0) = 0$ verwendet worden ist. Wenn nochmals integiert wird, ergibt sich

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s)ds = h - \int_0^t gsds = h - gt^2/2$$

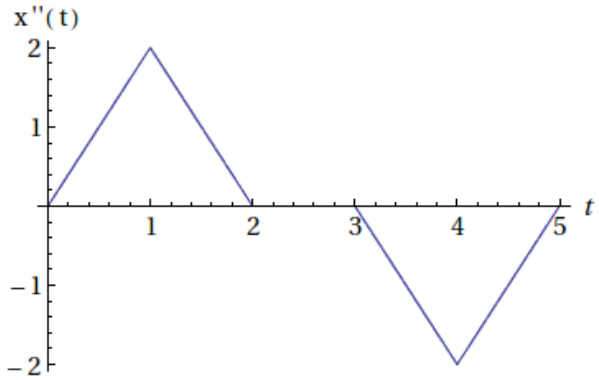
wobei $x(0) = h = 10$ Meter verwendet worden ist. Die Aufprallszeit τ erfüllt

$$0 = x(\tau) = h - g\tau^2/2 \quad \text{oder} \quad 2h/g = \tau^2 \quad \text{oder} \quad \tau = \sqrt{2h/g}$$

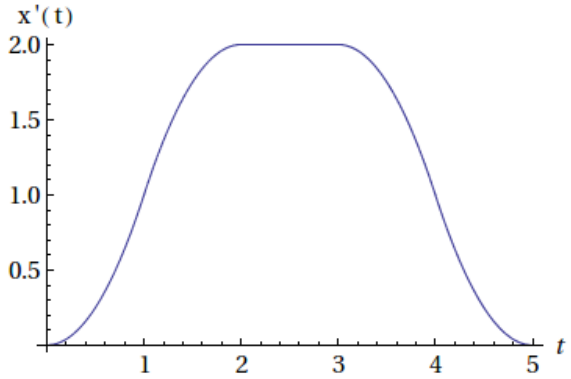
Die Aufprallsgeschwindigkeit ist dann

$$x'(\tau) = -g\tau = -g\sqrt{2h/g} = -\sqrt{2hg}$$

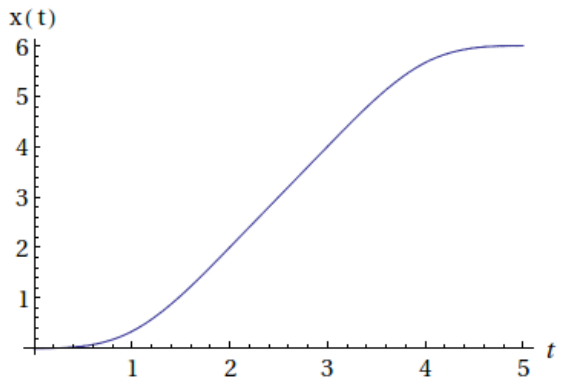
(b) Anhand der Beschleunigung



integriert man grafisch (der Flächeninhalt der obigen Kurve ist 2 bis $t = 2$, er bleibt 2 bis $t = 3$ und er wird 0 bis $t = 5$) und bekommt die Geschwindigkeit



und die Position (wegen Symmetrien ist der Flächeninhalt der obigen Kurve 2 für die jeweiligen Teilintervalle $t \in [0, 2]$, $t \in [2, 3]$ und $t \in [3, 5]$)



d.h. es gelten $x(2) = 2$, $x(3) = x(2) + 2 = 4$ und $x(5) = x(3) + 2 = 6$. Insbesondere mit $x(5) = 6$ fährt man 6 Kilometer in den 5 Minuten. Die durchschnittliche Geschwindigkeit ist 6 Kilometer / 5 Minuten oder 72 Kilometer/Stunde.

Man kann das Problem auch mit Formeln folgendermaßen lösen. Aus der Grafik für $x''(t)$ liest man 2 Punkte auf jeder Gerade, bestimmt die Formel für die entsprechende Gerade und sammelt diese Formeln für die folgende stückweise Definition für die Beschleunigung,

$$x''(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0,1] \\ 4-2t, & t \in [1,2] \\ 0, & t \in [2,3] \\ 6-2t, & t \in [3,4] \\ 2t-10, & t \in [4,5] \end{cases}$$

Die Geschwindigkeit bekommt man mit Formeln, wenn man $x''(t)$ stückweise integriert.
Mit $x'(0) = 0$ ist $x'(t)$ für $t \in [0,1]$ gegeben durch

$$x'(t) = x'(0) + \int_0^t x''(s)ds = \int_0^t 2sds = s^2|_0^t = t^2, \quad t \in [0,1]$$

Mit $x'(1) = 1$ (aus der letzten Formel) ist $x'(t)$ für $t \in [1,2]$ gegeben durch

$$x'(t) = x'(1) + \int_1^t x''(s)ds = 1 + \int_1^t (4-2s)ds = 1 + (4s-s^2)|_1^t = -2+4t-t^2, \quad t \in [1,2]$$

Mit $x'(2) = 2$ (aus der letzten Formel) ist $x'(t)$ für $t \in [2,3]$ gegeben durch

$$x'(t) = x'(2) + \int_2^t x''(s)ds = 2 + \int_2^t 0ds = 2, \quad t \in [2,3]$$

Mit $x'(3) = 2$ (aus der letzten Formel) ist $x'(t)$ für $t \in [3,4]$ gegeben durch

$$x'(t) = x'(3) + \int_3^t x''(s)ds = 2 + \int_3^t (6-2s)ds = 2 + (6s-s^2)|_3^t = -7+6t-t^2, \quad t \in [3,4]$$

Mit $x'(4) = 1$ (aus der letzten Formel) ist $x'(t)$ für $t \in [4,5]$ gegeben durch

$$x'(t) = x'(4) + \int_4^t x''(s)ds = 1 + \int_4^t (2s-10)ds = 1 + (s^2-10s)|_4^t = t^2-10t+25, \quad t \in [4,5]$$

Zusammengefasst ist die Geschwindigkeit gegeben durch

$$x'(t) = \begin{cases} t^2, & t \in [0,1] \\ -2+4t-t^2, & t \in [1,2] \\ 2, & t \in [2,3] \\ -7+6t-t^2, & t \in [3,4] \\ t^2-10t+25, & t \in [4,5] \end{cases}$$

Die Position bekommt man mit Formeln, wenn man $x'(t)$ stückweise integriert.
Mit $x(0) = 0$ ist $x(t)$ für $t \in [0,1]$ gegeben durch

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s)ds = \int_0^t s^2 ds = t^3/3, \quad t \in [0,1]$$

Mit $x(1) = \frac{1}{3}$ (aus der letzten Formel) ist $x(t)$ für $t \in [1,2]$ gegeben durch

$$x(t) = x(1) + \int_1^t x'(s)ds = \tfrac{1}{3} + \int_1^t (-2+4s-s^2)ds = 2/3 - 2t + 2t^2 - t^3/3, \quad t \in [1,2]$$

Mit $x(2) = 2$ (aus der letzten Formel) ist $x(t)$ für $t \in [2,3]$ gegeben durch

$$x(t) = x(2) + \int_2^t x'(s)ds = 2 + \int_2^t 2ds = 2t - 2, \quad t \in [2,3]$$

Mit $x(3) = 4$ (aus der letzten Formel) ist $x(t)$ für $t \in [3,4]$ gegeben durch

$$x(t) = x(3) + \int_3^t x'(s)ds = 4 + \int_3^t (-7+6s-s^2)ds = 7 - 7t + 3t^2 - t^3/3, \quad t \in [3,4]$$

Mit $x(4) = 17/3$ (aus der letzten Formel) ist $x(t)$ für $t \in [4,5]$ gegeben durch

$$x(t) = x(4) + \int_4^t x'(s)ds = \tfrac{17}{3} + \int_4^t (s^2 - 10s + 25)ds = -107/3 + 25t - 5t^2 + t^3/3, \quad t \in [4,5]$$

Zusammengefasst ist die Position gegeben durch

$$x(t) = \begin{cases} t^3/3, & t \in [0,1] \\ 2/3 - 2t + 2t^2 - t^3/3, & t \in [1,2] \\ 2t - 2, & t \in [2,3] \\ 7 - 7t + 3t^2 - t^3/3, & t \in [3,4] \\ -107/3 + 25t - 5t^2 + t^3/3, & t \in [4,5] \end{cases}$$

Aus dieser Formel ergibt sich $x(5) = 6$.

12 Flächen, Tangentialebene, Lokale Extrema, Sattelpunkte

12.1 Beispiele

1. Rotationsflächen

   Die folgenden Funktionen hängen nur vom Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ zwischen einem Punkt (x, y) und dem Ursprung $(0, 0)$ ab. Daher sind die grafischen Darstellungen durch Rotationsflächen gegeben. Stellen Sie diese grafisch dar:

   (a) $f(x, y) = \dfrac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 1$

   (b) $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \ln(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad g(0, 0) = 0$

   und anhand der jeweiligen Grafiken erklären Sie in Wörtern, ob und wo die Funktionen stetig und differenzierbar sind.

   Hinweise: Stellen Sie jede Funktion in $\mathbb{R}^2$ für fixiertes $y = 0$ grafisch dar, und drehen Sie die sich ergebende Kurve um die z-Achse in $\mathbb{R}^3$. Zur Kontrolle können Sie die folgenden Mathematica-Befehle probieren:

   ```
   Plot3D[Sin[Sqrt[x^2+y^2]]/Sqrt[x^2+y^2],{x,-10,+10},{y,-10,+10}, PlotRange->All]
   ```

   ```
   Plot3D[Sqrt[x^2+y^2]Log[Sqrt[x^2+y^2]],{x,-0.7,+0.7},{y,-0.7,+0.7},PlotRange->All]
   ```

2. Stetigkeit und Partielle Differenzierbarkeit

   Zeigen Sie, die Funktion

   $$f(x, y) = \frac{2yx^2}{x^4 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$

   ist an der Stelle $(0, 0)$ nicht stetig aber doch *partiell* differenzierbar.

   Hinweise: Zeigen Sie, entlang einer Kurve $y = kx^2$ hängt $f(x, y)$ nur von $k \in \mathbb{R}$ ab. Daher ist der Grenzwert für $f(x, y)$ mit $(x, y) = (x, kx^2) \to (0, 0)$ nicht eindeutig. Für partielle Differenzierbarkeit sind die folgenden Grenzwerte zu kontrollieren:

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}, \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h}$$

   Zur Visualisierung der grafischen Darstellung können Sie den folgenden Mathematica-Befehl probieren:

   ```
   Plot3D[2y x^2/(x^4+y^2),{x,-1,+1},{y,-1,+1},PlotPoints->100]
   ```

3. Tangentialebene

   (a) Stellen Sie die Funktion grafisch dar

   $$f(x,y) = \sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5} \overset{\text{Q.E.}}{=} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

   und bestimmen Sie die Tangentialebene durch den Punkt $(2, 3, \sqrt{2})$. Existiert eine Tangentialebene durch den Punkt $(1, 2, 0)$?

   (b) Stellen Sie die Funktion grafisch dar

   $$g(x,y) = \sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6}$$

   und bestimmen Sie die Tangentialebene durch den Punkt $(2, 3, \sqrt{3})$. Existiert eine Tangentialebene durch den Punkt $(1, 2, 1)$?

   Zur Visualisierung der grafischen Darstellungen können Sie die folgenden Mathematica-Befehle probieren:

```
Plot3D[{Sqrt[(x-1)^2+(y-2)^2],(x-2)/Sqrt[2]+(y-3)/Sqrt[2]+Sqrt[2]},{x,0,2},{y,1,3},PlotPoints->100]
Plot3D[{Sqrt[1+(x-1)^2+(y-2)^2],(x-2)/Sqrt[3]+(y-3)/Sqrt[3]+Sqrt[3]},{x,0,2},{y,1,3},PlotPoints->100]
```

4. Lokale Extrema

   Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

   $$f(x,y) = \frac{x}{3}\left(\frac{x^2-3}{1+y^2}\right)$$

   und begründen Sie Ihre Ergebnisse anhand der Bedingungen der lokalen Extrema.

5. Sattelpunkte

   Finden Sie einen Sattelpunkt der Funktion

   $$f(x,y) = xy$$

   und begründen Sie Ihr Ergebnis anhand der Charakterisierung eines Sattelpunkts.

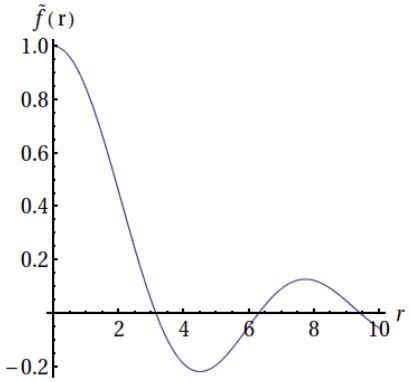
12.2 Lösungen

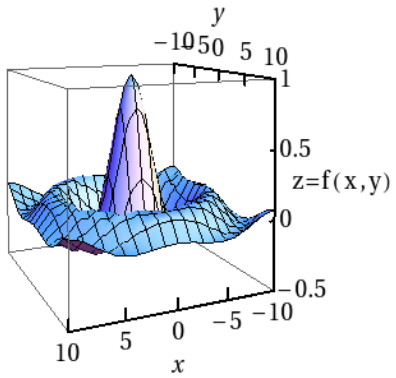
1. Rotationsflächen

   (a) Die grafische Darstellung der Funktion einer einzigen Variable

$$\tilde{f}(r) = \frac{\sin(r)}{r}, \quad r > 0, \quad \tilde{f}(0) = 1$$

steht unten links





und die grafische Darstellung der Drehung dieser Kurve rund um die z-Achse

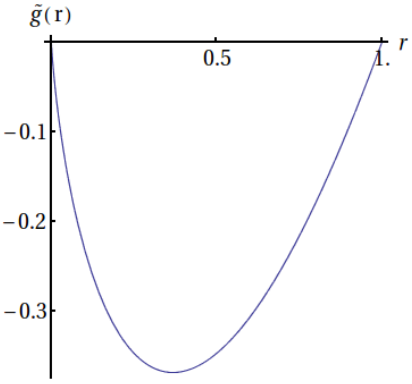
$$f(x,y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 1$$

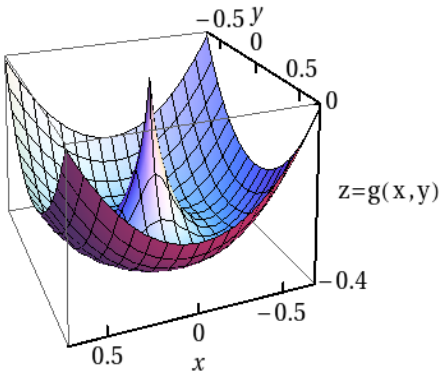
steht oben rechts. Es gibt keine Sprünge, keine Unendlichkeiten und keine unendlich schnellen Schwingungen in der Grafik. Mit der stetigen Ergänzung $\tilde{f}(0) = 1$ und analog $f(0,0) = 1$ sind beide Funktionen überall stetig. Die partiellen Ableitungen existieren, und sie sind überall stetig. Daher gibt es eine Tangentialebene an jeder Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}$, und die Funktion $f(x,y)$ ist differenzierbar und folglich partiell differenzierbar.

   (b) Die grafische Darstellung der Funktion einer einzigen Variable

$$\tilde{g}(r) = r\ln(r), \quad r > 0, \quad \tilde{g}(0) = 0$$

steht unten links





und die grafische Darstellung der Drehung dieser Kurve rund um die z-Achse

$$g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\ln(\sqrt{x^2+y^2}), \quad (x,y) \neq (0,0), \quad g(0,0) = 0$$

steht oben rechts. Es gibt keine Sprünge, keine Unendlichkeiten und keine unendlich schnellen Schwingungen in der Grafik. Mit der stetigen Ergänzung $\tilde{g}(0) = 0$ und

analog $g(0,0) = 0$ sind beide Funktionen überall stetig. Außer an der Stelle $(x, y) = (0,0)$ existieren die partiellen Ableitungen und sie sind stetig. (Für die Funktion $w(t) = g(\alpha t, \beta t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, existiert $w'(0)$ nicht.) Es gibt dann eine Tangentialebene an jeder Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}\backslash(0,0)$, und die Funktion $g(x, y)$ ist differenzierbar und folglich partiell differenzierbar $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\backslash(0,0)$, aber in $(x, y) = (0,0)$ ist $g(x, y)$ nur stetig.

2. Stetigkeit und Partielle Differenzierbarkeit

   Für die Funktion

$$f(x,y) = \frac{2yx^2}{x^4 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0$$

   ist der Grenzwert $(x, y) \to (0,0)$ entlang einer Kurve $y = kx^2$, $k \in \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\lim_{(x,y=kx^2)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, kx^2) = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2x^2}{x^4 + k^2x^4}\left(\frac{x^{-4}}{x^{-4}}\right) = \frac{2k}{1+k^2}$$

   Da dieser Grenzwert entlang der Kurve von k abhängt, gibt es keinen eindeutigen Wert L, der von $f(x, y)$ angenähert wird, während $(0,0)$ von (x, y) *beliebig* angenähert wird. Daher existiert der allgemeine Grenzwert nicht. Außerdem stimmt kein einziger dieser k-abhängigen Grenzwerte mit dem Funktionswert $f(0,0) = 0$ überein. Daher ist die Funktion an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig.

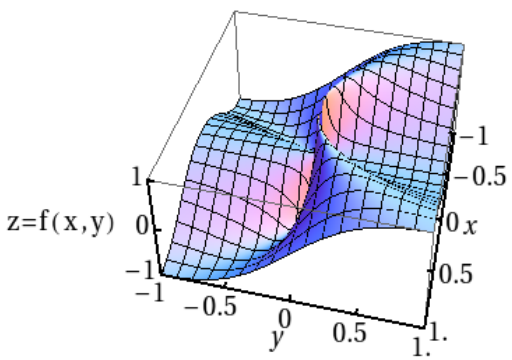
   Auf der anderen Seite existieren die folgenden Grenzwerte der Differenzenquotienten

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2\cdot 0\cdot h^2}{h^4+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h\cdot 0^2}{0^4+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

   und daher ist die Funktion in $(0,0)$ partiell differenzierbar!

   Die grafische Darstellung der Funktion ist:



3. Tangentialebene

   (a) Die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

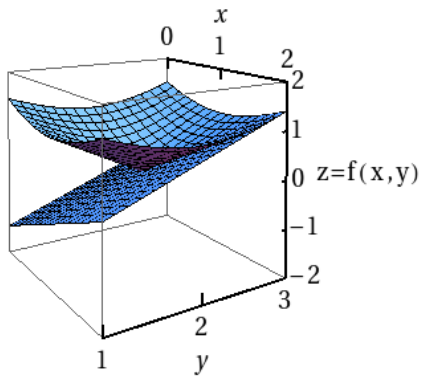
sind

$$f_x(x,y) = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}, \quad f_y(x,y) = \frac{y-2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$$

Die Tangentialebene durch den Punkt $(2,3,\sqrt{2})$ ist

$$z = f(2,3) + f_x(2,3)(x-2) + f_y(2,3)(y-3) = \sqrt{2} + (x-2)/\sqrt{2} + (y-3)/\sqrt{2}$$

Die grafische Darstellung der Funktion zusammen mit dieser Tangentialebene ist



Die Fläche ist kegelförmig, und daher ist die Tangentialebene auch tangent entlang einer ganzen Gerade in der Kegel.

