Aufgabe Nr.:	1	2	3	4	**Summe**
Punktzahl:	25	25	25	25	100
Davon erreicht:					

Markieren Sie Ihre Gruppe:

Cauchy	Euler	Riemann	Newton

Name: ....

Matrikelnummer: ....

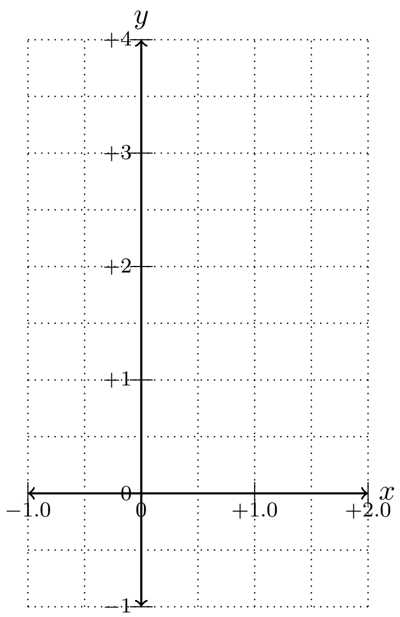
1. (25 Punkte) Gegeben seien die Funktionen

$$y_1(x) = |x|, \quad y_2(x) = |x-1|, \quad b(x) = 2y_1(x) + y_2(x) \quad \text{und} \quad p(x) = 2y_1(x)^2 + y_2(x)^2.$$

   (a) Finden Sie die Scheitel der Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$.

   (b) Finden Sie den Scheitel der Funktion $p(x)$.

   (c) Stellen Sie die Funktionen $b(x)$ und $p(x)$ gemeinsam grafisch dar.



2. (25 Punkte) Gegeben sei das kubische Polynom $p(x) = 2 - 2x - x^2 + x^3$.

   (a) Eine Nullstelle x_3 von $p(x)$ erfüllt $x_3 \in \{-1, +1\}$. Bestimmen Sie x_3.

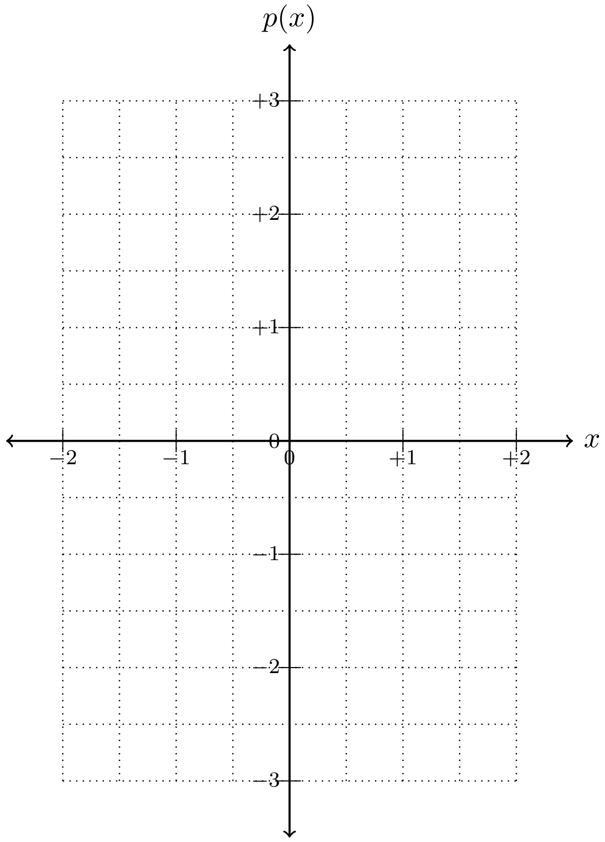
   (b) Verwenden Sie Polynomdivision, um ein quadratisches Polynom $q(x)$ zu bestimmen, wobei $p(x) = (x - x_3)q(x)$ gilt.

   (c) Anhand der Auswertungen $q(0) < 0$ und $q(2) > 2$ führen Sie das Bisektionsverfahren dreimal durch, um eine Nullstelle $x_2 \in [0, 2]$ von $q(x)$ annährungsweise zu bestimmen.

   (d) Zeigen Sie, die verbliebene Nullstelle von $q(x)$ ist $x_1 = -x_2$.

   (e) Bestimmen Sie die Intervalle, in denen $p(x)$ positiv bzw. negativ ist.

   (f) Stellen Sie $p(x)$ grafisch dar.



3. (25 Punkte) Der Wert $\sin(x)$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ wohl definiert, aber der Definitionsbereich muss eingeschränkt werden, um eine Umkehrfunktion zu definieren.

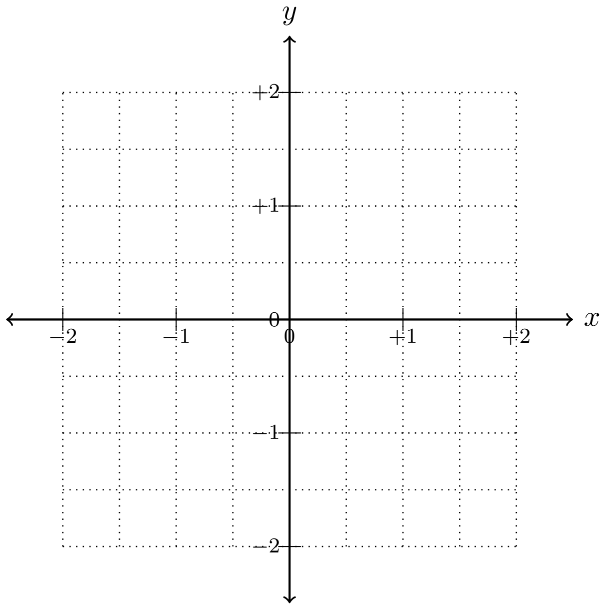
   (a) Bestimmen Sie einen Definitionsbereich D_y und einen Bildbereich B_y für die Funktion $y(x) = \sin(x)$, sodass $y(x)$ eine Umkehrfunktion $y^{-1}(x)$ besitzt.

   (b) Stellen Sie die Umkehrfunktion $y^{-1}(x)$ gemeinsam mit $y(x)$ grafisch dar.

   (c) Aus der grafischen Darstellung der Umkehrfunktion lesen Sie den Definitionsbereich $D_{y^{-1}}$ und den Bildbereich $B_{y^{-1}}$ ab.

   (d) Erklären Sie die Beziehung zwischen D_y, B_y, $D_{y^{-1}}$ und $B_{y^{-1}}$.

   (e) Geben Sie Formeln für $y(y^{-1}(x))$ und $y^{-1}(y(x))$ an, und deuten Sie an, für welche Werte von x diese Formeln gelten.



4. (25 Punkte) Bestimmen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^{10} - 1^{10}}{(1+h) - 1}$

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} i$ wobei $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(c) Ein Schnecke möchte von der Mitte eines Gartens bis zur Mitte des nächsten Gartens kriechen. Wegen steigender Müdigkeit schafft sie jede Stunde nur die Hälfte des verbliebenen Weges. Nach 4 Stunden ist sie 15 Meter gekrochen. Was ist die Gesamtlänge des Weges zum Ziel?