

Aufgabe Nr.:	1	2	3	4	Summe
Punktzahl:	25	25	25	25	100
Davon erreicht:					

Markieren Sie Ihre Gruppe:

Cauchy	Euler	Riemann	Newton
--------	-------	---------	--------

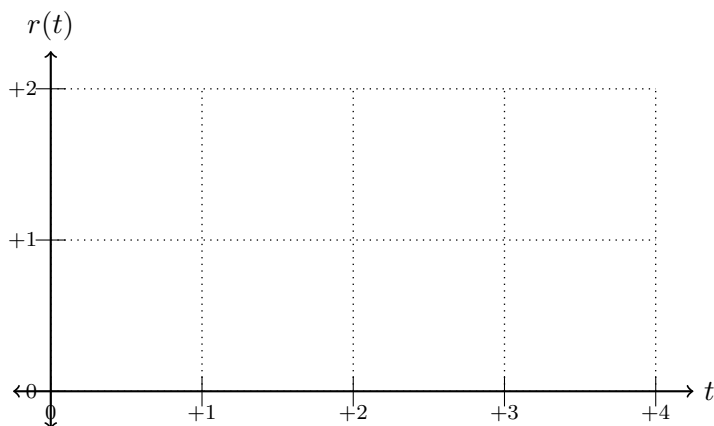
Name:

Matrikelnummer:

1. (25 Punkte) Im Lauf der Zeit t erfüllt die Konzentration $r(t)$ eines Reaktants in einer chemischen Reaktion zweiter Ordnung,

$$r'(t) = -r(t)^2, \quad r(0) = 1.$$

- (a) Finden Sie die Konzentration $r(t)$.
- (b) Stellen Sie $r(t)$ grafisch dar.
- (c) Bestimmen Sie das Fließgleichgewicht $r^* = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)$.
- (d) Zeigen Sie, $r(t)$ nähert sich dem Fließgleichgewicht monoton an.
- (e) Berechnen Sie die Zeit τ , bei der die Konzentration 90% des Weges vom Anfangswert bis zum Fließgleichgewicht erreicht.
- (f) Erklären Sie, warum $|r(t) - r^*| < 1/10$ für $t > \tau$ gilt.



2. (25 Punkte) Gegeben seien die Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^3$,

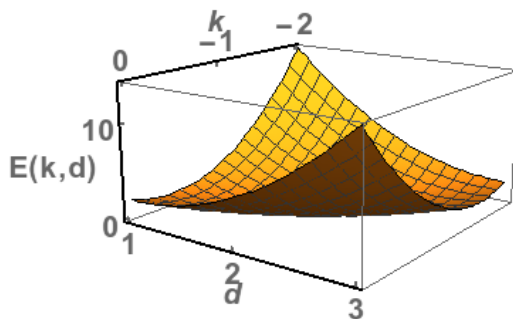
$$(0, 2), \quad (1, 1) \quad \text{und} \quad (2, 0).$$

Man bestimme die Gerade $y = kx + d$, die die Summe der Quadrate minimiert:

$$E(k, d) = \sum_{i=1}^3 [(kx_i + d) - y_i]^2 = [(k \cdot 0 + d) - 2]^2 + [(k \cdot 1 + d) - 1]^2 + [(k \cdot 2 + d) - 0]^2$$

Die grafische Darstellung der Funktion $E(k, d)$ steht unten.

- (a) Zeigen Sie, $E(k, d)$ besitzt einen einzigen kritischen Punkt.
- (b) Zeigen Sie, $E(k, d)$ ist global konvex, und daher wird die Funktion in dem einzigen kritischen Punkt global minimiert.
- (c) Geben Sie die Formel für die Gerade an, die die Summe der Quadrate minimiert.



3. (25 Punkte) Bestimmen Sie den minimalen Abstand zwischen dem Punkt $P = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ und der Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Finden Sie einen Punkt $Q = (x_0, y_0, z_0)$ in der Ebene, in dem dieser minimale Abstand angenommen wird.

4. (25 Punkte) Sei p die jährlichen Gesundheitskosten pro Einwohner eines Landes in Vielfachen von $\text{€}10^3$. Sei x der Netto-Flächeninhalt der Wälder in Vielfachen von 10^6 Hektar, der jährlich vom Land gegen Energieverbrauch geschützt wird. Gegeben seien die Daten $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^3$,

$$(0, 1), \quad (1, 1) \quad \text{und} \quad (2, 3).$$

Das quadratische Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ soll bestimmt werden, das die Interpolationsbedingungen erfüllt

$$p(x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Aus der ersten Bedingung $p(0) = 1$ folgt $a_0 = 1$.

- (a) Bestimmen Sie a_1 und a_2 .
- (b) Mit den berechneten Parametern $\{a_0, a_1, a_2\}$ bestätigen Sie, dass die Interpolationsbedingungen erfüllt werden.
- (c) Bei welchem geschützten Flächeninhalt der Wälder werden Gesundheitskosten minimiert?