Wegen des Knicks im Scheitel der Kegel gilt für $w(t) = f(1+\alpha t, 2+\beta t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dass $w'(0)$ nicht existiert. Daher gibt es keine Tangentialebene durch $(1,2,0)$, und die Funktion ist an der Stelle $(1,2)$ nicht differenzierbar. Man bestätigt folgendermaßen, dass die Funktion an der Stelle $(1,2)$ nicht partiell differenzierbar ist,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,2)-f(1,2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sign}(h) \quad \text{exisitert nicht}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1,2+h)-f(1,2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sign}(h) \quad \text{exisitert nicht}$$

(b) Die partiellen Ableitungen der Funktion

$$g(x,y) = \sqrt{1+(x-1)^2+(y-2)^2}$$

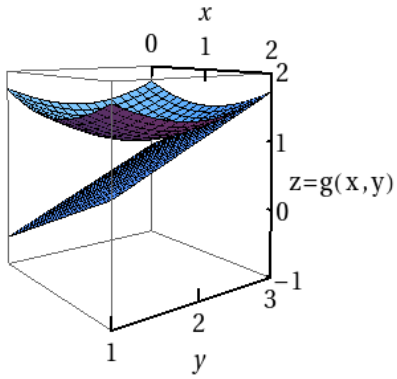
sind

$$g_x(x,y) = \frac{x-1}{\sqrt{1+(x-1)^2+(y-2)^2}}, \quad g_y(x,y) = \frac{y-2}{\sqrt{1+(x-1)^2+(y-2)^2}}$$

Die Tangentialebene durch den Punkt $(2,3,\sqrt{3})$ ist

$$z = g(2,3) + g_x(2,3)(x-2) + g_y(2,3)(y-3) = \sqrt{3} + (x-2)/\sqrt{3} + (y-3)/\sqrt{3}$$

Die grafische Darstellung der Funktion zusammen mit dieser Tangentialebene ist



Die Fläche ist eine Abrundung der Kegelform des letzten Beispiels, und daher ist die Tangentialebene nur in dem einzigen Punkt $(2, 3, \sqrt{3})$ tangent.

Wegen der Abrundung im Scheitel gibt es eine Tangentialebene durch $(1, 2, 1)$. Daher ist die Funktion überall differenzierbar und folglich überall partiell differenzierbar. Die Tangentialebene durch $(1, 2, 1)$ ist

$$z = g(1,2) + g_x(1,2)(x-1) + g_y(1,2)(y-2) = 1 + 0 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-2) = 1$$

d.h. diese Tangentialebene ist flach. Weiters besitzt die Funktion ein lokales Minimum an der Stelle $(x, y) = (1, 2)$.

4. Lokale Extrema

Für die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x}{3}\left(\frac{x^2-3}{1+y^2}\right)$$

sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung gegeben durch

$$f_x(x,y) = \frac{x^2-1}{y^2+1}, \quad f_y(x,y) = \frac{2xy(3-x^2)}{3(1+y^2)^2}$$

Daher sind $(x, y) = (-1, 0)$ und $(x, y) = (+1, 0)$ kritische Punkte, in denen $f_x(-1, 0) = 0 = f_y(-1, 0)$ und $f_x(+1, 0) = 0 = f_y(+1, 0)$ gelten. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind gegeben durch

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2x}{y^2+1}, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{2y(1-x^2)}{(1+y^2)^2}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{2x(x^2-3)(3y^2-1)}{3(1+y^2)^3}$$

Auswertungen der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung in den kritischen Punkten sind

$$f_{xx}(-1,0) = -2, \quad f_{xy}(-1,0) = 0, \quad f_{yy}(-1,0) = -4/3$$

$$f_{xx}(+1,0) = +2, \quad f_{xy}(+1,0) = 0, \quad f_{yy}(+1,0) = +4/3$$

und es gelten

$$f_{xx}(-1,0)f_{yy}(-1,0) - f_{xy}(-1,0)^2 = 8/3 > 0$$

und

$$f_{xx}(+1,0)f_{yy}(+1,0) - f_{xy}(+1,0)^2 = 8/3 > 0$$

Laut der Charakterisierung eines lokalen Extremums gibt es ein lokales Maximum in $(-1, 0)$ und ein lokales Minimum in $(+1, 0)$.

5. Sattelpunkte

Für die Funktion

$$f(x,y) = xy$$

sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung gegeben durch

$$f_x(x,y) = y, \quad f_y(x,y) = x$$

und daher ist $(x, y) = (0, 0)$ ein kritischer Punkt, in dem $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$ gilt. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind gegeben durch

$$f_{xx}(x,y) = 0, \quad f_{xy}(x,y) = 1, \quad f_{yy}(x,y) = 0$$

Die Ungleichung

$$f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}(x,y)^2 = -1 < 0$$

ist eine Bedingung für einen Sattelpunkt in $(x, y) = (0, 0)$. Außerdem gilt für $x \neq 0$,

$$f(x, x) = x^2 > 0 = f(0, 0) > -x^2 = f(x, -x)$$

Daher gibt es Stellen (x, y) (z.B. mit $y = x$) in der Nähe von $(0, 0)$, in denen $f(x, y)$ größer ist als $f(0, 0)$, und es gibt andere Stellen (x, y) (z.B. mit $y = -x$) in der Nähe von $(0, 0)$ in denen $f(x, y)$ kleiner ist als $f(0, 0)$. Daher ist $(x, y) = (0, 0)$ ein kritischer Punkt, der keiner Extremstelle entspricht.

13 Eingeschränkte Extrema, Geometrische Projektion, Regression

13.1 Beispiele

1. Eingeschränkte Extrema

   Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion $f(x, y) = xy$ über die folgenden Mengen:

   (a) über das Quadrat $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$ und über seinen Rand $\partial Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = 1\}$

   (b) über die Scheibe $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ und über ihren Rand $\partial S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

2. Geometrische Projektion

   (a) Bestimmen Sie den minimalen Abstand zwischen dem Punkt $P = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ und der Parabel $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. Finden Sie einen Punkt $Q = (x_0, y_0)$ in der Parabel ($y_0 = x_0^2$), in dem dieser minimale Abstand angenommen wird. Ein solcher Punkt Q heißt eine *Projektion* vom Punkt P in die Parabel E.

   (b) Bestimmen Sie den minimalen Abstand zwischen dem Punkt $P = (2, 0, 0) \in \mathbb{R}^2$ und der Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1\}$. Finden Sie einen Punkt $Q = (x_0, y_0, z_0)$ in der Ebene ($x_0 + y_0 + z_0 = 1$), in dem dieser minimale Abstand angenommen wird. Ein solcher Punkt Q heißt eine *Projektion* vom Punkt P in die Ebene E.

3. Lineare Regression

   Für die Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$ und alle x_i verschieden) ist zu zeigen, dass die Funktion

   $$E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} [(a_0 + a_1 x_i) - y_i]^2$$

   global über $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ in (a_0^*, a_1^*) minimiert wird, wobei

   $$a_1^* = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad a_0^* = \bar{y} - a_1^* \bar{x}$$

   Daher ist die (durch lineare Regression bestimmte) Gerade $y = a_0 + a_1^* x$ eine repräsentative Darstellung der Daten.

   (a) Zeigen Sie, (a_0^*, a_1^*) ist ein kritischer Punkt für $E(a_0, a_1)$.

   (b) Zeigen Sie, die partiellen Ableitung zweiter Ordnung der Funktion $E(a_0, a_1)$ sind

   $$E_{a_1 a_1}(a_0, a_1) = 2n\overline{x^2} > 0, \quad E_{a_0 a_0}(a_0, a_1) = 2n > 0 \quad \text{und} \quad E_{a_1 a_0}(a_0, a_1) = 2n\bar{x}.$$

   (c) Zeigen Sie, es gilt

   $$\overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

   und daher folgt

   $$E_{a_1 a_1}(a_0, a_1) E_{a_0 a_0}(a_0, a_1) - E_{a_1 a_0}(a_0, a_1)^2 = 4n^2(\overline{x^2} - \bar{x}^2) = \overline{(x - \bar{x})^2} > 0$$

   (d) Anhand dieser Ergebnisse ziehen Sie mit Begründung den Schluss, dass die Funktion $E(a_0, a_1)$ global konvex ist, und daher wird sie in (a_0^*, a_1^*) global über $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ minimiert.

4. Quadratische Regression

   Gegeben seien die Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, die ungefähr eine quadratische Beziehung aufweisen. Eine repräsentative Parabel ist durch Regression zu finden. Dafür soll eine minimierende Stelle $(a_0^*, a_1^*, a_2^*) \in \mathbb{R}^3$ für die Funktion

$$E(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} [(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2) - y_i]^2$$

   gefunden werden. Zeigen Sie, $(a_0^*, a_1^*, a_2^*) \in \mathbb{R}^3$ ist kritisch für E, wenn

$$\begin{aligned} a_0 + a_1\overline{x} + a_2\overline{x^2} &= \overline{y} \\ a_0\overline{x} + a_1\overline{x^2} + a_2\overline{x^3} &= \overline{xy} \\ a_0\overline{x^2} + a_1\overline{x^3} + a_2\overline{x^4} &= \overline{x^2 y} \end{aligned}$$

   Sehen Sie das nächste Beispiel für einen beliebigen Grad des Polynoms.

5. Polynomiale Regression

   Für weitere Details sehen Sie das nächste Kapitel und den Anhang.

   Für die Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$ und alle x_i verschieden) wird ein repräsentatives Polynom $y(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ durch Minimierung der Zielfunktion

$$E(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} [(a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m) - y_i]^2$$

   über $\{a_i\}_{i=0}^m \in \mathbb{R}^{m+1}$ bestimmt.

   (a) Zeigen Sie mit

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

   die Zielfunktion ist gegeben durch

$$E(\boldsymbol{a}) = \|M\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2$$

   (b) Zeigen Sie, der Vektor dieser partiellen Ableitungen $\{\partial_{p_k} E(\boldsymbol{a})\}_{k=0}^m$ lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\{\partial_{p_k} E(\boldsymbol{a})\}_{k=0}^m = 2(M^\top M\boldsymbol{a} - M^\top \boldsymbol{b})$$

   (c) Zeigen Sie, die Matrix $\{\partial_{p_l}\partial_{p_k} E(\boldsymbol{a})\}_{k,l=0}^m$ aller partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\{\partial_{p_l}\partial_{p_k} E(\boldsymbol{a})\}_{k,l=0}^m = 2M^\top M$$

   Bemerkung: Wegen der Eigenschaften von $M^\top M$ kann gezeigt werden, dass $E(\boldsymbol{a})$ global konvex ist, und daher wird die Zielfunktion im kritischen Punkt $\boldsymbol{a}^*$ global minimiert, wobei

$$(M^\top M)\boldsymbol{a}^* = M^\top \boldsymbol{b}$$

13.2 Lösungen

1. Eingeschränkte Extrema

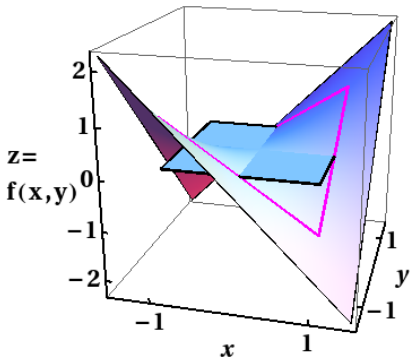
   (a) Die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = xy$$

über die Menge

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \leq 1\}$$

sollen gefunden werden. Die grafische Darstellung des Problems ist gegeben durch



wobei die sattelförmige (blaue) Fläche der Funktion $f(x,y)$ entspricht, und das flache (zyanfarbige) Quadrat der Menge Q entspricht. Weiters entspricht die (magentafarbige) Kurve den Werten von $f(x,y)$ über den Rand von Q,

$$\partial Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} = 1\}$$

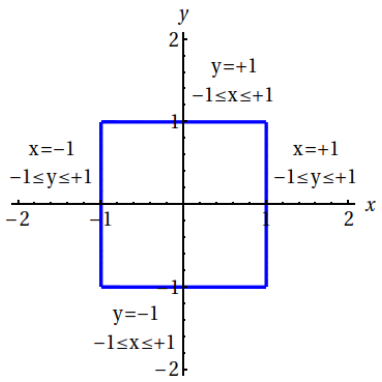
Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind gegeben durch

$$f_x(x,y) = y, \quad f_y(x,y) = x$$

und daher ist $(x,y) = (0,0)$ der einzige kritische Punkt in der Menge Q, in dem $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$ gelten. Der Funktionswert an dieser Stelle ist

$$f(0,0) = 0$$

Die grafische Darstellung des Rands ∂Q ist gegeben durch



Um die Extremwerte von $f(x,y)$ am Rand ∂Q zu zeigen, wird beispielsweise die obere Seite mit $y = +1$ und $-1 \leq x \leq +1$ im Detail untersucht. Sei $g(x)$ durch die f-Werte auf dieser Seite definiert:

$$g(x) = f(x,+1) = x, \quad x \in [-1,+1]$$

Das Rezept der globalen Extrema zeigt für $g(x)$ mit $D = [-1, +1]$, das globale Minimum für g ist $g(-1) = -1$ und das globale Maximum für g ist $g(+1) = +1$. Analog kann gezeigt werden, die Extremwerte von $f(x, y)$ über die anderen Seiten sind die gleichen,

$$-1 = g(-1) = f(-1, +1) = f(+1, -1), \quad +1 = g(+1) = f(+1, +1) = f(-1, -1)$$

Der interne Wert $f(0, 0) = 0$ liegt zwischen den Extremwerten am Rand. Daher ist das globale Minimum von $f(x, y)$ über Q gegeben durch $f(-1, +1) = f(+1, -1) = -1$, und das globale Maximum von $f(x, y)$ über Q ist $f(-1, -1) = f(+1, +1) = +1$.
Das gleiche Argument zeigt, das globale Minimum von $f(x, y)$ über den Rand ∂Q ist gegeben durch $f(-1, +1) = f(+1, -1) = -1$, und das globale Maximum von $f(x, y)$ über ∂Q ist $f(-1, -1) = f(+1, +1) = +1$.

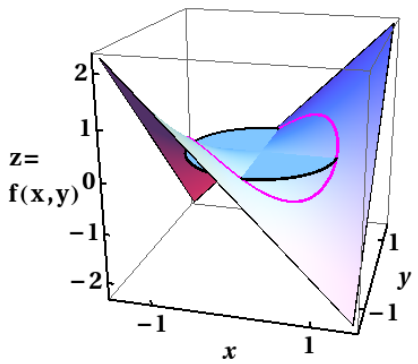
(b) Die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = xy$$

über die Menge

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

sollen gefunden werden. Die grafische Darstellung des Problems ist gegeben durch



wobei die sattelförmige (blaue) Fläche der Funktion $f(x, y)$ entspricht, und die flache (zyanfarbige) Scheibe der Menge S entspricht. Weiters entspricht die (magentafarbige) Kurve den Werten von $f(x, y)$ über den Rand von S,

$$\partial S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

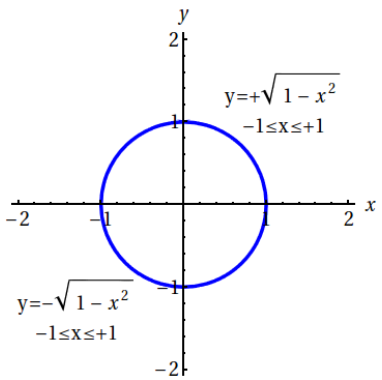
Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind gegeben durch

$$f_x(x, y) = y, \quad f_y(x, y) = x$$

und daher ist $(x, y) = (0, 0)$ der einzige kritische Punkt in der Menge S, in dem $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$ gelten. Der Funktionswert an dieser Stelle ist

$$f(0, 0) = 0$$

Die grafische Darstellung des Rands ∂S ist gegeben durch



Um die Extremwerte von $f(x,y)$ am Rand ∂S zu zeigen, wird beispielsweise die obere Seite mit $y = +\sqrt{1-x^2}$ und $-1 \leq x \leq +1$ im Detail untersucht. Sei $g(x)$ durch die f-Werte auf dieser Seite definiert:

$$g(x) = f(x, +\sqrt{1-x^2}) = x\sqrt{1-x^2}, \quad \text{mit} \quad x \in [-1,+1] \quad \text{und} \quad g'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Das Rezept der globalen Extrema zeigt für $g(x)$ mit $D = [-1,+1]$, das globale Minimum für g ist $g(-1/\sqrt{2}) = -1/2$ und das globale Maximum für g ist $g(+1/\sqrt{2}) = +1/2$. Analog kann gezeigt werden, die Extremwerte von $f(x,y)$ über die untere Seiten sind die gleichen,

$$-\tfrac{1}{2} = g(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, +\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = f(+\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

$$+\tfrac{1}{2} = g(+\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = f(+\tfrac{1}{\sqrt{2}}, +\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

Der interne Wert $f(0,0) = 0$ liegt zwischen den Extremwerten am Rand. Daher ist das globale Minimum von $f(x,y)$ über S gegeben durch $f(-1/\sqrt{2}, +1/\sqrt{2}) = -1/2$, und das globale Maximum von $f(x,y)$ über S ist $f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = +1/2$.

Das gleiche Argument zeigt, das globale Minimum von $f(x,y)$ über den Rand ∂S ist gegeben durch $f(-1/\sqrt{2}, +1/\sqrt{2}) = -1/2$, und das globale Maximum von $f(x,y)$ über ∂Q ist $f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = +1/2$.

Die globalen Extrema der gegebenen Funktion über die Ränder der obigen Mengen können – wie im nächsten Beispiel – auch mit Lagrangeschen Multiplikatoren gefunden werden.

