Gewöhnliche Differentialgleichungen

a.o.Univ.Prof. Mag.Dr. Stephen Keeling
http://math.uni-graz.at/keeling/

Literatur:

Ordinary Differential Equations
von G. Birkhoff und G.-C. Rota

Unterlagen:
http://math.uni-graz.at/keeling/teaching.html

Inhaltsverzeichnis I

Einführung
- Definitionen und Klassifikationen
- Herkunft der Differentialgleichungen
- Ziele der Untersuchung von Differentialgleichungen

Differentialgleichungen erster Ordnung
- Integrale und Integral-Kurven
- Trennung der Variablen
- Exakte Differentialgleichungen
- Integrationsfaktoren
- Inhomogenene Lineare Differentialgleichungen
- Lineare Bruchgleichung
- Grafische Lösung
- Anfangswertprobleme
- Eindeutigkeit und Stetigkeit
- Vergleichssätze

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung
- Prinzip des Superposierens
- Nebenbedingungen
- Riccati Gleichung
- Konstante Koeffizienten
- Linear Unabhängige Lösungen
- Gleichgewicht
- Masse-Feder-System
- Eindeutigkeit
- Lösungsbasis einer Differentialgleichung
- Wronskian
- Trennungssatz von Sturm
- Greensche Funktionen für Anfangswertprobleme
- Variation der Konstanten
- Greensche Funktionen für Randwertprobleme
- Dirac Delta Funktion
- Greensche Funktionen und die Dirac Delta Funktion
- Variationelle Rechnungen

Inhaltsverzeichnis II

Lineare DG mit Konstanten Koeffizienten
- Reele und Komplexe Lösungen
- Linear Unabhängige Lösungen
- Lösungsbasis
- Stabilität
- Übertragungsfunktion
- Resonanzfrequenzen
- Fourier-Reihe
- Periodische Eingaben
- Fourier-Transformierte
- Zeitbegrenzte Eingaben
- Laplace-Transformierte
- Faltung
- Kausale Eingaben
- Greensche Funktionen

Potenzreihenansatz
- Methode der Unbestimmten Koeffizienten
- Legendre Differentialgleichung
- Hermite Differentialgleichung
- Differentialgleichungen mit Singulären Punkten
- Methode von Frobenius
- Methode der Reduktion der Ordnung
- Bessel Differentialgleichung
- Bessel Funktionen erster Gattung
- Bessel Funktionen zweiter Gattung

Autonome Systeme
- Integral-Kurven
- Räuber-Beute Modell
- Potenzial Landschaft
- Poincaré Phasenebene
- Oszilatoren und Pendel
- Lineare Systeme mit Konstanten Koeffizienten
- Matrixexponential

Inhaltsverzeichnis III

Lösungsbasis
Wärmegleichung
Äquivalente Systeme
Stabilität
Fokalpunkte, Knotenpunkte und Sattelpunkte
Methode von Lyapunov
Ungleichung von Gronwall
Grenzzyklen

Existenz und Eindeutigkeit
Lipschitz Bedingung
Eindeutigkeit
Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten
Stetige Abhängigkeit von Parametern
Äquivalente Integralgleichung
Existenz
Sukzessive Approximation
Lokale Existenz
Satz von Arzelà-Ascoli
Satz von Peano

Sturm-Liouville Systeme
Eigenfunktionen und Eigenwerte
Orthogonalität der Eigenfunktionen
Sturm-Liouville Reihe
Singuläre Sturm-Liouville Systeme
Prüfer Substitution
Sturm Vergleichssatz
Sturm Oszillationssatz
Folge der Eigenfunktionen
Inhomogene Randwertprobleme
Greensche Funktionen für Randwertprobleme
Approximation im quadratischen Mittel
Vollständigkeit einer Folge
Vollständigkeit der Eigenfunktionen