2. Geometrische Projektion

   (a) Der Abstand $\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$ zwischen dem Punkt $(0,1)$ und einer beliebigen Punkt (x,y) in der Parabel

   $$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$$

   wird minimiert, wenn die Funktion

   $$f(x,y) = (x-0)^2 + (y-1)^2$$

   minimiert wird unter der Einschränkung

   $$g(x,y) = y - x^2 = 0.$$

   Die Lösung dieses eingeschränkten Minimierungsproblems entspricht einem kritischen Punkt der Lagrangeschen Funktion,

   $$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

wobei λ ein Lagrangescher Multiplikator für die Einschränkung $g(x,y)=0$ ist. Die Bedingungen eines kritischen Punkts sind

$$\begin{array}{llll} L_x(x,y,\lambda) & = f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) & = 2x + 2\lambda x & = 0 \\ L_y(x,y,\lambda) & = f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) & = 2(y-1) - \lambda & = 0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = -g(x,y) & = -y + x^2 & = 0 \end{array}$$

Eine Lösung der ersten Gleichung dieses Systems ist $x=0$, und es folgt $y=0$ aus der dritten Gleichung. Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda=-2$. Also ist die erste kritische Punkte von L gegeben durch

$$x=0, \quad y=0, \quad \lambda=-2$$

Die andere Lösung der ersten Gleichung des Systems ist $\lambda=-1$, und es folgt $y=1/2$ aus der zweiten Gleichung. Aus der dritten Gleichung folgen $x=1/\sqrt{2}$ oder $x=-1/\sqrt{2}$. Also ist der zweite und der dritte kritische Punkt von L gegeben durch

$$x=-1/\sqrt{2}, \quad y=1/2, \quad \lambda=-1 \quad \text{und} \quad x=+1/\sqrt{2}, \quad y=1/2, \quad \lambda=-1$$

Die Werte von $f(x,y)$ für diese drei kritischen Punkte sind

$$f(0,0)=1, \quad f(+\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{4} = f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{2})$$

Der minimale Wert in dieser Liste ist $\frac{3}{4}$. Daher ist $\sqrt{3/4}$ der Abstand zwischen dem Punkt $(0,1)$ und der Parabel $y=x^2$, und die Punkte auf der Parabel, die am nähesten zum Punkt $(0,1)$ liegen, sind $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$ und $(+\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$.

(b) Der Abstand zwischen dem Punkt $(2,0,0)$ und einer beliebigen Punkt (x,y,z) in der Ebene

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=1\}$$

wird minimiert, wenn die Funktion

$$f(x,y,z) = (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2$$

minimiert wird unter der Einschränkung

$$g(x,y,z) = x+y+z-1 = 0$$

Die Lösung dieses eingeschränkten Minimierungsproblems entspricht einem kritischen Punkt der Lagrangeschen Funktion,

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

wobei λ ein Lagrangescher Multiplikator für die Einschränkung $g(x,y,z)=0$ ist. Die Bedingungen eines kritischen Punkts sind

$$\begin{array}{llll} L_x(x,y,\lambda) & = f_x(x,y,z) - \lambda g_x(x,y,z) & = 2(x-2) - \lambda & = 0 \\ L_y(x,y,\lambda) & = f_y(x,y,z) - \lambda g_y(x,y,z) & = 2y - \lambda & = 0 \\ L_z(x,y,\lambda) & = f_z(x,y,z) - \lambda g_z(x,y,z) & = 2z - \lambda & = 0 \\ L_\lambda(x,y,z,\lambda) & = -g(x,y,z) & = -x-y-z+1 & = 0 \end{array}$$

Durch die ersten drei Gleichungen dieses Systems folgt

$$x-2 = y = z = \lambda/2$$

Durch die vierte Gleichung des Systems folgt

$$1 = x+y+z = (2+\lambda/2) + (\lambda/2) + (\lambda/2) \quad \text{oder} \quad \lambda = -2/3$$

Aus der vorletzten Gleichung folgen

$$x = 2 + \lambda/2 = 5/3, \quad y = \lambda/2 = -1/3, \quad z = \lambda/2 = -1/3$$

Also ist $(5/3, -1/3, -1/3)$ der Punkt in der Ebene $x + y + z = 1$, der am nähesten zum Punkt $(2, 0, 0)$ liegt, und der Abstand zwischen dem Punkt und der Ebene ist gegeben durch den Wert

$$\sqrt{f(5/3, -1/3, -1/3)} = \sqrt{1/3}$$

Für die obigen Abstände, d.h. die globalen Minima der obigen Zielfunktionen über die gegebenen Einschränkungsmengen, können – wie im ersten Beispiel – auch ohne Lagrangesche Multiplikatoren gefunden werden.

3. Lineare Regression

(a) Die partiellen Ableitungen der Funktion

$$E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} [(a_0 + a_1 x_i) - y_i]^2$$

nach a_0 und a_1 sind

$$E_{a_0}(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{a_0} [(a_0 + a_1 x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} 2[(a_0 + a_1 x_i) - y_i]$$

$$= 2a_0 n \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1\right] + 2a_1 n \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right] - 2n \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i\right] = 2n\,[a_0 + a_1 \overline{x} - \overline{y}]$$

und

$$E_{a_1}(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{a_1} [(a_0 + a_1 x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} 2[(a_0 + a_1 x_i) - y_i] x_i$$

$$= 2a_0 n \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right] + 2a_1 n \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] - 2n \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right] = 2n \left[a_0 \overline{x} + a_1 \overline{x^2} - \overline{xy}\right]$$

Die Lösung des lineare Gleichungssystems

$$\begin{cases} E_{a_0}(a_0, a_1)/(2n) = 0 \\ E_{a_1}(a_0, a_1)/(2n) = 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \text{I:} & a_0 + a_1 \overline{x} & = & \overline{y} \\ \text{II:} & a_0 \overline{x} + a_1 \overline{x^2} & = & \overline{xy} \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} 1 & \overline{x} \\ \overline{x} & \overline{x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \overline{xy} \end{bmatrix}$$

bekommt man durch die gewichtete Summe der Gleichungen II $- \overline{x} \cdot$ I oder

$$a_1(\overline{x^2} - \overline{x}^2) = \underbrace{(a_0 \overline{x} + a_1 \overline{x^2})}_{\text{II, links}} - \overline{x} \cdot \underbrace{(a_0 + a_1 \overline{x})}_{\text{I, links}} = \underbrace{\overline{xy}}_{\text{II, rechts}} - \overline{x} \cdot \underbrace{\overline{y}}_{\text{I, rechts}}$$

Die Lösung ist

$$a_1^* = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad \text{und durch II,} \quad a_0^* = \bar{y} - a_1^* \bar{x}$$

(b) Die partiellen Ableitung zweiter Ordnung der Funktion $E(a_0, a_1)$ sind

$$E_{a_0, a_0}(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{a_0}^2 [(a_0 + a_1 x) - y_i]^2 \overset{\text{K.R.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \partial_{a_0} 2[(a_0 + a_1 x) - y_i] = 2n > 0$$

$$E_{a_1,a_1}(a_0,a_1) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{a_1}^2 [(a_0+a_1x)-y_i]^2 \overset{\text{K.R.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \partial_{a_1} 2[(a_0+a_1x)-y_i]x_i = 2n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] = 2n\overline{x^2} > 0$$

und

$$E_{a_0,a_1}(a_0,a_1) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{a_0}\partial_{a_1} [(a_0+a_1x)-y_i]^2 \overset{\text{K.R.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \partial_{a_0} 2[(a_0+a_1x)-y_i]x_i = 2n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = 2n\overline{x}$$

(c) Wenn $\overline{(x-\bar{x})^2}$ explizit und ausführlich geschrieben wird, ergibt sich

$$\overline{(x-\bar{x})^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2]$$

$$= \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] - 2\overline{x}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] + \overline{x}^2\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right] = \overline{x^2} - 2\overline{x}\cdot\overline{x} + \overline{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Da die x-Werte verschieden sind, gilt

$$\overline{x^2} - \bar{x}^2 = \overline{(x-\bar{x})^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 > 0$$

Es folgt

$$E_{a_0,a_0}(a_0,a_1)E_{a_1,a_1}(a_0,a_1) - E_{a_0,a_1}(a_0,a_1)^2 = 4n^2(\overline{x^2} - \bar{x}^2) > 0$$

(d) Da die Bedingungen auf Seite 181 im Skriptum erfüllt sind, ist $E(a_0,a_1)$ global konvex, und (a_0^*, a_1^*) ist ein globales Minimum für $E(a_0,a_1)$.

4. Quadratische Regression

Die partiellen Ableitungen der Funktion

$$E(a_0,a_1,a_2) = \sum_{i=1}^{n}[(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2) - y_i]^2$$

nach a_0, a_1 und a_2 sind

$$E_{a_0}(a_0,a_1,a_2) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{a_0}[(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} 2[(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2) - y_i]$$

$$= 2a_0n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right] + 2a_1n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] + 2a_2n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] - 2n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right]$$

$$= 2n[a_0 + a_1\overline{x} + a_2\overline{x^2} - \overline{y}]$$

$$E_{a_1}(a_0,a_1,a_2) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{a_1}[(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} 2[(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2) - y_i]x_i$$

$$= 2a_0n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] + 2a_1n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] + 2a_2n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right] - 2n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right]$$

$$= 2n[a_0\overline{x} + a_1\overline{x^2} + a_2\overline{x^3} - \overline{xy}]$$

und

$$E_{a_1}(a_0,a_1,a_2) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{a_1}[(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} 2[(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2) - y_i]x_i^2$$

$$= 2a_0 n \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] + 2a_1 n \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right] + 2a_2 n \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right] - 2n \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i\right]$$
$$= 2n[a_0\overline{x^2} + a_1\overline{x^3} + a_2\overline{x^4} - \overline{x^2 y}]$$

Daher ist $(a_0^*, a_1^*, a_2^*) \in \mathbb{R}^3$ kritisch für E, wenn

$$\begin{aligned} a_0 + a_1\overline{x} + a_2\overline{x^2} &= \overline{y} \\ a_0\overline{x} + a_1\overline{x^2} + a_2\overline{x^3} &= \overline{xy} \\ a_0\overline{x^2} + a_1\overline{x^3} + a_2\overline{x^4} &= \overline{x^2 y} \end{aligned}$$

Dieses System entspricht $M^\top M\boldsymbol{a} = M^\top \boldsymbol{b}$ (mit $m = 2$) im nächsten Beispiel.

5. Polynomiale Regression

   Für weitere Details sehen Sie das nächste Kapitel und den Anhang.

   (a) In der Zielfunktion

$$E(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m) = \sum_{i=1}^{n} [(a_0 + a_1 x_i + \cdots a_{m-1} x_i^{m-1} + a_m x_i^m) - y_i]^2$$

   lässt sich der $i$te Term bezüglich eines Skalarprodukts darstellen,

$$(a_0 + a_1 x_i + \cdots a_{m-1} x_i^{m-1} + a_m x_i^m) - y_i$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ x_i \\ \vdots \\ x_i^{m-1} \\ x_i^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_m \end{bmatrix} - y_i = \begin{bmatrix} 1 & x_i & \cdots & x_i^{m-1} & x_i^m \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_m \end{bmatrix} - y_i$$

   und der Vektor dieser Terme lässt sich bezüglich aller solchen Skalarprodukte darstellen,

$$\begin{bmatrix} (a_0 + a_1 x_1 + \cdots a_{m-1} x_1^{m-1} + a_m x_1^m) - y_1 \\ (a_0 + a_1 x_2 + \cdots a_{m-1} x_2^{m-1} + a_m x_2^m) - y_2 \\ \vdots \\ (a_0 + a_1 x_{n-1} + \cdots a_{m-1} x_{n-1}^{m-1} + a_m x_{n-1}^m) - y_{n-1} \\ (a_0 + a_1 x_n + \cdots a_{m-1} x_n^{m-1} + a_m x_n^m) - y_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{m-1} & x_1^m \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{m-1} & x_2^m \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{m-1} & x_{n-1}^m \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{m-1} & x_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = M\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$$

   Die Zielfunktion E ist die Summe der Quadrate dieser Terme, d.h. die quadrierte Norm des obigen Vektors,

$$E(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m) = \sum_{i=1}^{n} [(a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \cdots + a_1 x_i + a_0) - y_i]^2$$
$$= \left\| \begin{bmatrix} (a_0 + a_1 x_1 + \cdots a_{m-1} x_1^{m-1} + a_m x_1^m) - y_1 \\ (a_0 + a_1 x_2 + \cdots a_{m-1} x_2^{m-1} + a_m x_2^m) - y_2 \\ \vdots \\ (a_0 + a_1 x_{n-1} + \cdots a_{m-1} x_{n-1}^{m-1} + a_m x_{n-1}^m) - y_{n-1} \\ (a_0 + a_1 x_n + \cdots a_{m-1} x_n^{m-1} + a_m x_n^m) - y_n \end{bmatrix} \right\|^2 = \|M\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2$$

(b) Wie im Anhang gezeigt, lässt sich die Zielfunktion so umschreiben,

$$E(\boldsymbol{a}) = \|M\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 = \boldsymbol{a}^\top M^\top M\boldsymbol{a} - 2(M^\top \boldsymbol{b})^\top \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{b}$$

Wie im Anhang gezeigt, ist der Vektor der partiellen Ableitungen erster Ordnung des ersten Terms gegeben durch

$$\{\partial_{a_k} \boldsymbol{a}^\top M^\top M\boldsymbol{a}\}_{k=0}^m = 2M^\top M\boldsymbol{a}$$

Wie im Anhang gezeigt, ist der Vektor der partiellen Ableitungen erster Ordnung des zweiten Terms gegeben durch

$$\{\partial_{a_k} 2(M^\top \boldsymbol{b})^\top \boldsymbol{a}\}_{k=0}^m = 2M^\top \boldsymbol{b}$$

Wie im Anhang gezeigt, ist der Vektor der partiellen Ableitungen erster Ordnung des dritten Terms gegeben durch

$$\{\partial_{a_k} \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{b}\}_{k=0}^m = \boldsymbol{0}$$

Zusammengefasst ist der Vektor der partiellen Ableitungen erster Ordnung $\{\partial_{a_k} E(\boldsymbol{a})\}_{k=0}^m$ gegeben durch:

$$\{\partial_{a_k} E(\boldsymbol{a})\}_{k=0}^m = 2(M^\top M\boldsymbol{a} - M^\top \boldsymbol{b})$$

(c) Das letzte Ergebnis ist für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung noch abzuleiten. Wie im Anhang gezeigt, ist die Matrix der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des ersten Terms gegeben durch

$$\{\partial_{a_l} \partial_{a_k} 2M^\top M\boldsymbol{a}\}_{k,l=0}^m = 2M^\top M$$

Wie im Anhang gezeigt, ist die Matrix der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des zweiten Terms gegeben durch

$$\{\partial_{a_l} \partial_{a_k} 2M^\top \boldsymbol{b}\}_{k,l=0}^m = 0$$

Zusammengefasst ist die Matrix der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\{\partial_{a_l} \partial_{a_k} E(\boldsymbol{a})\}_{k,l=0}^m$ gegeben durch:

$$\{\partial_{a_l} \partial_{a_k} E(\boldsymbol{a})\}_{k,l=0}^m = 2M^\top M$$

14 Rechnungen mit Matrizen und Vektoren

14.1 Beispiele

1. Gaußsche Elimination und Rückwärtssubstitution

   (a) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 4 \\ x & + & 2y & = & 5 \end{array}$$

   lässt sich bezüglich der Matrix A und der Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{b}$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

   mit $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ umschreiben. Bestimmen Sie die Lösung $\boldsymbol{x}$ des Systems durch Gaußsche Elimination und Rückwärtssubstitution.

   (b) Mit

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

   ist das System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für die folgenden Vektoren zu lösen,

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   Bestimmen Sie ob die jeweiligen Systeme lösbar sind. Wenn ja, bestimmen Sie eine Lösung. Wenn nein, bestimmen Sie einen Vektor $\boldsymbol{x}$, der durch die Lösung vom System $A^\top A\boldsymbol{x} = A^\top \boldsymbol{b}$ die Zielfunktion $\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$ minimiert. (vgl. Seite 208 im Skriptum)

   (c) Das System $M^\top M\boldsymbol{a} = M^\top \boldsymbol{b}$ auf Seite 216 im Skriptum soll gelöst werden. Für die 3×4 Matrix $[M^\top M | M^\top \boldsymbol{b}]$ führen Sie Gaußsche Elimination und Rückwärtssubstitution durch, um die im Skriptum angegebene Lösung $\boldsymbol{a} = [\ 0.99 \quad -1.04 \quad 1.0\ ]^\top$ zu bestätigen.

   (d) Das System $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ auf Seite 219 im Skriptum soll gelöst werden. Für die 3×4 Matrix $[M|\boldsymbol{b}]$ führen Sie Gaußsche Elimination und Rückwärtssubstitution durch, um die im Skriptum angegebene Lösung $\boldsymbol{a} = [\ 0 \quad 1 \quad 1\ ]^\top$ zu bestätigen.

   (e) Das System $M^\top M\boldsymbol{a} = M^\top \boldsymbol{b}$ auf Seite 221 im Skriptum soll gelöst werden. Für die 3×4 Matrix $[M^\top M | M^\top \boldsymbol{b}]$ führen Sie Gaußsche Elimination und Rückwärtssubstitution durch, um die im Skriptum angegebene Lösung $\boldsymbol{a} = [\ 1.9846 \quad 0.8876 \quad 0.9130\ ]^\top$ zu bestätigen.

2. Cramersche Regel

   (a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 4 \\ x & + & 2y & = & 5 \end{array}$$

   mit der Cramerschen Regel.

   (b) Das System $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ auf Seite 219 im Skriptum soll gelöst werden. Verwenden Sie die Cramersche Regel, um die im Skriptum angegebene Lösung $\boldsymbol{a} = [\ 0 \quad 1 \quad 1\ ]^\top$ zu bestätigen.

3. Inverse

(a) Sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 4 \\ x & + & 2y & = & 5 \end{array}$$

oder $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie die Inverse A^{-1} und zeigen Sie, das lineare Gleichungssystem wird mit $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ gelöst.

(b) Das System $M^\top M\boldsymbol{a} = M^\top \boldsymbol{b}$ auf Seite 216 im Skriptum soll gelöst werden. Für die 3×6 Matrix $[M^\top M|I]$ führen Sie Gaußsche Elimination durch, um die Inverse $(M^\top M)^{-1}$ zu berechnen. Zeigen Sie, die im Skriptum angegebene Lösung ist gegeben durch $\boldsymbol{a} = (M^\top M)^{-1}(M^\top \boldsymbol{b})$.

(c) Das System $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ auf Seite 219 im Skriptum soll gelöst werden. Für die 3×6 Matrix $[M|I]$ führen Sie Gaußsche Elimination durch, um die Inverse M^{-1} zu berechnen. Zeigen Sie, die im Skriptum angegebene Lösung ist gegeben durch $\boldsymbol{a} = M^{-1}\boldsymbol{b}$.

(d) Das System $M^\top M\boldsymbol{a} = M^\top \boldsymbol{b}$ auf Seite 221 im Skriptum soll gelöst werden. Für die 3×6 Matrix $[M^\top M|I]$ führen Sie Gaußsche Elimination durch, um die Inverse $(M^T M)^{-1}$ zu berechnen. Zeigen Sie, die im Skriptum angegebene Lösung ist gegeben durch $\boldsymbol{a} = (M^\top M)^{-1}(M^{-1}\boldsymbol{b})$.

4. Lineare Abhängigkeit

Bestimmen Sie für die 3 Fälle, ob die angegebenen Vektoren linear abhängig oder unabhängig sind:

(a) $\boldsymbol{m}_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{m}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{m}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{m}_2 = \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{m}_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{m}_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{m}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}$

5. Eigenraumzerlegung

(a) Die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} +3 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}$$

seien gegeben. Bestimmen Sie die die Eigenwerte und die entsprechenden Eigenvektoren der Matrix A. Zeigen Sie, es gilt $A = V\Lambda V^{-1}$. Zeigen Sie, die Matrix A ist symmetrisch und positiv definit (SPD).

(b) Die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} +1 & +3 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}$$

seien gegeben. Bestimmen Sie die die Eigenwerte und die entsprechenden Eigenvektoren der Matrix A. Zeigen Sie, es gilt $A = V\Lambda V^{-1}$. Zeigen Sie, die Matrix A ist symmetrisch und positiv definit (SPD).

6. Anwendungen der Eigenraumzerlegung

   (a) Zeigen Sie, es gilt $(I-A)^k \boldsymbol{x} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, für die Matrix

$$I - A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -15 & -32 \\ +12 & +25 \end{bmatrix}.$$

   Folglich konvergieren die Iterierten

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{b} + (I-A)\boldsymbol{x}_{k-1}$$

   zur Lösung $\boldsymbol{x}^\star$ des Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für ein beliebiges $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$, weil es gilt

$$\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}^\star = (I-A)(\boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{x}^\star) = \cdots = (I-A)^k(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^\star) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0}.$$

   (b) Seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$$

   und

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + 10\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = A\tilde{\boldsymbol{x}}.$$

   Zeigen Sie, die Fehlerabschätzung

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \le \kappa(A)\frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

   gilt mit Gleichheit.

   (c) Kompromieren Sie die Daten

$$X = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

   d.h. $(x_1, y_1) = (0, \frac{1}{4})$, $\quad (x_2, y_2) = (\frac{1}{4}, 0)$, $\quad (x_3, y_3) = (\frac{3}{4}, 1)$, $\quad (x_2, y_2) = (1, \frac{3}{4})$

   auf eine Gerade durch Hauptkomponentenanalyse.

7. Charakterisierung von lokalen Extremen

   (a) Zeigen Sie, die Bedingungen auf Seite 172 im Skriptum für ein lokales Minimum sind äquivalent zu den Bedingungen, dass $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ gilt und $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ ist SPD.

   (b) Zeigen Sie, die Bedingungen auf Seite 172 im Skriptum für ein lokales Maximum sind äquivalent zu den Bedingungen, dass $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ gilt und $-\nabla^2 f(x_0, y_0)$ ist SPD.

14.2 Lösungen

1. Gaußsche Elimination und Rückwärtssubstitution

   (a) Mit
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$
   wird das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ folgendermaßen durch Gaußsche Elimination
$$\begin{array}{r} \mathrm{I}: \\ \mathrm{II}: \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$
$$\begin{array}{r} \mathrm{I}: \\ \mathrm{II} - \frac{1}{2}\mathrm{I} \to \tilde{\mathrm{II}}: \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{array}\right]$$
   und Rückwärtssubstitution
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{r} \Rightarrow x = (4 - 1 \cdot y)/2 = 1 \\ \Rightarrow y = 3/\frac{3}{2} = 2 \quad \uparrow \end{array}$$
   mit dem Vektor
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
   gelöst.

   (b) Das System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit
$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   ist zu lösen. Man merkt zuerst, es gilt $\det(A) = 0$, und daher ist ein System mit dieser Matrix im Allgemeinen nicht lösbar. Trotzdem sind die Schritte der Gaußchen Elimination:
$$[A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array}$$
$$\begin{array}{r} \mathrm{I}: \\ \mathrm{II} - \frac{3}{6}\mathrm{I} \to \tilde{\mathrm{II}}: \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} x = (2 - 4\lambda)/6 \\ y = \lambda \text{ beliebig} \end{array}$$
   Daher ist jeder Vektor der Form
$$\begin{bmatrix} (2 - 4\lambda)/6 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
   eine Lösung des Systems, d.h. mit
$$\boldsymbol{x}^\star = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_\lambda = \boldsymbol{x}^\star + \lambda\hat{\boldsymbol{x}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
   gilt
$$A\boldsymbol{x}_\lambda = A\boldsymbol{x}^\star + \lambda A\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}.$$
   Das System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit
$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ist zu lösen. Man merkt zuerst, es gilt $\det(A) = 0$, und daher ist ein System mit dieser Matrix im Allgemeinen nicht lösbar. Die Schritte der Gaußchen Elimination sind:

$$[A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \mathrm{I}: \\ \mathrm{II} - \frac{3}{6}\mathrm{I} \to \tilde{\mathrm{II}}: \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right] \qquad 0x + 0y = \tfrac{3}{2} \ ?$$

Da die Gleichung $0x + 0y = \frac{3}{2}$ nicht gelten kann, gibt es keine Lösung.

Der Kern von $A^\top$ lässt sich so bestimmen,

$$\mathbf{0} = A^\top \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x + 3y \\ 4x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} (2x + y) \quad \Rightarrow \quad y = -2x$$

oder

$$\boldsymbol{x} = \lambda \check{\boldsymbol{x}}, \quad \check{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

d.h. der Kern von $A^\top$ besteht aus Vielfachen vom Vektor $\check{\boldsymbol{x}}$. Ein System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist lösbar, nur wenn $\check{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{b} = 0$ gilt. Für den ersten Fall $\boldsymbol{b} = [2, 1]^\top$ gilt $\check{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{b} = 0$ und das System ist lösbar. Für den zweiten Fall $\boldsymbol{b} = [1, 2]^\top$ gilt $\check{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{b} = -3 \neq 0$ und das System ist nicht lösbar.

Für den zweiten Fall $\boldsymbol{b} = [1, 2]^\top$ soll ein Vektor $\boldsymbol{x}$ bestimmt werden, der durch die Lösung vom System $A^\top A\boldsymbol{x} = A^\top \boldsymbol{b}$ die Zielfunktion $\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$ minimiert. Für das System

$$A^\top A\boldsymbol{b} = A^\top \boldsymbol{b}, \quad A^\top A = \begin{bmatrix} 45 & 30 \\ 30 & 20 \end{bmatrix}, \quad A^\top \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

sind die Schritte der Gaußchen Elimination,

$$[A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 45 & 30 & 12 \\ 30 & 20 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \mathrm{I}: \\ \mathrm{II} - \frac{30}{45}\mathrm{I} \to \tilde{\mathrm{II}}: \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 45 & 30 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} x = (12 - 30\lambda)/45 \\ y = \lambda \text{ beliebig} \end{array}$$

Daher ist jeder Vektor der Form

$$\begin{bmatrix} (12 - 30\lambda)/45 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/15 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

eine Lösung des Systems, d.h. mit

$$\boldsymbol{x}^\star = \begin{bmatrix} \frac{4}{15} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_\lambda = \boldsymbol{x}^\star + \lambda \hat{\boldsymbol{x}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

gilt

$$A\boldsymbol{x}_\lambda = A\boldsymbol{x}^\star + \lambda A\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} + \mathbf{0} = \boldsymbol{b}.$$

Die Zielfunktion $\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$ wird in jedem $\boldsymbol{x}_\lambda$ minimiert, aber für den Wert $\lambda = 8/65$ wird $\|\boldsymbol{x}_\lambda\|^2$ gleichzeitig minimiert.

(c) Die Schritte der Gaußchen Elimination sind:

$$[M^\top M|M^\top \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 4.0000 & -1.0000 & 1.5000 & 6.5000 \\ -1.0000 & 1.5000 & -1.0000 & -3.5500 \\ 1.5000 & -1.0000 & 1.1250 & 3.6500 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \text{II} - (-1/4) \times \text{I} \to \text{II} \\ \text{III} - (1.5/4) \times \text{I} \to \text{III} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 4.0000 & -1.0000 & 1.5000 & 6.5000 \\ 0 & 1.2500 & -0.6250 & -1.9250 \\ 0 & -0.6250 & 0.5625 & 1.2125 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{III} - (-0.625/1.25) \times \text{II} \to \text{III} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 4.0000 & -1.0000 & 1.5000 & 6.5000 \\ 0 & 1.2500 & -0.6250 & -1.9250 \\ 0 & 0 & 0.2500 & 0.2500 \end{array}\right]$$

Die Schritte der Rückwärtssubstitution sind

$$\begin{aligned} a_2 &= 0.2500/0.2500 = 1 \\ a_1 &= [-1.9250 - (-0.6250a_2)]/1.2500 = -1.04 \\ a_0 &= [6.5000 - (-1.0000a_1) - (1.5000a_2)]/4.0000 = 0.99 \end{aligned}$$

(d) Die Schritte der Gaußchen Elimination sind:

$$[M|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1.0000 & 1.0000 & -0.5000 & 0.5000 \\ 1.0000 & 2.0000 & -1.3333 & 0.6667 \\ 1.0000 & 3.0000 & -2.2500 & 0.7500 \end{array}\right] \begin{array}{r} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \text{II} - \text{I} \to \text{II} \\ \text{III} - \text{I} \to \text{III} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1.0000 & 1.0000 & -0.5000 & 0.5000 \\ 0 & 1.0000 & -0.8333 & 0.1667 \\ 0 & 2.0000 & -1.7500 & 0.2500 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{III} - 2 \times \text{II} \to \text{III} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1.0000 & 1.0000 & -0.5000 & 0.5000 \\ 0 & 1.0000 & -0.8333 & 0.1667 \\ 0 & 0 & -0.0833 & -0.0833 \end{array}\right]$$

Die Schritte der Rückwärtssubstitution sind

$$\begin{aligned} a_3 &= (-0.0833)/(-0.0833) = 1 \\ a_2 &= [0.1667 - (-0.8333a_3)]/1.0000 = 1 \\ a_1 &= [0.5000 - (1.0000a_2) - (-0.5000a_3)]/1.0000 = 0 \end{aligned}$$

(e) Die Schritte der Gaußchen Elimination sind:

$$[M^\top M|M^\top \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 4.0000 & 6.0000 & -7.8900 & 6.0600 \\ 6.0000 & 14.0000 & -18.0100 & 7.8900 \\ -7.8900 & -18.0100 & 23.2409 & -10.4241 \end{array}\right] \begin{array}{r} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \text{II} - (6/4) \times \text{I} \to \text{II} \\ \text{III} - (-7.89/4/4) \times \text{I} \to \text{III} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 4.0000 & 6.0000 & -7.8900 & 6.0600 \\ 0 & 5.0000 & -6.1750 & -1.2000 \\ 0 & -6.1750 & 7.6779 & 1.5293 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{III} - (-6.175/5) \times \text{II} \to \text{III} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 4.0000 & 6.0000 & -7.8900 & 6.0600 \\ 0 & 5.0000 & -6.1750 & -1.2000 \\ 0 & 0 & 0.0518 & 0.0473 \end{array}\right]$$

Die Schritte der Rückwärtssubstitution sind

$$\begin{aligned} a_3 &= 0.0473/0.0518 = 0.91304 \\ a_2 &= [-1.2000 - (-6.1750a_3)]/5.0000 = 0.88761 \\ a_1 &= [6.0600 - (6.0000a_2) - (-7.8900a_3)]/4.0000 = 1.98457 \end{aligned}$$

2. Cramersche Regel

(a) Durch die Cramersche Regel ist die Lösung des Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ gegeben durch

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{4 \cdot 2 - 1 \cdot 5}{2 \cdot 2 - 1 \cdot 1} = \frac{3}{3} = 1, \quad y = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{2 \cdot 5 - 1 \cdot 4}{2 \cdot 2 - 1 \cdot 1} = \frac{6}{3} = 2$$

(b) Seien $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$ und $\boldsymbol{m}_3$ die Spalten der Matrix M,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 2 & -4/3 \\ 1 & 3 & -9/4 \end{bmatrix}$$

Dann gelten

$$\begin{aligned} \det(M) &= (+1)\det \begin{bmatrix} 2 & -\frac{4}{3} \\ 3 & -\frac{9}{4} \end{bmatrix} - (+1)\det \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{9}{4} \end{bmatrix} + (-\tfrac{1}{2})\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot (2 \cdot (-\tfrac{9}{4}) - 3 \cdot (-\tfrac{4}{3})) - 1 \cdot (1 \cdot (-\tfrac{9}{4}) - 1 \cdot (-\tfrac{4}{3})) - \tfrac{1}{2} \cdot (3 - 2) \\ &= (-\tfrac{9}{2} + 4) - (-\tfrac{9}{4} + \tfrac{4}{3}) - \tfrac{1}{2} \\ &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{11}{12} - \tfrac{1}{2} = -1/12 \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \det([\ \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{m}_2 \quad \boldsymbol{m}_3\ ]) &= 0 \\ \det([\ \boldsymbol{m}_1 \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{m}_3\ ]) &= -\tfrac{1}{12} \\ \det([\ \boldsymbol{m}_1 \quad \boldsymbol{m}_2 \quad \boldsymbol{b}\ ]) &= -\tfrac{1}{12} \end{aligned}$$

Daher ist die Lösung $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^\top$ des Systems $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ durch

$$a_1 = \frac{\det([\ \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{m}_2 \quad \boldsymbol{m}_3\ ])}{\det(M)} = 0$$

$$a_2 = \frac{\det([\ \boldsymbol{m}_1 \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{m}_3\ ])}{\det(M)} = 1$$

$$a_3 = \frac{\det([\ \boldsymbol{m}_1 \quad \boldsymbol{m}_2 \quad \boldsymbol{b}\ ])}{\det(M)} = 1$$

gegeben.

3. Inverse

(a) Die Inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

lässt sich durch die folgenden Eliminationsschritte bestimmen

$$\begin{array}{r} \mathrm{I}: \\ \mathrm{II}: \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \mathrm{I}: \\ \mathrm{II} - \frac{1}{2}\mathrm{I} \to \tilde{\mathrm{II}}: \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \mathrm{I}: \\ \frac{2}{3}\tilde{\mathrm{II}} \to \hat{\mathrm{II}}: \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \mathrm{I} - \hat{\mathrm{II}} \to \tilde{\mathrm{I}}: \\ \hat{\mathrm{II}}: \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{I}} \to \hat{\mathrm{I}}: \\ \hat{\mathrm{II}}: \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Die Lösung des Systems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist gegeben durch

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(b) Für die Matrix

$$M^\top M = \begin{bmatrix} 4.0000 & -1.0000 & 1.5000 \\ -1.0000 & 1.5000 & -1.0000 \\ 1.5000 & -1.0000 & 1.1250 \end{bmatrix}$$

sind die Schritte der Gaußschen Elimination gegeben durch

$$[M^\top M|I] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 4.0000 & -1.0000 & 1.5000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ -1.0000 & 1.5000 & -1.0000 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 1.5000 & -1.0000 & 1.1250 & 0 & 0 & 1.0000 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - (-1/4) \times \mathrm{I} \to \mathrm{II} \\ \mathrm{III} - (1.5/4) \times \mathrm{I} \to \mathrm{III} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 4.0000 & -1.0000 & 1.5000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ -1.0000 & 1.5000 & -1.0000 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 1.5000 & -1.0000 & 1.1250 & 0 & 0 & 1.0000 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} - (-6.25/1.25) \times \mathrm{II} \to \mathrm{III} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 4.0000 & -1.0000 & 1.5000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2500 & -0.6250 & 0.2500 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2500 & -0.2500 & 0.5000 & 1.0000 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} - (1.5/0.25) \times \mathrm{III} \to \mathrm{I} \\ \mathrm{II} - (-6.25/0.25) \times \mathrm{III} \to \mathrm{II} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 4.0000 & -1.0000 & 0 & 2.5000 & -3.0000 & -6.0000 \\ 0 & 1.2500 & 0 & -0.3750 & 2.2500 & 2.5000 \\ 0 & 0 & 0.2500 & -0.2500 & 0.5000 & 1.0000 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} - (-1.0/1.25) \times \mathrm{II} \to \mathrm{I} \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 4.0000 & 0 & 0 & 2.2000 & -1.2000 & -4.0000 \\ 0 & 1.2500 & 0 & -0.3750 & 2.2500 & 2.5000 \\ 0 & 0 & 0.2500 & -0.2500 & 0.5000 & 1.0000 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}/4 \to \mathrm{I} \\ \mathrm{II}/1.25 \to \mathrm{II} \\ \mathrm{III}/0.25 \to \mathrm{III} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1.0000 & 0 & 0 & 0.5500 & -0.3000 & -1.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & -0.3000 & 1.8000 & 2.0000 \\ 0 & 0 & 1.0000 & -1.0000 & 2.0000 & 4.0000 \end{array}\right]$$

Also gilt

$$(M^\top M)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5500 & -0.3000 & -1.0000 \\ -0.3000 & 1.8000 & 2.0000 \\ -1.0000 & 2.0000 & 4.0000 \end{bmatrix}$$

und für das System $M^\top M\boldsymbol{a} = M^\top\boldsymbol{b}$ mit $M^\top\boldsymbol{b} = [\ 6.50 \quad -3.55 \quad 3.65\ ]^\top$ gilt

$$\boldsymbol{a} = (M^\top M)^{-1}(M^\top\boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} 0.5500 & -0.3000 & -1.0000 \\ -0.3000 & 1.8000 & 2.0000 \\ -1.0000 & 2.0000 & 4.0000 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6.50 \\ -3.55 \\ 3.65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.99 \\ -1.04 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

(c) Für die Matrix

$$M = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & -0.5000 \\ 1.0000 & 2.0000 & -1.3333 \\ 1.0000 & 3.0000 & -2.2500 \end{bmatrix}$$

sind die Schritte der Gaußschen Elimination gegeben durch

$$[M|I] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1.0000 & 1.0000 & -0.5000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 1.0000 & 2.0000 & -1.3333 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 1.0000 & 3.0000 & -2.2500 & 0 & 0 & 1.0000 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \text{II} - \text{I} \to \text{II} \\ \text{III} - \text{I} \to \text{III} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1.0000 & 1.0000 & -0.5000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & -0.8333 & -1.0000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 2.0000 & -1.7500 & -1.0000 & 0 & 1.0000 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{III} - (1/2) \times \text{II} \to \text{III} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1.0000 & 1.0000 & -0.5000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & -0.8333 & -1.0000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0833 & 1.0000 & -2.0000 & 1.0000 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I} - (-0.5/-0.833) \times \text{III} \to \text{I} \\ \text{II} - (-0.8333/-0.833)\text{III} \to \text{II} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1.0000 & 1.0000 & 0 & -5.0000 & 12.0000 & -6.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & -11.0000 & 21.0000 & -10.0000 \\ 0 & 0 & -0.0833 & 1.0000 & -2.0000 & 1.0000 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I} - \text{II} \to \text{I} \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1.0000 & 0 & 0 & 6.0000 & -9.0000 & 4.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & -11.0000 & 21.0000 & -10.0000 \\ 0 & 0 & -0.0833 & 1.0000 & -2.0000 & 1.0000 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{III}/-0833 \to \text{III} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1.0000 & 0 & 0 & 6.0000 & -9.0000 & 4.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & -11.0000 & 21.0000 & -10.0000 \\ 0 & 0 & 1.0000 & -12.0000 & 24.0000 & -12.0000 \end{array}\right]$$