Definitionen und Klassifikationen

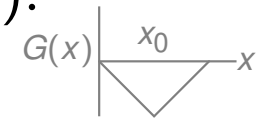
- Eine *Differentialgleichung* ist eine Gleichung, die eine Beziehung zwischen Ableitungen einer unbekannten Funktion und bekannten Größen und Funktionen darstellt, z.B.
$$\rho c \partial_t T = \partial_x(\lambda \partial_x T), \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0$$
- In einer *partiellen Differentialgleichung* (PDG) hängt die unbekannte Funktion von zwei oder mehr unabhängigen Variablen ab.
- In einer *gewöhnlichen Differentialgleichung* (GDG, hier einfach DG) hängt die unbekannte Funktion von nur einer unabhängigen Variable ab.
- Die *Ordnung* einer DG ist das größte $n \in \mathbb{N}$, wobei die $n$te Ableitung der unbekannten Funktion in der Gleichung erscheint. Z.B. oben gilt $n = 2$.
- Ein *System* von DG'en besteht aus mehreren Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Funktionen einer unabhängigen Variable, z.B.
$$x'(t) = [\alpha - \beta y(t)]x(t), \quad y'(t) = [\gamma x(t) - \delta]y(t)$$

Definitionen und Klassifikationen

- Eine DG *n*ter Ordnung kann immer als System von DG'en erster Ordnung umgeschrieben werden, z.B.
$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = f(x)$$
läßt sich so umschreiben:
$$\boldsymbol{u}'(x) = A\boldsymbol{u}(x) + \boldsymbol{f}(x)$$
wobei
$$\boldsymbol{u}(x) = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$
- Eine *quasilineare* DG erster Ordnung hat die Form
$$P(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$
wobei $P(\xi, \eta, \zeta)$ ein lineares Polynom in ζ ist. Z.B.
$$x + yy' = 0$$
- Eine *normale* DG erster Ordnung hat die Form
$$y' = F(x, y)$$
wobei y' isoliert steht. Z.B. die obige DG umgeschrieben,
$$y' = -x/y$$
- Eine durch $x^2 + y(x)^2 = k$ implizit definierte Funktion $y(x)$ erfüllt diese DG'en für $x \in (-\sqrt{k}, \sqrt{k})$.

Definitionen und Klassifikationen

- Eine *klassische Lösung* einer DG $n$ter Ordnung ist eine Funktion, die die DG erfüllt und n-Mal differenzierbar in ihrem Definitionsbereich ist, z.B.
$$y(x) = \sqrt{1-x^2} \text{ löst } x + yy' = 0 \text{ für } x \in (-1,1).$$
- Die (in x_0 nicht differenzierbare) Funktion



$$G(x) = \begin{cases} (x_0-1)x, & 0 \le x \le x_0 \\ (x-1)x_0, & x_0 \le x \le 1 \end{cases} \qquad G'(x) = \begin{cases} (x_0-1), & 0 \le x < x_0 \\ x_0, & x_0 < x \le 1 \end{cases}$$

erfüllt

$$-\int_0^1 G'(x)\phi'(x)dx = (1-x_0)\int_0^{x_0} \phi'(x)dx - x_0\int_{x_0}^1 \phi'(x)dx$$
$$= (1-x_0)[\phi(x_0) - \phi(0)] - x_0[\phi(1) - \phi(x_0)] = \phi(x_0)$$
$$\forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty([0,1])$$

oder formell mit $\int_0^1 \delta(x-x_0)\phi(x)dx = \phi(x_0)$,

$$\int_0^1 G''(x)\phi(x)dx = \int_0^1 \delta(x-x_0)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty([0,1])$$