Also gilt

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 6.0000 & -9.0000 & 4.0000 \\ -11.0000 & 21.0000 & -10.0000 \\ -12.0000 & 24.0000 & -12.0000 \end{bmatrix}$$

und für das System $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{b} = [\ 1/2 \quad 2/3 \quad 3/4\ ]^\top$ gilt

$$\boldsymbol{a} = M^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6.0000 & -9.0000 & 4.0000 \\ -11.0000 & 21.0000 & -10.0000 \\ -12.0000 & 24.0000 & -12.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 0.6667 \\ 0.7500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

(d) Für die Matrix

$$M^\top M = \begin{bmatrix} 4.0000 & 6.0000 & -7.8900 \\ 6.0000 & 14.0000 & -18.0100 \\ -7.8900 & -18.0100 & 23.2409 \end{bmatrix}$$

sind die Schritte der Gaußschen Elimination gegeben durch

$$[M^\top M|I] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 4.0000 & 6.0000 & -7.8900 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 6.0000 & 14.0000 & -18.0100 & 0 & 1.0000 & 0 \\ -7.8900 & -18.0100 & 23.2409 & 0 & 0 & 1.0000 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \text{II} - (6/4) \times \text{I} \to \text{II} \\ \text{III} - (-7.89/4) \times \text{I} \to \text{III} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 4.0000 & 6.0000 & -7.8900 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0000 & -6.1750 & -1.5000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & -6.1750 & 7.6779 & 1.9725 & 0 & 1.0000 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{III} - (-6.175/5) \times \text{I} \to \text{III} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 4.0000 & 6.0000 & -7.8900 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0000 & -6.1750 & -1.5000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0518 & 0.1200 & 1.2350 & 1.0000 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I} - (7.89/0.0518) \times \text{III} \to \text{I} \\ \text{II} - (-6.175/0.0518) \times \text{III} \to \text{II} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 4.0000 & 6.0000 & 0.0000 & 19.2957 & 188.2928 & 152.4638 \\ 0 & 5.0000 & 0 & 12.8188 & 148.3647 & 119.3237 \\ 0 & 0 & 0.0518 & 0.1200 & 1.2350 & 1.0000 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I} - (6/5) \times \text{II} \to \text{I} \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 4.0000 & 0 & 0.0000 & 3.9130 & 10.2551 & 9.2754 \\ 0 & 5.0000 & 0 & 12.8188 & 148.3647 & 119.3237 \\ 0 & 0 & 0.0518 & 0.1200 & 1.2350 & 1.0000 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \text{I}/4 \to \text{I} \\ \text{II}/5 \to \text{II} \\ \text{III}/0.0518 \to \text{III} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1.0000 & 0 & 0.0000 & 0.9783 & 2.5638 & 2.3188 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 2.5638 & 29.6729 & 23.8647 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 2.3188 & 23.8647 & 19.3237 \end{array}\right]$$

Also gilt

$$(M^\top M)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.9783 & 2.5638 & 2.3188 \\ 2.5638 & 29.6729 & 23.8647 \\ 2.3188 & 23.8647 & 19.3237 \end{bmatrix}$$

und für das System $M^\top M\boldsymbol{a} = M^\top \boldsymbol{b}$ mit $M^\top \boldsymbol{b} = [\ 6.06 \quad 7.89 \quad -10.4241\ ]^\top$ gilt

$$\boldsymbol{a} = (M^\top M)^{-1}(M^\top \boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} 0.9783 & 2.5638 & 2.3188 \\ 2.5638 & 29.6729 & 23.8647 \\ 2.3188 & 23.8647 & 19.3237 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.06 \\ 7.89 \\ -10.4241 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9846 \\ 0.8876 \\ 0.9130 \end{bmatrix}$$

4. Lineare Abhängigkeit

   (a) Gegeben sind die Vektoren,

$$\boldsymbol{m}_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{m}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

   Mit $\boldsymbol{x} = [\ 0 \quad +1 \quad +1\ ]^\top$ und $M = [\ \boldsymbol{m}_1 \quad \boldsymbol{m}_2 \quad \boldsymbol{m}_2\ ]$ gilt

$$M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \text{oder} \quad 0 \cdot \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 + \boldsymbol{m}_3 = \boldsymbol{0}.$$

   Daher sind die Vektoren linear abhängig.

   (b) Gegeben sind die Vektoren,

$$\boldsymbol{m}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{m}_2 = \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{m}_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Mit $M = [\ \boldsymbol{m}_1 \quad \boldsymbol{m}_2 \quad \boldsymbol{m}_3\ ]$ folgt aus $\det(M) = 2$, dass M^{-1} existiert. Dann

$$M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = M^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$

   Daher sind die Vektoren linear unabhängig.

   (c) Gegeben sind die Vektoren

$$\boldsymbol{m}_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{m}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}$$

   Mit $M = [\ \boldsymbol{m}_1 \quad \boldsymbol{m}_2 \quad \boldsymbol{m}_3\ ]$, gilt

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

   und $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = M^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$. Daher sind die Vektoren linear unabhängig.

5. Eigenraumzerlegung

(a) Mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}$$

bestätigt man durch eine direkte Rechnung, es gilt $AV = V\Lambda$. Da $\det(V) = +2 \neq 0$, ist V invertierbar, und es folgt $A = AVV^{-1} = V\Lambda V^{-1}$. Die Eigenwerte und die entsprechenden Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 3, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 1, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

der Matrix A werden folgendermaßen bestimmt. Die Nullstellen des Polynoms

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)^2 - 1$$

sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$. Ein Eigenvektor für λ_1 ist eine nicht triviale Lösung des Systems

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{oder mit } \lambda_1 = 3, \quad \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{oder z.B.} \quad x = y = 1$$

Ein Eigenvektor für λ_2 ist eine nicht triviale Lösung des Systems

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{oder mit } \lambda_2 = 1, \quad \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{oder z.B.} \quad x = -1 = -y$$

Eine Charakterisierung einer SPD-Matrix ist, dass sie symmetrisch ist mit positiven Eigenwerten. Die Matrix A erfüllt $A^\top = A$, und sie ist daher symmetrisch. Da die Eigenwerte $\lambda_1 = 3 > 0$, $\lambda_1 = 1 > 0$, positiv sind, ist A SPD.

(b) Mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} +1 & +3 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}$$

bestätigt man durch eine direkte Rechnung, es gilt $AV = V\Lambda$. Da $\det(V) = -2 \neq 0$, ist V invertierbar, und es folgt $A = AVV^{-1} = V\Lambda V^{-1}$. Die Eigenwerte und die entsprechenden Eigenvektoren

$$\lambda_1 = +1, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -1, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} +3 \\ +1 \end{bmatrix}$$

der Matrix A werden folgendermaßen bestimmt. Die Nullstellen des Polynoms

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= -(2-\lambda)(2+\lambda) + 3 = \lambda^2 - 1$$

sind $\lambda_1 = +1$ und $\lambda_2 = -1$. Ein Eigenvektor für λ_1 ist eine nicht triviale Lösung des Systems

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{oder mit } \lambda_1 = +1, \quad \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ +3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{oder z.B.} \quad x = y = 1.$$

Ein Eigenvektor für λ_2 ist eine nicht triviale Lösung des Systems

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{oder mit } \lambda_2 = -1, \quad \begin{bmatrix} +3 & -1 \\ +3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{oder z.B.} \quad 3x = y = 1.$$

6. Anwendungen der Eigenraumzerlegung

(a) Es gelten

$$(I-A)^k = \frac{1}{10^k} \begin{bmatrix} -15 & -32 \\ +12 & +25 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\frac{9}{10})^k & 0 \\ 0 & (\frac{1}{10})^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) Die Eigenwerte $\lambda_1 > \lambda_2$ von

$$A^\top A = \frac{1}{10000} \begin{bmatrix} 19801 & 19800 \\ 19800 & 19801 \end{bmatrix}$$

sind die Nullstelle des charakteristischen Polynoms,

$$p(\lambda) = \frac{39601}{100000000} - \frac{19801}{5000}\lambda + \lambda^2$$

d.h.

$$\lambda_1 = \frac{39601}{10000}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{10000}$$

und daher gilt

$$\kappa(A) = \sqrt{\max\{\lambda_1, \lambda_2\}/\min\{\lambda_1, \lambda_2\}} = \sqrt{39601} = 199.$$

Es gelten

$$\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}} = 10 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\| = 10\sqrt{2}, \quad \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{2}, \quad \frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = 10$$

$$\boldsymbol{b} = (2 - \frac{1}{100}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\| = \frac{\sqrt{2}}{10}, \quad \|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{2}(2 - \frac{1}{100}), \quad \frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{1}{20 - \frac{1}{10}}$$

und

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \Big/ \frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} = 10(20 - \frac{1}{10}) = 199 = \kappa(A).$$

(c) Für

$$X = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

gelten

$$X\boldsymbol{e}^\top/4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_{\mathrm{z}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = X_{\mathrm{z}} X_{\mathrm{z}}^\top/4 = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad KV = V\Lambda,$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X_{\mathrm{s}} = \Lambda^{-\frac{1}{2}} V^\top X_{\mathrm{z}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\tfrac{9}{32} = \lambda_1 > \lambda_2 = \tfrac{1}{32} \Rightarrow) \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$X_{\mathrm{p}} = V \Lambda^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{p} X_{\mathrm{s}} + X - X_{\mathrm{z}} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

d.h. die projizierten Daten sind

$$(\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}), \quad (\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}), \quad (\tfrac{7}{8}, \tfrac{7}{8}), \quad (\tfrac{7}{8}, \tfrac{7}{8})$$

auf der Gerade $y = x$.

7. Charakterisierung von lokalen Extremen

Eine Charakterisierung einer 2×2 SPD-Matrix ist,

$$\text{für} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{gelten} \quad a_{11}, a_{22} > 0 \quad \text{und} \quad a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21} = a_{12}^2$$

Die Bedingungen für ein lokales Minimum in $f(x_0, y_0)$ einer ausreichend differenzierbaren Funktion $f(x, y)$

$$f_{xx}(x_0, y_0), f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) > (f_{xy}(x_0, y_0))^2$$

ist die Bedingung, dass die Hessematrix ($f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$)

$$\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

SPD ist. Die Bedingungen für ein lokales Maximum in $f(x_0, y_0)$ einer ausreichend differenzierbaren Funktion $f(x, y)$

$$f_{xx}(x_0, y_0), f_{yy}(x_0, y_0) < 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0)) > (f_{xy}(x_0, y_0))^2$$

oder

$$-f_{xx}(x_0, y_0), -f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \quad \text{und} \quad (-f_{xx}(x_0, y_0))(-f_{yy}(x_0, y_0)) > (-f_{xy}(x_0, y_0))^2$$

ist die Bedingung, dass die Matrix

$$-\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -f_{xx}(x_0, y_0) & -f_{xy}(x_0, y_0) \\ -f_{yx}(x_0, y_0) & -f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

SPD ist.

15 Abschätzung von Funktionsparametern

15.1 Beispiele

1. Abschätzung von Geraden

   Gegeben seien die Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^4$,

   $$(0, 1.6), \quad (1, 1.9), \quad (2, 2.6) \quad \text{und} \quad (3, 2.9)$$

   (Hinweis: Diese Daten sind Abweichungen der Gerade $y = x/2 + 3/2$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

   (a) Stellen Sie die Datenpunkte in $\mathbb{R}^2$ grafisch dar. Wählen Sie *zwei weitere* Punkte P und Q aus, welche ungefähr auf der gleichen Gerade liegen wie die dargestellten Punkte. Bestimmen Sie die Gleichung $y = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x$ der Gerade durch P und Q. Stellen Sie diese Gerade zusammen mit den Daten grafisch dar. Vergleichen Sie die Werte y_i und $y(x_i) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x_i$, $i = 1, \ldots, 4$.

   (b) Durch die Methode der linearen Regression bestimmen Sie die Gleichung $y = a_0^* + a_1^* x$ der Gerade, die die Summe der Quadrate $E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^4 [(a_0 + a_1 x) - y_i]^2$ minimiert. Stellen Sie diese Gerade zusammen mit den Daten grafisch dar. Vergleichen Sie die Werte y_i und $y(x_i) = a_0^* + a_1^* x_i$, $i = 1, \ldots, 4$.

   (c) Da $E(a_0, a_1)$ in (k^*, d^*) minimiert wird, bestätigen Sie, es gilt $E(a_0^*, a_1^*) < E(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1)$.

2. Abschätzung von Potenzfunktionen

   Gegeben seien die Daten $\{(s_i, u_i)\}_{i=1}^4$,

   $$(1, 0.4), \quad (4, 1.1), \quad (9, 1.4) \quad \text{und} \quad (16, 2.1)$$

   (Hinweis: Diese Daten sind Abweichungen der Potenzfunktion $u = \sqrt{s}/2$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

   (a) Führen Sie die logarithmische Transformation durch,

   $$y_i = \ln(u_i), \quad x_i = \ln(s_i), \quad i = 1, \ldots, 4$$

   um die transformierten Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^4$ zu erzeugen.

   (b) Durch die Methode der linearen Regression bestimmen Sie die Gleichung $y = a_0^* + a_1^* x$ der Gerade, die die Summe der Quadrate $E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^4 [(a_0 + a_1 x) - y_i]^2$ minimiert. Stellen Sie diese Gerade zusammen mit den Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^4$ grafisch dar.

   (c) Mit $y = a_0^* + a_1^* x$, $y = \ln(u)$, $x = \ln(s)$, $c^* = e^{a_0^*}$ und $\phi^* = a_1^*$ führen Sie die exponentielle Transformation durch,

   $$u = \exp(y) = \exp(a_0^* + a_1^* x) = e^{a_0^* + a_1^* \ln(s)} = e^{a_0^*} e^{a_1^* \ln(s)} = e^{a_0^*} e^{\ln(s^{\phi^*})} = c^* s^{\phi^*}$$

   um die Potenzfunktion $u(s) = c^* s^{\phi^*}$ zu bestimmen. Stellen Sie diese Potenzfunktion zusammen mit den Daten $\{(s_i, u_i)\}_{i=1}^4$ grafisch dar.

3. Abschätzung von Polynomen durch Interpolation

   Gegeben seien die Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^3$,

   $$(-1, 3), \quad (0, 1) \quad \text{und} \quad (1, 1)$$

und ein Polynom $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ soll bestimmt werden, das die Bedingungen erfüllt

$$y(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Diese Methode heißt polynomiale Interpolation der Daten. (Hinweis: Diese Daten sind entsprechen dem Polynom $y = 1 - x + x^2$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

(a) Erstellen Sie die Matrix und den Vektor,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

(b) Die Parameter des Polynoms

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

werden durch die Lösung des linearen Gleichungssystems $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ bestimmt. Bestätigen Sie, das System wird gelöst mit:

$$a_0 = 1.0, \quad a_1 = -1.0 \quad \text{und} \quad a_2 = 1.0.$$

Bonus: Lösen Sie das System $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, um diese Parameter zu bestimmen. Sie können Gaußsche Elimination verwenden und zur Kontrolle die folgenden Mathematica Befehle probieren:

```
M = {{1, -1, 1}, {1, 0, 0}, {1, 1, 1}}
b = {3.0, 1.0, 1.0}
a = Inverse[M].b
```

(c) Bestätigen Sie mit den berechneten Koeffizienten $\{a_0, a_1, a_2\}$, dass die Interpolationsbedingungen $y(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt sind.

4. Abschätzung von Polynomen durch Regression

Seien x und y wie im letzten Beispiel, aber nun seien die zusätzlichen Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^5$ gegeben,

$$(-2.0, 6.9), \quad (-1.0, 3.1), \quad (0.0, 0.9), \quad (1.0, 1.1) \quad \text{und} \quad (2.0, 2.9)$$

und ein Polynom $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ soll bestimmt werden, das die Summe der Quadrate minimiert:

$$E(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{5} [(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2) - y_i]^2$$

Diese Methode heißt polynomiale Regression. (Hinweis: Diese Daten sind Abweichungen des Polynoms $y = 1 - x + x^2$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

(a) Erstellen Sie die Matrix und den Vektor,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \quad \text{und die Produkte} \quad M^\top M, \quad M^\top \boldsymbol{b}$$

(b) Die Parameter des Polynoms

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

werden durch die Lösung des linearen Gleichungssystems $(M^\top M)\boldsymbol{a} = M^\top \boldsymbol{b}$ bestimmt. Bestätigen Sie, das System wird gelöst mit:

$$a_0 = 1.03714, \quad a_1 = -1.0 \quad \text{und} \quad a_2 = 0.971429.$$

Bonus: Lösen Sie das System $(M^\top M)\boldsymbol{a} = M^\top \boldsymbol{b}$, um diese Parameter zu bestimmen. Sie können Gaußsche Elimination verwenden und zur Kontrolle die folgenden Mathematica Befehle probieren:

```
M = {{1, -2, 4}, {1, -1, 1}, {1, 0, 0}, {1, 1, 1}, {1, 2, 4}}
b = {6.9, 3.1, 0.9, 1.1, 2.9}
a = Inverse[Transpose[M].M].(Transpose[M].b)
```

(c) Mit den durch polynomiale Regression berechneten Koeffizienten $\{a_0, a_1, a_2\}$ vergleichen Sie die Werte y_i und $y(x_i)$, $i = 1, \ldots, 5$.

5. Abschätzung von Rationalen Funktionen durch Interpolation

Gegeben seien die Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^3$

$$(0.0, 0.0), \quad (1.0, 1.0) \quad \text{und} \quad (2.0, 1.2)$$

und eine rationale Funktion $r(t) = p(t)/q(t)$ mit $p(t) = a_1 + a_2 t$ und $q(t) = 1 + a_3 t$ soll bestimmt werden, die die Bedingungen erfüllt

$$r(t_i) = r_i \quad \text{oder} \quad p(t_i) = r_i q(t_i) \quad \text{oder} \quad a_1 + a_2 t_i - t_i r_i a_3 = r_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Diese Methode heißt rationale Interpolation. (Hinweis: Diese Daten entsprechen der rationalen Funktion $r = 3t/(1 + 2t)$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

(a) Erstellen Sie die Matrix und den Vektor

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & -t_1 r_1 \\ 1 & t_2 & -t_1 r_2 \\ 1 & t_3 & -t_1 r_3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

(b) Die Parameter der rationalen Funktion

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

werden durch die Lösung des linearen Gleichungssystems $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ bestimmt. Bestätigen Sie, das System wird gelöst mit:

$$a_1 = 0.0, \quad a_2 = 3.0 \quad \text{und} \quad a_3 = 2.0.$$

Bonus: Lösen Sie das System $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, um diese Parameter zu bestimmen. Sie können Gaußsche Elimination verwenden und zur Kontrolle die folgenden Mathematica Befehle probieren:

```
M = {{1, 0, 0.0}, {1, 1, -1.0}, {1, 2, -2.4}}
b = {0.0, 1.0, 1.2}
a = Inverse[M].b
```

(c) Bestätigen Sie mit den berechneten Koeffizienten $\{a_1, a_2, a_3\}$, dass die Interpolationsbedingungen $r(t_i) = r_i$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt sind.

6. Abschätzung von Rationalen Funktionen durch Regression

Seien t und u wie im letzten Beispiel, aber nun seien die zusätzlichen Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^{5}$ gegeben,

$$(0.2, 0.43), \quad (0.4, 0.67), \quad (0.8, 0.92), \quad (1.6, 1.14) \quad \text{und} \quad (3.2, 1.30)$$

und eine rationale Funktion $r(t) = p(t)/q(t)$ mit $p(t) = a_1 + a_2 t$ und $q(t) = 1 + a_3 t$ soll bestimmt werden, die die Summe der Quadrate minimiert

$$E(a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^{5} [a_1 + t_i a_2 - t_i r_i a_3 - r_i]^2$$

Diese Methode heißt rationale Regression. (Hinweis: Diese Daten sind Abweichungen der rationalen Funktion $r = 3t/(1+2t)$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

(a) Erstellen Sie die Matrix und den Vektor

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & -t_1 r_1 \\ 1 & t_2 & -t_2 r_2 \\ 1 & t_3 & -t_3 r_3 \\ 1 & t_4 & -t_4 r_4 \\ 1 & t_5 & -t_5 r_5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} \qquad \text{und die Produkte} \quad M^\top M, \quad M^\top \boldsymbol{b}$$

(b) Die Parameter der rationalen Funktion

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

werden durch die Lösung des linearen Gleichungssystems $(M^\top M)\boldsymbol{a} = M^\top \boldsymbol{b}$ bestimmt. Bestätigen Sie, das System wird gelöst mit:

$$a_0 = 0.0281, \quad a_1 = 2.8477 \quad \text{und} \quad a_2 = 1.8852.$$

Bonus: Lösen Sie das System $(M^\top M)\boldsymbol{a} = M^\top \boldsymbol{b}$, um diese Parameter zu bestimmen. Sie können Gaußsche Elimination verwenden und zur Kontrolle die folgenden Mathematica Befehle probieren:

```
M = {{1,0.2,-0.086},{1,0.4,-0.268},{1,0.8,-0.736},{1,1.6,-1.824},{1,3.2,-4.16}}
b = {0.43,0.67,0.92,1.14,1.30}
a = Inverse[Transpose[M].M].(Transpose[M].b)
```

(c) Mit den durch rationale Regression berechneten Koeffizienten $\{a_1, a_2, a_3\}$ vergleichen Sie die Werte r_i und $r(t_i)$, $i = 1, \ldots, 5$.

7. Abschätzung von Exponentiellen Funktionen durch Interpolation

Gegeben seien die Daten $\{(t_i, T_i)\}_{i=1}^{3}$

$$(0.0, 10.0), \quad (1.0, 5.50) \quad \text{und} \quad (2.0, 3.25)$$

und eine exponentielle Funktion $T(t) = \alpha + \beta e^{\nu t}$ soll bestimmt werden, die die Bedingungen erfüllt

$$T(t_i) = T_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Diese Methode heißt exponentielle Interpolation. (Hinweis: Diese Daten entsprechen der exponentiellen Funktion $T = 1 + 9 \cdot 2^{-t}$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

(a) Anhand der ersten Bedingung $10 = T(0) = \alpha + \beta e^{0\nu}$ oder $\beta = 10 - \alpha$ schreiben Sie die anderen Bedingungen

$$5.50 = T(1) = \alpha + \beta e^{\nu} \quad \text{und} \quad 3.25 = T(2) = \alpha + \beta e^{2\nu}$$

rein bezüglich α und ν um, d.h. ohne β.

(b) Lösen Sie nach α in den beiden Gleichungen auf, und zeigen Sie mit $x = e^{\nu}$, es gilt

$$\alpha = \frac{20x - 11}{2(x-1)} = \frac{40x^2 - 13}{4(x^2 - 1)}$$

(c) Lösen Sie nach x in dieser Gleichung auf, und setzen Sie $\nu = \ln(x)$. Dann ist α durch die letzte Gleichung gegeben, und β ist durch $\beta = 10 - \alpha$ gegeben.

(d) Bestätigen Sie mit den berechneten Parametern $\{\alpha, \beta, \nu\}$, dass die Interpolationsbedingungen $T(t_i) = T_i$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt sind.

8. Abschätzung von Exponentiellen Funktionen durch Regression

Gegeben seien die Daten $\{(s_i, v_i)\}_{i=1}^{5}$

$$(0.0, 10.0), \quad (0.5, 7.1), \quad (1.0, 5.0), \quad (1.5, 3.6) \quad \text{und} \quad (2.0, 2.5)$$

und eine Exponentialfunktion $v(s) = ce^{\mu s}$ soll bestimmt werden, die die Summe der Quadrate

$$E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{5} [(a_0 + a_1 s_i) - \ln(v_i)]^2$$

minimiert. Hier ist die Form des Problems durch $\ln(v) = \ln(ce^{\mu s}) = a_0 + a_1 s$ mit $a_0 = e^c$ und $a_1 = \mu$ transformiert worden, damit lineare Regression auf die transformierten Daten verwendet werden kann. (Hinweis: Diese Daten sind Abweichungen der Exponentialfunktion $v = 10 \cdot 2^{-s}$, aber die folgenden Aufgaben sollen ohne dieses Wissen gelöst werden.)

(a) Führen Sie die logarithmische Transformation durch,

$$y_i = \ln(v_i), \quad x_i = s_i, \quad i = 1, \ldots, 5$$

um die transformierten Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{4}$ zu erzeugen.

(b) Durch die Methode der linearen Regression bestimmen Sie die Gleichung $y = a_0^* + a_1^* x$ der Gerade, die die Summe der Quadrate

$$E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{4} [(a_0 + a_1 x) - y_i]^2$$

minimiert. Stellen Sie diese Gerade zusammen mit den Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{4}$ grafisch dar.

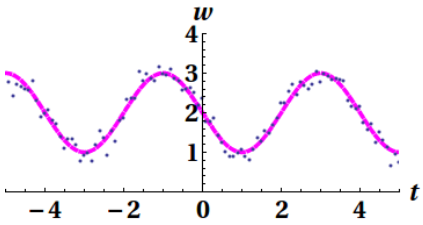
(c) Mit $y = a_0^* + a_1^* x$, $y = \ln(u)$, $x = s$, $a_0^* = \ln(c^*)$ und $a_1^* = \mu^*$ führen Sie die exponentielle Transformation durch,

$$v = \exp(y) = \exp(a_0^* + a_1^* x) = e^{\ln(c^*) + \mu^* s} = c^* e^{\mu^* s}$$

um die Exponentialfunktion $u = c^* e^{\mu^* s}$ zu bestimmen. Stellen Sie diese Exponentialfunktion zusammen mit den Daten $\{(s_i, v_i)\}_{i=1}^{5}$ grafisch dar.

9. Abschätzung von Winkelfunktionen

Gegeben seien die grafisch dargestellten Daten,



und eine Winkelfunktion

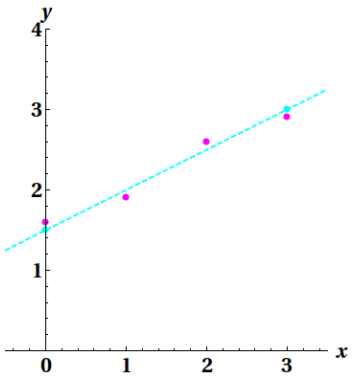
$$w(t) = c + a\sin[2\pi\omega(t-b)]$$

soll bestimmt werden, die die obigen Daten widerspiegelt. Bestimmen Sie die Parameter $\{a, b, c, \omega\}$ aus der Grafik.

15.2 Lösungen

1. Abschätzung von Geraden

   (a) Die magentafarbigen Punkte in der folgenden Grafik



   stellen die Daten

$$(0, 1.6), \quad (1, 1.9), \quad (2, 2.6) \quad \text{und} \quad (3, 2.9)$$

   in $\mathbb{R}^2$ grafisch dar. Zwei weitere Punkte

$$P = (0, 1.5) \quad \text{und} \quad Q = (3, 3)$$

   liegen ungefähr auf der gleichen Gerade wie die dargestellten Punkte. Diese Punkte P und Q sind zyanfarbig in der obigen Grafik. Die Gerade durch P und Q hat Steigung

$$\tilde{a}_1 = \frac{3 - 1.5}{3 - 0} = 0.5.$$

   Da der Punkt $Q = (3, 3)$ in der Gerade liegt, lässt sich die Gerade mit der Formel $(y - 3) = \tilde{a}_1(x - 3)$ oder $y = 3 + (x - 3)/2$ darstellen. Daher mit

$$\tilde{a}_0 = 1.5$$

   ist die Gerade gegeben durch $y(x) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x$. Diese Gerade ist zyanfarbig in der obigen Grafik. Die y-Werte der Daten und der abgeschätzen Gerade sind

i	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3
y_i	1.6	1.9	2.6	2.9
$y(x_i)$	1.5	2.0	2.5	3.0

   Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen $\{|y(x_i) - y_i|\}_{i=1}^4 = \{0.1, 0.1, 0.1, 0.1\}$ alle klein.

   (b) Wie im Kapitel 13 gezeigt, wird die Summe der Quadrate

$$E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{4} [(a_0 + a_1 x) - y_i]^2$$

   global minimiert in

$$a_1^* = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \quad a_0^* = \overline{y} - a_1^* \overline{x}$$

   Anhand der gegebenen Daten

$$(0, 1.6), \quad (1, 1.9), \quad (2, 2.6) \quad \text{und} \quad (3, 2.9)$$

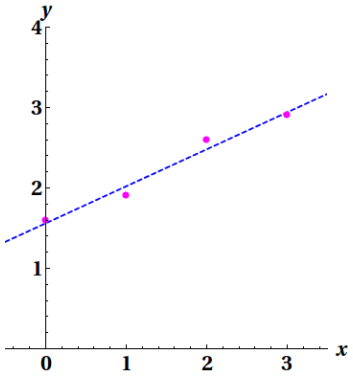
sind die gemittelten Werte gegeben durch

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= (0+1+2+3)/4 = 1.5 \\
\overline{y} &= (1.6+1.9+2.6+2.9)/4 = 2.25 \\
\overline{x^2} &= (0^2+1^2+2^2+3^2)/4 = 3.5 \\
\overline{xy} &= (0\cdot 1.6+1\cdot 1.9+2\cdot 2.6+3\cdot 2.9)/4 = 3.95
\end{aligned}$$

und die für $E(a_0, a_1)$ minimierenden Parameter sind

$$a_1^* = \frac{3.95 - 1.5\cdot 2.25}{3.5 - 1.5^2} = 0.46, \quad a_0^* = 2.25 - a_1^*\cdot 1.5 = 1.56$$

Grafisch dargestellt werden die Gerade $y = a_0^* + a_1^* x$ blau und die obigen Daten magentafarbig in der folgenden Grafik.



Die y-Werte der Daten und der abgeschätzen Gerade sind

i	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3
y_i	1.6	1.9	2.6	2.9
$y(x_i)$	1.56	2.02	2.48	2.94

Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen $\{|y(x_i) - y_i|\}_{i=1}^4 = \{0.04, 0.12, 0.12, 0.04\}$ alle klein.

(c) Die Zielfunktion $E(a_0, a_1)$ ausgewertet in $(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1)$ und (a_0^*, a_1^*) ist

$$E(a_0^*, a_1^*) = 0.032 < 0.04 = E(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1)$$

Bemerkung: Die Zielfunktion

$$F(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{4} |(a_0 + a_1 x) - y_i|$$

ist robuster gegenüber Ausreißer, d.h. die für $F(a_0, a_1)$ minimierenden Parameter werden von einer starken Störung eines Datenpunkts nicht stark beeinflusst. Auf der anderen Seite ist $F(a_0, a_1)$ schwieriger zu minimieren als $E(a_0, a_1)$.

2. Abschätzung von Potenzfunktionen

(a) Die rohen und transformierten Daten sind

i	1	2	3	4
s_i	1	4	9	16
u_i	0.4	1.1	1.4	2.1
$x_i = \ln(s_i)$	0.00	1.39	2.20	2.77
$y_i = \ln(u_i)$	−0.916	0.0953	0.336	0.742

(b) Wie im Kapitel 13 gezeigt, wird die Summe der Quadrate

$$E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{4} [(a_0 + a_1 x) - y_i]^2$$

global minimiert in

$$a_1^* = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \quad a_0^* = \overline{y} - a_1^* \overline{x}$$

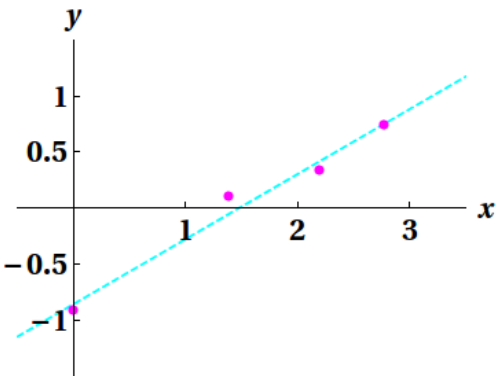
Anhand der (x, y)-Daten sind die gemittelten Werte gegeben durch

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= (0.00 + 1.39 + 2.20 + 2.77)/4 = 1.59 \\
\overline{y} &= (-0.916 + 0.0953 + 0.336 + 0.742)/4 = 0.0644 \\
\overline{x^2} &= (0.00^2 + 1.39^2 + 2.20^2 + 2.77^2)/4 = 3.61 \\
\overline{xy} &= (-0.00 \cdot 0.916 + 1.39 \cdot 0.0953 + 2.20 \cdot 0.336 + 2.77 \cdot 0.742)/4 = 0.732
\end{aligned}$$

und die für $E(a_0, a_1)$ minimierenden Parameter sind

$$a_1^* = \frac{0.732 - 1.59 \cdot 0.0644}{3.61 - 1.59^2} = 0.581, \quad a_0^* = 0.0644 - a_1^* \cdot 1.59 = -0.859$$

Grafisch dargestellt werden die Gerade $y(x) = a_0^* + a_1^* x$ zyanfarbig und die (x, y)-Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^4$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



Die y-Werte der Daten und der abgeschätzen Gerade sind

i	1	2	3	4
x_i	0.00	1.39	2.20	2.77
y_i	−0.916	0.0953	0.336	0.742
$y(x_i)$	−0.859	−0.0534	0.418	0.752

Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen $\{|y(x_i) - y_i|\}_{i=1}^4 = \{0.06, 0.1, 0.08, 0.01\}$ alle klein.

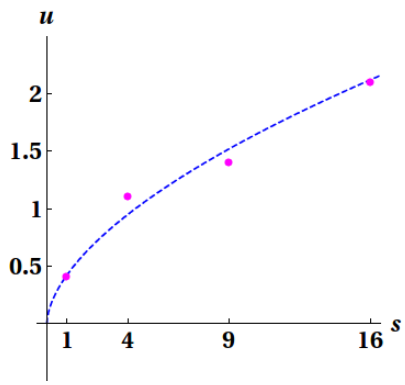
(c) Mit $a_0^* = \ln(c^*)$, $a_1^* = \phi^*$, $x = \ln(s)$ und

$$\ln(u) = y = a_0^* + a_1^* x = \ln(c^*) + \phi^* \ln(s), \quad c^* = e^{a_0^*} = 0.424, \quad \phi^* = a_1^* = 0.581$$

ergibt sich die Potenzfunktion $u(s) = c^* s^{\phi^*}$ durch die exponentielle Transformation

$$u = \exp(y) = \exp(a_0^* + a_1^* x) = e^{\ln(c^*) + \phi^* \ln(s)} = e^{\ln(c^*)} e^{\phi^* \ln(s)} = c^* e^{\ln(s^{\phi^*})} = c^* s^{\phi^*}.$$

Grafisch dargestellt werden die Potenzfunktion $u(s) = c^* s^{k^*}$ blau und die (s, u)-Daten $\{(s_i, u_i)\}_{i=1}^4$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



Die u-Werte der Daten und der abgeschätzen Potenzfunktion sind

i	1	2	3	4
s_i	1	4	9	16
u_i	0.4	1.1	1.4	2.1
$u(s_i)$	0.424	0.948774	1.51978	2.12305

Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen $\{|u(s_i) - u_i|\}_{i=1}^4 = \{0.024, 0.15, 0.12, 0.023\}$ alle klein.

3. Abschätzung von Polynomen durch Interpolation

(a) Anhand der Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^3$

$$(-1, 3), \quad (0, 1) \quad \text{und} \quad (1, 1)$$

ergeben sich die Matrix und der Vektor,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & +1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Der Vektor

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

erfüllt

$$M\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & +1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,-1,1)\cdot(1,-1,1) \\ (1,0,0)\cdot(1,-1,1) \\ (1,1,1)\cdot(1,-1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

Bonus: Das System $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ wird folgendermaßen durch Gaußsche Elimination

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II} - \text{I} \to \tilde{\text{II}}: \\ \text{III} - \text{I} \to \tilde{\text{III}}: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{I}: & \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \\
\tilde{\text{II}}: & \\
\tilde{\text{III}} - 2 \cdot \tilde{\text{II}} \to \hat{\text{III}}: &
\end{array}
$$

und Rückwärtssubstitution gelöst:

$$
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]
\begin{array}{l}
\Rightarrow a_0 = 3 - (-1) \cdot a_1 - (+1) \cdot a_2 = 1 \\
\Rightarrow a_1 = -2 - (-1) \cdot a_2 = -1 \quad \uparrow \\
\Rightarrow a_2 = 2/2 = 1 \qquad \uparrow \qquad\qquad \uparrow
\end{array}
$$

oder

$$
a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Kontrolle: Mit den Mathematica Befehlen

```
M = {{1, -1, 1}, {1, 0, 0}, {1, 1, 1}}
b = {3, 1, 1}
a = Inverse[M].b
```

kommt (die gleiche Antwort wie oben) bei dem letzten Befehl heraus:

```
{1, -1, 1}
```

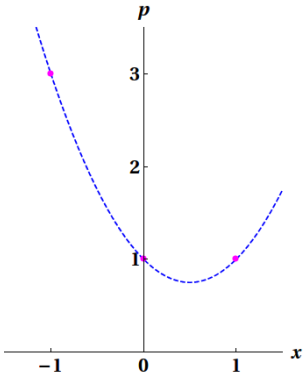
(c) Das Polynom

$$
y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 1
$$

erfüllt

$$
\begin{array}{llllll}
y(x_1) = y(-1) & = a_0 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 & = 1 - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)^2 & = 3 & = y_1 \\
y(x_2) = y(0) & = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 & = 1 + 0 & = 1 & = y_2 \\
y(x_3) = y(+1) & = a_0 + a_1 \cdot (+1) + a_2 \cdot (+1)^2 & = 1 - 1 \cdot (+1) + 1 \cdot (+1)^2 & = 1 & = y_3
\end{array}
$$

und daher sind die Interpolationsbedingungen $y(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt. Grafisch dargestellt werden das Polynom $y(x) = 1 - x + x^2$ blau und die Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{3}$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



4. Abschätzung von Polynomen durch Regression

(a) Anhand der Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{5}$,

$$
(-2.0, 6.9), \quad (-1.0, 3.1), \quad (0.0, 0.9), \quad (1.0, 1.1) \quad \text{und} \quad (2.0, 2.9)
$$

ergeben sich die Matrix und der Vektor,

$$
M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & +1 & 1 \\ 1 & +2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.9 \\ 3.1 \\ 0.9 \\ 1.1 \\ 2.9 \end{bmatrix}
$$

und die Produkte

$$M^\top M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & +1 & +2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & +1 & 1 \\ 1 & +2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}$$

$$M^\top \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & +1 & +2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.9 \\ 3.1 \\ 0.9 \\ 1.1 \\ 2.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.9 \\ -10.0 \\ 43.4 \end{bmatrix}$$

(b) Der Vektor

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.04 \\ -1.00 \\ 0.971 \end{bmatrix}$$

erfüllt

$$M^\top M \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.04 \\ -1.00 \\ 0.971 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5,0,10)\cdot(1.04,-1.00,0.971) \\ (0,10,0)\cdot(1.04,-1.00,0.971) \\ (10,0,34)\cdot(1.04,-1.00,0.971) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.9 \\ -10.0 \\ 43.4 \end{bmatrix} = M^\top \boldsymbol{b}$$

Bonus: Das System $(M^\top M)\boldsymbol{a} = M^\top \boldsymbol{b}$ wird folgendermaßen durch Gaußsche Elimination

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 0 & 10 & 14.9 \\ 0 & 10 & 0 & -10.0 \\ 10 & 0 & 34 & 43.4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III} - 2\cdot\text{I} \to \tilde{\text{III}}: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 0 & 10 & 14.9 \\ 0 & 10 & 0 & -10.0 \\ 0 & 0 & 14 & 13.6 \end{array}\right]$$

und Rückwärtssubstitution gelöst:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 0 & 10 & 14.9 \\ 0 & 10 & 0 & -10.0 \\ 0 & 0 & 14 & 13.6 \end{array}\right] \begin{array}{r} \Rightarrow a_0 = (14.9 - (10)\cdot a_2)/5 = 1.04 \\ \Rightarrow a_1 = -10.0/10 = -1.00 \\ \Rightarrow a_2 = 13.6/14 = 0.971 \qquad \uparrow \end{array}$$

oder

$$a_0 = 1.04, \quad a_1 = -1.00, \quad a_2 = 1.04, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.04 \\ -1.00 \\ 0.971 \end{bmatrix}$$

Kontrolle: Mit den Mathematica Befehlen:

```
M = {{1, -2, 4}, {1, -1, 1}, {1, 0, 0}, {1, 1, 1}, {1, 2, 4}}
b = {6.9, 3.1, 0.9, 1.1, 2.9}
a = Inverse[Transpose[M].M].(Transpose[M].b)
```

kommt (die gleiche Antwort wie oben) bei dem letzten Befehl heraus:

```
{1.03714, -1., 0.971429}
```

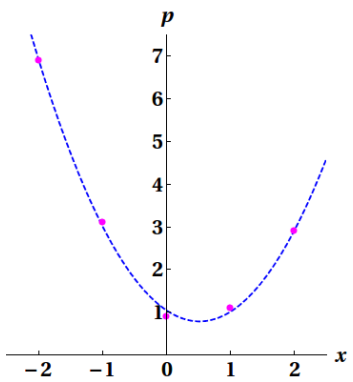
(c) Das Polynom

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad a_0 = 1.04, \quad a_1 = -1.00, \quad a_2 = 0.971$$

erfüllt

$$\begin{aligned}
y(x_1) = y(-2) &= a_0 + a_1 \cdot (-2) + a_2 \cdot (-2)^2 \\
&= 1.04 - 1.00 \cdot (-2) + 0.971 \cdot (-2)^2 && = 6.92 \approx y_1 = 6.9 \\
y(x_2) = y(-1) &= a_0 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 \\
&= 1.04 - 1.00 \cdot (-1) + 0.971 \cdot (-1)^2 && = 3.01 \approx y_2 = 3.1 \\
y(x_3) = y(0) &= a_0 + a_1 \cdot (0) + a_2 \cdot (0)^2 \\
&= 1.04 && = 1.04 \approx y_3 = 0.9 \\
y(x_4) = y(+1) &= a_0 + a_1 \cdot (+1) + a_2 \cdot (+1)^2 \\
&= 1.04 - 1.00 \cdot (+1) + 0.971 \cdot (+1)^2 && = 1.01 \approx y_4 = 1.1 \\
y(x_5) = y(+2) &= a_0 + a_1 \cdot (+2) + a_2 \cdot (+2)^2 \\
&= 1.04 - 1.00 \cdot (+2) + 0.971 \cdot (+2)^2 && = 2.92 \approx y_5 = 2.9
\end{aligned}$$

und daher sind die Differenzen $\{|y(x_i) - y_i|\}_{i=1}^5 = \{0.02, 0.09, 0.14, 0.09, 0.02\}$ alle klein. Grafisch dargestellt werden das Polynom $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ blau und die Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^5$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



5. Abschätzung von Rationalen Funktionen durch Interpolation

(a) Anhand der Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^3$

$$(0.0, 0.0), \quad (1.0, 1.0), \quad \text{und} \quad (2.0, 1.2)$$

ergeben sich die Matrix und der Vektor,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & -t_1 r_1 \\ 1 & t_2 & -t_2 r_2 \\ 1 & t_3 & -t_3 r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.0 \\ 1 & 1 & -1.0 \\ 1 & 2 & -2.4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

(b) Der Vektor

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

erfüllt

$$M\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.0 \\ 1 & 1 & -1.0 \\ 1 & 2 & -2.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1, 0, -0.0) \cdot (0, 3, 2) \\ (1, 1, -1.0) \cdot (0, 3, 2) \\ (1, 2, -2.4) \cdot (0, 3, 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ 1.2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

Bonus: Das System $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ wird folgendermaßen durch Gaußsche Elimination

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0.0 & 0.0 \\ 1 & 1 & -1.0 & 1.0 \\ 1 & 2 & -2.4 & 1.2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II} - \text{I} \to \tilde{\text{II}}: \\ \text{III} - \text{I} \to \tilde{\text{III}}: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & 1 & -1.0 & 1.0 \\ 0 & 2 & -2.4 & 1.2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \tilde{\text{II}}: \\ \tilde{\text{III}} - 2 \cdot \tilde{\text{II}} \to \hat{\text{III}}: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & 1 & -1.0 & 1.0 \\ 0 & 0 & -0.4 & -0.8 \end{array}\right]$$

und Rückwärtssubstitution gelöst:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & 1 & -1.0 & 1.0 \\ 0 & 0 & -0.4 & -0.8 \end{array}\right] \quad \begin{array}{r} \Rightarrow a_1 = 0 - 0 \cdot a_2 - 0 \cdot a_3 = 0 \\ \Rightarrow a_2 = (1.0 - (-1.0) \cdot a_3) = 3 \uparrow \\ \Rightarrow a_3 = 0.8/0.4 = 2 \uparrow \end{array}$$

oder

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 2, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Kontrolle: Mit den Mathematica Befehlen

```
M = {{1, 0, 0.0}, {1, 1, -1.0}, {1, 2, -2.4}}
b = {0.0, 1.0, 1.2}
a = Inverse[M].b
```

kommt (die gleiche Antwort wie oben) bei dem letzten Befehl heraus:

```
{0, 3, 2}
```

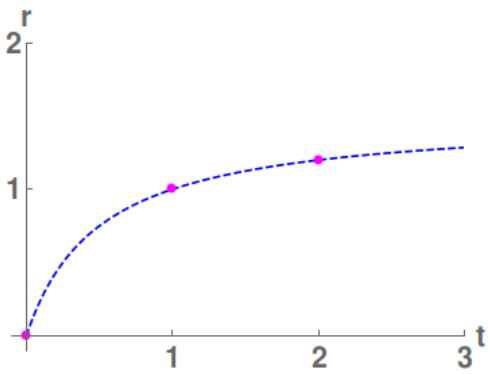
(c) Die rationale Funktion

$$r(t) = \frac{a_1 + a_2 t}{1 + a_3 t}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 2$$

erfüllt

$$\begin{array}{llllll} r(t_1) = r(0) & = \dfrac{a_1 + a_2 \cdot 0}{1 + a_3 \cdot 0} & = \dfrac{0 + 3 \cdot 0}{1 + 2 \cdot 0} & = 0.0 & = r_1 \\ r(t_2) = r(1) & = \dfrac{a_1 + a_2 \cdot 1}{1 + a_3 \cdot 1} & = \dfrac{0 + 3 \cdot 1}{1 + 2 \cdot 1} & = 1.0 & = r_1 \\ r(t_3) = r(2) & = \dfrac{a_1 + a_2 \cdot 2}{1 + a_3 \cdot 2} & = \dfrac{0 + 3 \cdot 2}{1 + 2 \cdot 2} & = 1.2 & = r_3 \end{array}$$

und daher sind die Interpolationsbedingungen $r(t_i) = r_i$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt. Grafisch dargestellt werden die rationale Funktion $r(t) = 3t/(1 + 2t)$ blau und die Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^{3}$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



6. Abschätzung von Rationalen Funktionen durch Regression

(a) Anhand der Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^{5}$

$$(0.2, 0.43), \quad (0.4, 0.67), \quad (0.8, 0.92), \quad (1.6, 1.14) \quad \text{und} \quad (3.2, 1.30)$$

ergeben sich die Matrix und der Vektor

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & -t_1 r_1 \\ 1 & t_2 & -t_2 r_2 \\ 1 & t_3 & -t_3 r_3 \\ 1 & t_4 & -t_4 r_4 \\ 1 & t_5 & -t_5 r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & -0.086 \\ 1 & 0.4 & -0.268 \\ 1 & 0.8 & -0.736 \\ 1 & 1.6 & -1.824 \\ 1 & 3.2 & -4.160 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.43 \\ 0.67 \\ 0.92 \\ 1.14 \\ 1.30 \end{bmatrix}$$

und die Produkte

$$M^\top M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.8 & 1.6 & 3.2 \\ -0.086 & -0.268 & -0.736 & -1.824 & -4.160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & -0.086 \\ 1 & 0.4 & -0.268 \\ 1 & 0.8 & -0.736 \\ 1 & 1.6 & -1.824 \\ 1 & 3.2 & -4.160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0000 & 6.2000 & -7.0740 \\ 6.2000 & 13.6400 & -16.9436 \\ -7.0740 & -16.9436 & 21.2535 \end{bmatrix}$$

$$M^\top \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.8 & 1.6 & 3.2 \\ -0.086 & -0.268 & -0.736 & -1.824 & -4.160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.43 \\ 0.67 \\ 0.92 \\ 1.14 \\ 1.30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.460 \\ 7.074 \\ -8.381 \end{bmatrix}$$

(b) Der Vektor

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0281 \\ 2.8477 \\ 1.8852 \end{bmatrix}$$

erfüllt

$$M^\top M \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 5.0000 & 6.2000 & -7.0740 \\ 6.2000 & 13.6400 & -16.9436 \\ -7.0740 & -16.9436 & 21.2535 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0281 \\ 2.8477 \\ 1.8852 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (5.0000, 6.2000, -7.0740) \cdot (0.0281, 2.8477, 1.8852) \\ (6.200, 13.6400, -16.9436) \cdot (0.0281, 2.8477, 1.8852) \\ (-7.0740, -16.9436, 21.2535) \cdot (0.0281, 2.8477, 1.8852) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.460 \\ 7.074 \\ -8.381 \end{bmatrix} = M^\top \boldsymbol{b}$$

Bonus: Das System $(M^\top M)\boldsymbol{a} = M^\top \boldsymbol{b}$ wird folgendermaßen durch Gaußsche Elimination

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 5.0000 & 6.2000 & -7.0740 & 4.460 \\ 6.2000 & 13.6400 & -16.9436 & 7.074 \\ -7.0740 & -16.9436 & 21.2535 & -8.381 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II} - \frac{6.2000}{5.0000}\text{I} \to \tilde{\text{II}}: \\ \text{III} - \frac{-7.0740}{5.0000} \cdot \text{I} \to \tilde{\text{III}}: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 5.0000 & 6.2000 & -7.0740 & 4.4600 \\ 0 & 5.9520 & -8.1718 & 1.5436 \\ 0 & -8.1718 & 11.2452 & -2.0710 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \tilde{\text{II}}: \\ \text{III} - \frac{-8.1718}{5.5920} \cdot \text{II} \to \hat{\text{III}}: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 5.0000 & 6.2000 & -7.0740 & 4.4600 \\ 0 & 5.9520 & -8.1718 & 1.5436 \\ 0 & 0 & 0.0256 & 0.0483 \end{array}\right]$$

und Rückwärtssubstitution gelöst:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 5.0000 & 6.2000 & -7.0740 & 4.4600 \\ 0 & 5.9520 & -8.1718 & 1.5436 \\ 0 & 0 & 0.0256 & 0.0483 \end{array}\right] \quad \begin{array}{r} \Rightarrow a_1 = (4.46 - (6.2)a_2 - (-7.074)a_3)/5 = 0.0281 \\ \Rightarrow a_2 = (1.5436 - (-8.1718)a_3)/5.9520 = 2.8477 \\ \Rightarrow a_3 = 0.0483/0.0256 = 1.8852 \quad \uparrow \end{array}$$

oder

$$a_1 = 0.0281, \quad a_2 = 2.8477, \quad a_3 = 1.8852, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0281 \\ 2.8477 \\ 1.8852 \end{bmatrix}$$

Kontrolle: Mit den Mathematica Befehlen

```
M = {{1,0.2,-0.086},{1,0.4,-0.268},{1,0.8,-0.736},{1,1.6,-1.824},{1,3.2,-4.16}}
b = {0.43,0.67,0.92,1.14,1.30}
a = Inverse[Transpose[M].M].(Transpose[M].b)
```

kommt (die gleiche Antwort wie oben) bei dem letzten Befehl heraus:

```
{0.0281,2.8477,1.8852}
```

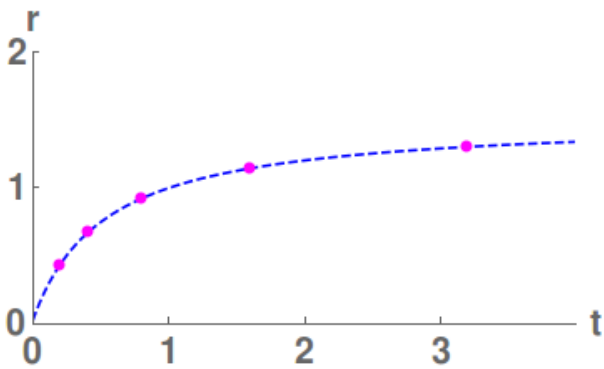
(c) Die rationale Funktion

$$r(t) = \frac{a_1 + a_2 t}{1 + a_3 t}, \quad a_1 = 0.0281, \quad a_2 = 2.8477, \quad a_3 = 1.8852$$

erfüllt

$$\begin{aligned}
r(t_1) = r(0.2) &= \frac{a_1 + a_2 \cdot 0.2}{1 + a_3 \cdot 0.2} = \frac{0.0281 + 2.8477 \cdot 0.2}{1 + 1.8842 \cdot 0.2} = 0.4340 \approx r_1 = 0.43 \\
r(t_2) = r(0.4) &= \frac{a_1 + a_2 \cdot 0.4}{1 + a_3 \cdot 0.4} = \frac{0.0281 + 2.8477 \cdot 0.4}{1 + 1.8842 \cdot 0.4} = 0.6654 \approx r_2 = 0.67 \\
r(t_3) = r(0.8) &= \frac{a_1 + a_2 \cdot 0.8}{1 + a_3 \cdot 0.8} = \frac{0.0281 + 2.8477 \cdot 0.8}{1 + 1.8842 \cdot 0.8} = 0.9195 \approx r_3 = 0.92 \\
r(t_4) = r(1.6) &= \frac{a_1 + a_2 \cdot 1.6}{1 + a_3 \cdot 1.6} = \frac{0.0281 + 2.8477 \cdot 1.6}{1 + 1.8842 \cdot 1.6} = 1.1414 \approx r_4 = 1.14 \\
r(t_5) = r(3.2) &= \frac{a_1 + a_2 \cdot 3.2}{1 + a_3 \cdot 3.2} = \frac{0.0281 + 2.8477 \cdot 3.2}{1 + 1.8842 \cdot 3.2} = 1.2997 \approx r_5 = 1.30
\end{aligned}$$

und daher sind die Differenzen $\{|r(t_i) - r_i|\}_{i=1}^5 = \{4.0, 4.6, 0.5, 1.4, 0.3\} \times 10^{-3}$ alle klein. Grafisch dargestellt werden die rationale Funktion $r(t) = (a_1 + a_2 t)/(1 + a_3 t)$ blau und die Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^5$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



7. Abschätzung von Exponentiellen Funktionen durch Interpolation

(a) Anhand der Daten

$$(0.0, 10.0), \quad (1.0, 5.50) \quad \text{und} \quad (2.0, 3.25)$$

der exponentiellen Funktion $T(t) = \alpha + \beta e^{\nu t}$ folgt mit der Bedingung des ersten Datenpunkts

$$10 = T(0) = \alpha + \beta e^{0\nu} \quad \text{oder} \quad \beta = 10 - \alpha$$

und die Bedingungen der anderen Datenpunkte

$$5.50 = T(1) = \alpha + \beta e^{\nu} \quad \text{und} \quad 3.25 = T(2) = \alpha + \beta e^{2\nu}$$

lassen sich ohne β so umschreiben,

$$5.50 = \alpha + (10 - \alpha)e^{\nu} \quad \text{und} \quad 3.25 = \alpha + (10 - \alpha)e^{2\nu}$$

oder

$$5.50 - 10e^{\nu} = \alpha(1 - e^{\nu}) \quad \text{und} \quad 3.25 - 10e^{2\nu} = \alpha(1 - e^{2\nu})$$

(b) Die letzten 2 Gleichungen lassen sich folgendermaßen kombinieren,

$$\alpha = \frac{5.50 - 10e^{\nu}}{1 - e^{\nu}} = \frac{3.25 - 10e^{2\nu}}{1 - e^{2\nu}}$$

oder

$$\frac{20e^{\nu} - 11}{2(e^{\nu} - 1)} = \left(\frac{-2}{-2}\right) \cdot \frac{5.50 - 10e^{\nu}}{1 - e^{\nu}} = \frac{3.25 - 10e^{2\nu}}{1 - e^{2\nu}} \cdot \left(\frac{-4}{-4}\right) = \frac{40e^{2\nu} - 13}{4(e^{2\nu} - 1)}$$

Mit $x = e^{\nu}$ und daher $x^2 = e^{2\nu}$ folgt

$$\alpha = \frac{20x - 11}{2(x - 1)} = \frac{40x^2 - 13}{4(x^2 - 1)}$$

oder

$$0 = \frac{20x - 11}{2(x - 1)} - \frac{40x^2 - 13}{4(x^2 - 1)} = \frac{18x - 9}{4(x^2 - 1)}$$

(c) Aus der letzten Gleichung folgt die Lösung

$$x = 1/2 \quad \text{oder mit } e^{\nu} = x, \quad \nu = \ln(x) = \ln(2^{-1}) = -\ln(2)$$

Aus der obigen Beziehung zwischen α und $x = 1/2$ folgt

$$\alpha = \frac{20x - 11}{2(x - 1)} = 1$$

Aus der obigen Bedingung zwischen β und $\alpha = 1$ folgt

$$\beta = 10 - \alpha = 9$$

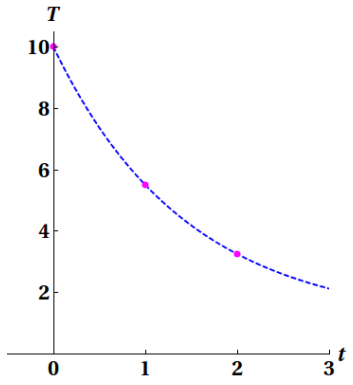
(d) Die exponentielle Funktion

$$T(t) = \alpha + \beta e^{\nu t} = 1 + 9e^{-\ln(2)t} = 1 + 9e^{\ln(2^{-t})} = 1 + 9 \cdot 2^{-t}$$

erfüllt

$$\begin{array}{llll} T(t_1) = T(0) & = 1 + 9 \cdot 2^{-0} & = 10 & = T_1 \\ T(t_2) = T(1) & = 1 + 9 \cdot 2^{-1} & = 5.5 & = T_2 \\ T(t_3) = T(2) & = 1 + 9 \cdot 2^{-2} & = 3.25 & = T_3 \end{array}$$

und daher sind die Interpolationsbedingungen $T(t_i) = T_i$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt. Grafisch dargestellt werden die exponentielle Funktion $T(t) = 1 + 9 \cdot 2^{-t}$ blau und die Daten $\{(t_i, T_i)\}_{i=1}^{3}$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



8. Abschätzung von Exponentiellen Funktionen durch Regression

   (a) Die rohen und transformierten Daten sind

i	1	2	3	4	5
s_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
v_i	10.0	7.1	5.0	3.6	2.5
$x_i = s_i$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$y_i = \ln(v_i)$	2.30	1.96	1.61	1.28	0.916

   (b) Wie im Kapitel 13 gezeigt, wird die Summe der Quadrate

$$E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{4} [(a_0 + a_1 x) - y_i]^2$$

   global minimiert in

$$a_1^* = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \quad a_0^* = \overline{y} - a_1^* \overline{x}$$

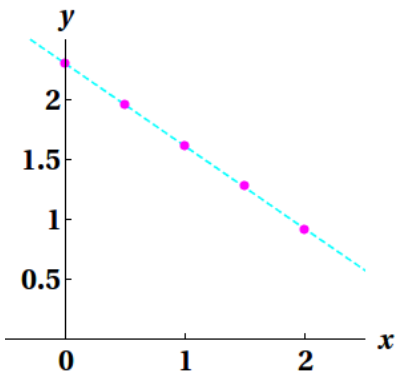
   Anhand der (x, y)-Daten sind die gemittelten Werte gegeben durch

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= (0.0 + 0.5 + 1.0 + 1.5 + 2.0)/5 = 1.0 \\
\overline{y} &= (2.30 + 1.96 + 1.61 + 1.28 + 0.916)/5 = 1.614 \\
\overline{x^2} &= (0.0^2 + 0.5^2 + 1.0^2 + 1.5^2 + 2.0^2)/5 = 1.5 \\
\overline{xy} &= (0.0 \cdot 2.30 + 0.5 \cdot 1.96 + 1.0 \cdot 1.61 + 1.5 \cdot 1.28 + 2.0 \cdot 0.916)/5 = 1.269
\end{aligned}$$

   und die für $E(a_0, a_1)$ minimierenden Parameter sind

$$a_1^* = \frac{1.269 - 1.0 \cdot 1.614}{1.5 - 1.0^2} = -0.69, \quad a_0^* = 1.615 - a_1^* \cdot 1.0 = 2.3$$

   Grafisch dargestellt werden die Gerade $y(x) = a_0^* + a_1^* x$ zyanfarbig und die (x, y)-Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{5}$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



Die y-Werte der Daten und der abgeschätzen Gerade sind

i	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$y_i = \ln(v_i)$	2.30	1.96	1.61	1.28	0.916
$y(x_i)$	2.304	1.959	1.614	1.269	0.9235

Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen $\{|y(x_i) - y_i|\}_{i=1}^5 = \{0.0016, 0.0011, 0.0044, 0.0122, 0.00723\}$ alle klein.

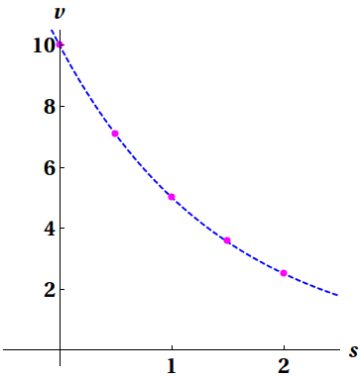
(c) Mit $a_0^* = \ln(c^*)$, $a_1^* = \phi^*$, $y = \ln(v)$, $x = s$ und

$$\ln(v) = y = a_0^* + a_1^* x = \ln(c^*) + \phi^* s, \quad c^* = e^{a_0^*} = 10.0, \quad \phi^* = a_1^* = -0.69$$

ergibt sich die Exponentialfunktion $v(s) = c^* e^{k^* s}$ durch die exponentielle Transformation

$$v = \exp(y) = \exp(a_0^* + a_1^* x) = e^{ln(c^*) + \phi^* s} = e^{\ln(c^*)} e^{\phi^* s} = c^* e^{\phi^* s}.$$

Grafisch dargestellt werden die Exponentialfunktion $v(s) = c^* e^{\phi^* s}$ blau und die (s, v)-Daten $\{(s_i, v_i)\}_{i=1}^5$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



Die v-Werte der Daten und der abgeschätzen Exponentialfunktion sind

i	1	2	3	4	5
s_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
v_i	10.0	7.1	5.0	3.6	2.5
$v(s_i)$	10.0	7.0822	5.01576	3.55226	2.51579

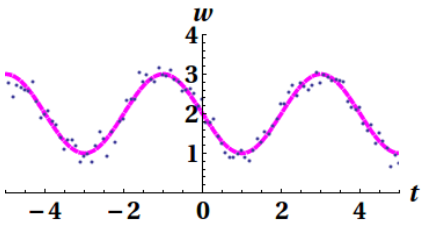
Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen $\{|v(s_i) - v_i|\}_{i=1}^5 = \{0.0, 0.018, 0.016, 0.048, 0.016\}$ alle klein.

9. Abschätzung von Winkelfunktionen

Um die Parameter $\{a, b, c, \omega\}$ der Winkelfunktion

$$w(t) = c + a \sin[2\pi\omega(t - b)]$$

von der grafisch dargestellten Daten zu bestimmen



merkt man zuerst, die Daten schwanken zwischen $w = 1$ und $w = 3$ mit Mittelwert $w = 2$. Daher folgen

$$\begin{aligned} c &= \text{Mittwert der } w\text{-Werte} = 2 \\ a &= \text{Abweichung der } w\text{-Werte von } c\text{, Amplitude } = 1 \end{aligned}$$

Weiters merkt man benachbarte Hügelgipfel bei $t = -1$ und $t = 3$. Daher ist die Periode gegeben durch $3 - (-1) = 4$, und

$$\begin{aligned} 1/\omega &= \text{Periode} = 4 \text{ oder} \\ \omega &= 1/4 \end{aligned}$$

Schließlich merkt man einen Wendepunkt z.B. bei $t = -2$ (auch bei $t = +2$), in dem die Daten steigend sind. Daher folgt

$$b = t\text{-Stelle bei einem steigenden Wendepunkt } = -2$$

Zusammengefasst ist die Abschätzung der Winkelfunktion gegeben durch

$$w(t) = 1 + \sin[2\pi(t + 2)/4]$$

16 Anhang: Partielle Ableitungen von Funktionen mehrerer Variablen

Beispiel: Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ und ein Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ mit Komponenten

$$\boldsymbol{v} = \{v_i\}_{i=1}^n = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ mit Komponenten

$$\boldsymbol{x} = \{x_i\}_{i=1}^n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

sei $f(\boldsymbol{x})$ definiert durch das Skalarprodukt (eine lineare Form)

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{x} = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots v_n x_n, \quad D = \mathbb{R}^n, \quad B \subset \mathbb{R}$$

Die partielle Ableitung von $f(\boldsymbol{x})$ nach x_k mit $1 \leq k \leq n$ ist

$$\partial_{x_k} f(\boldsymbol{x}) = \partial_{x_k}(v_1 x_1 + \cdots + \ v_k x_k \ + \cdots + v_n x_n) = v_k$$

und daher ist der Vektor dieser partiellen Ableitungen (der *Gradient* $\nabla f(x)$ von $f(\boldsymbol{x})$) gegeben durch

$$\nabla f(x) = \ \{\partial_{x_k} f(\boldsymbol{x})\}_{k=1}^n = \{v_k\}_{k=1}^n = \boldsymbol{v}$$

Beispiel: Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Komponenten

$$M = \{m_{i,j}\}_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{bmatrix}$$

Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ mit Komponenten

$$\boldsymbol{x} = \{x_i\}_{i=1}^n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

sei $f(\boldsymbol{x})$ definiert durch das Vektor-Matrix-Vektor Produkt (eine quadratische Form)

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top M \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot (M\boldsymbol{x}) &= x_1 (M\boldsymbol{x})_1 + x_2 (M\boldsymbol{x})_2 + \cdots + x_n (M\boldsymbol{x})_n \\ &= x_1 (m_{1,1} x_1 + m_{1,2} x_2 + \cdots + m_{1,n} x_n) \\ &+ x_2 (m_{2,1} x_1 + m_{2,2} x_2 + \cdots + m_{2,n} x_n) \\ &\ \ \vdots \\ &+ x_n (m_{n,1} x_1 + m_{n,2} x_2 + \cdots + m_{n,n} x_n), \quad D = \mathbb{R}^n, \quad B \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die partielle Ableitung von $f(\boldsymbol{x})$ nach x_k mit $1 \leq k \leq n$ ist

$$\begin{aligned}
\partial_{x_k} f(\boldsymbol{x}) &= \partial_{x_k}\ x_1(m_{1,1}x_1 + \cdots + \ m_{1,k}x_k\ + \cdots + m_{1,n}x_n) \\
&\quad \vdots \\
&+ \partial_{x_k}\, x_k\,(m_{k,1}x_1 + \cdots + \ m_{k,k}x_k\ + \cdots + m_{k,n}x_n) \\
&\quad \vdots \\
&+ \partial_{x_k}\ x_n(m_{n,1}x_1 + \cdots + \ m_{n,k}x_k\ + \cdots + m_{n,n}x_n) \\
&= x_1 m_{1,k} \\
&\quad \vdots \\
&+ (m_{k,1}x_1 + \cdots + m_{k,n}x_n) + x_k m_{k,k} \\
&\quad \vdots \\
&+ x_n m_{n,k} \\
&= (m_{k,1}x_1 + \cdots + m_{k,n}x_n) \\
&+ (m_{1,k}x_1 + \cdots + m_{n,k}x_n)
\end{aligned}$$

und daher ist der Vektor dieser partiellen Ableitungen (der *Gradient* $\nabla f(\boldsymbol{x})$ von $f(\boldsymbol{x})$) gegeben durch

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \ \{\partial_{x_k} f(\boldsymbol{x})\}_{k=1}^n = \left\{ \begin{array}{c} (m_{k,1}x_1 + \cdots + m_{k,n}x_n) \\ +(m_{1,k}x_1 + \cdots + m_{n,k}x_n) \end{array} \right\}_{k=1}^n = (M + M^\top)\boldsymbol{x}$$

Beispiel: Gegeben seien $m, n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Komponenten

$$\boldsymbol{b} = \{b_i\}_{i=1}^m = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A = \{a_{i,j}\}_{i=1,m}^{j=1,n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \\ a_{m,1} & a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ mit Komponenten

$$\boldsymbol{x} = \{x_i\}_{i=1}^n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

sei $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ definiert durch die Euklidischen Norm

$$f(\boldsymbol{x}) = \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$$

Wegen der Beziehung zwischen der Euklidischen Norm und dem Skalarprodukt,

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}$$

kann $f(\boldsymbol{x})$ so umgeschrieben werden,

$$f(\boldsymbol{x}) = \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 = (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})^\top (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$

Wegen der Eigenschaft der Transponierten eines Produkts,

$$(A\boldsymbol{x})^\top = \boldsymbol{x}^\top A^\top$$

folgt

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}^\top A^\top - \boldsymbol{b}^\top)(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$

und wenn ausmultipliziert,

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top A^\top A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^\top A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{b}$$

Da $\boldsymbol{x}^\top A^\top \boldsymbol{b}$ ein Skalar ist, ist sie gleich ihre Transponierte. Wegen der obigen Eigenschaft der Transponierten eines Produkts gilt

$$\boldsymbol{x}^\top A^\top \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{x}^\top A^\top \boldsymbol{b})^\top = \boldsymbol{b}^\top A\boldsymbol{x} = (A^\top \boldsymbol{b})^\top \boldsymbol{x}$$

Daher kann $f(\boldsymbol{x})$ schließlich folgendermaßen umgeschrieben werden,

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top (A^\top A)\boldsymbol{x} - 2(A^\top \boldsymbol{b})^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{b}$$

Der erste Term in $f(\boldsymbol{x})$ hat die Form $\boldsymbol{x}^\top M\boldsymbol{x}$ für eine Matrix $M = A^\top A$, und die entsprechenden partiellen Ableitungen sind durch das letzte Beispiel gegeben,

$$\begin{aligned} &\{\partial_{x_k} \boldsymbol{x}^\top (A^\top A)\boldsymbol{x}\}_{k=1}^n \\ &= \{\partial_{x_k} \boldsymbol{x}^\top M\boldsymbol{x}\}_{k=1}^n = (M + M^\top)\boldsymbol{x} \\ &= ((A^\top A) + (A^\top A)^\top)\boldsymbol{x} = ((A^\top A) + (A^\top A))\boldsymbol{x} = 2A^\top A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

wobei die Eigenschaft $(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$ der Transponierten eines Produkts verwendet worden ist. Der zweite Term in $f(\boldsymbol{x})$ hat die Form $-2\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{x}$ für einen Vektor $\boldsymbol{v} = A^\top \boldsymbol{b}$, und die entsprechenden partiellen Ableitungen sind durch das vorletzte Beispiel gegeben

$$\{\partial_{x_k} (A^\top \boldsymbol{b})^\top \boldsymbol{x}\}_{k=1}^n = \{\partial_{x_k} \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{x}\}_{k=1}^n = \boldsymbol{v} = A^\top \boldsymbol{b}$$

Der dritte Term in $f(\boldsymbol{x})$ ist ein Skalar $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{b}$, der von $\boldsymbol{x}$ nicht abhängt, und daher sind die partiellen Ableitungen dieses Terms Null. Zusammengefasst ist der Vektor der partiellen Ableitungen (der *Gradient* $\nabla f(\boldsymbol{x})$ von $f(\boldsymbol{x})$) gegeben durch

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \{\partial_{x_k} f(\boldsymbol{x})\}_{k=1}^n = 2A^\top A\boldsymbol{x} - 2A^\top \boldsymbol{b}$$

Beispiel: Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Komponenten

$$M = \{m_{i,j}\}_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{bmatrix}$$

Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ mit Komponenten

$$\boldsymbol{x} = \{x_i\}_{i=1}^n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

sei $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ definiert durch das Matrix-Vektor Produkt

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = M\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} m_{1,1}x_1 + m_{1,2}x_2 + \cdots + m_{1,n}x_n \\ m_{2,1}x_1 + m_{2,2}x_2 + \cdots + m_{2,n}x_n \\ \vdots \\ m_{n,1}x_1 + m_{n,2}x_2 + \cdots + m_{n,n}x_n \end{bmatrix} \quad D = \mathbb{R}^n, \quad B \subset \mathbb{R}^n$$

Die partielle Ableitung von $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ nach x_k mit $1 \leq k \leq n$ ist

$$\partial_{x_k} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \partial_{x_k} \begin{bmatrix} m_{1,1}x_1 + \cdots + m_{1,k}x_k + \cdots + m_{1,n}x_n \\ m_{2,1}x_1 + \cdots + m_{2,k}x_k + \cdots + m_{2,n}x_n \\ \vdots \\ m_{n,1}x_1 + \cdots + m_{n,k}x_k + \cdots + m_{n,n}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,k} \\ m_{2,k} \\ \vdots \\ m_{n,k} \end{bmatrix}$$

und daher ist die Matrix dieser partiellen Ableitungen (die Jakobi-Matrix $\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ von $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$) gegeben durch

$$\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \{\partial_{x_k} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\}_{k=1}^n = \left\{ \begin{bmatrix} m_{1,k} \\ m_{2,k} \\ \vdots \\ m_{n,k} \end{bmatrix} \right\}_{k=1}^n = M$$

Beispiel: Gegeben seien $m, n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Komponenten

$$\boldsymbol{b} = \{b_i\}_{i=1}^m = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A = \{a_{i,j}\}_{i=1,m}^{j=1,n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ mit Komponenten

$$\boldsymbol{x} = \{x_i\}_{i=1}^n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

sei $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ definiert durch die Euklidischen Norm

$$f(\boldsymbol{x}) = \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$$

Wie im vorletzten Beispiel gezeigt, ist der Vektor der partiellen Ableitungen von $f(\boldsymbol{x})$ gegeben durch

$$\{\partial_{x_k} f(\boldsymbol{x})\}_{k=1}^n = 2A^\top A\boldsymbol{x} - 2A^\top \boldsymbol{b}$$

Der zweite Term ist ein Vektor, der von $\boldsymbol{x}$ nicht abhängt, und daher sind die partiellen Ableitungen dieses Terms Null. Der erste Term hat die Form $2M\boldsymbol{x}$ für eine Matrix $M = A^\top A$, und die entsprechenden partiellen Ableitungen sind durch das letzte Beispiel gegeben

$$\{\partial_{x_k} A^\top A\boldsymbol{x}\}_{k=1}^n = \{\partial_{x_k} M\boldsymbol{x}\}_{k=1}^n = M = A^\top A$$

Daher ist die Matrix der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung (die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ von $f(\boldsymbol{x})$) gegeben durch

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \{\partial_{x_l} \partial_{x_k} f(\boldsymbol{x})\}_{k,l=1}^n = 2M = 2A^\top A$$