d.h. G ist eine *schwache Lösung* des Randwertproblems,

$$G''(x) = \delta(x-x_0), \quad G(0) = G(1) = 0.$$

Definitionen und Klassifikationen

- Die normale DG $y'(x) = g(x)$ hat die *partikuläre* Lösung
$$y_{\mathrm{p}}(x) = \int_a^x g(t)dt$$
für ein a im Definitionsbereich von g.
Jede andere Lösungskurve wird durch eine senkrechte Translation gegeben,
$$y_{\mathrm{a}}(x) = \int_a^x g(t)dt + k, \quad k \in \mathbb{R}$$
Also ist y_{a} (eine Menge, $k \in \mathbb{R}$) die allgemeine Lösung. Z.B.
$$\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{erf}(x) + k \\ \mathrm{Si}(x) + k \end{array} \right\} \quad \text{lösen allgemein} \quad \left\{ \begin{array}{c} y' = 2\mathrm{e}^{-x^2}/\sqrt{\pi} \\ xy' = \sin(x) \end{array} \right\}$$
- Ähnlich mit einer partikulären Lösung $y_{\mathrm{p}}(x)$ der DG $y' = f(y)$ ist eine waagerechte Translation $y_{\mathrm{p}}(x-k)$ auch eine Lösung. Z.B. durch Partialbruchzerlegung
$$y' = y^2 - 1, \quad 1 = \frac{y'}{(y-1)(y+1)} = y'\left[\frac{1/2}{y-1} - \frac{1/2}{y+1}\right]$$
$$x - k = \int dx = \frac{1}{2}\int y'\left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right]dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|$$
Lösungen: $y(x) = \tanh(k-x), \coth(k-x)$ aber auch $y(x) = \pm 1$.

Herkunft der Differentialgleichungen

- Differentialgleichungen entstehen natürlich durch *Modellierung.*
- Exponentielle Zunahme (Fertilität $\alpha > 0$),
$$x'(t) = \alpha x(t), \quad x(t) = x(t_0)\exp(\alpha(t - t_0))$$
oder exponentielle Abnahme (Mortalität $\alpha < 0$).
- Logistisches Wachstum mit Zeitskala τ und Kapazität K,
$$P'(t) = \frac{P(t)}{\tau}\left[1 - \frac{P(t)}{K}\right], \quad P(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{P(t_0)} - 1)\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}$$
- Pendelschwingungen mit Schwerebeschleunigung g, Pendellänge ℓ und kleinen Schwingungen $|\theta_0| \ll 1$,
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0 \overset{\sin(\theta)\approx\theta}{\longrightarrow} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0, \quad \theta(t) = \theta_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)$$
- Räuber-Beute mit Pflanzenfresser x und Raubtier y,
$$x'(t) = [\alpha - \beta y(t)]x(t), \quad y'(t) = [\gamma x(t) - \delta]y(t), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$$
$$\delta \ln[x(t)] - \gamma x(t) + \alpha \ln[y(t)] - \beta y(t) = k$$

Herkunft der Differentialgleichungen

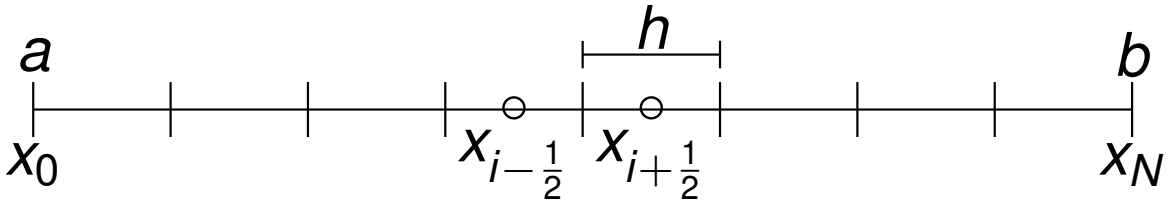
- Differentialgleichungen entstehen variationnell durch *Minimierung eines Funktionals.*
- Man hat Daten $r/m \approx u$ in (a, b), und u soll durch Minimierung dieses Funktionals rekonstruiert werden,
$$J(u) = \int_a^b [|mu - r|^2 + p|u'|^2]dx$$
- Wenn $J(u) = \min$ gilt, muss $\delta J/\delta u(u; v) = 0$ für alle Störungen $v \in \mathcal{C}^\infty(a, b)$ gelten,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta J}{\delta u}(u; v) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(u + \epsilon v) - J(u)}{\epsilon} \\
&= 2 \int_a^b [(mu - r)mv + pu'v']dx \\
0 &= 2 \int_a^b [(mu - r)m - (pu')']vdx + 2pu'v|_a^b, \quad \forall v \in C^\infty(a, b)
\end{aligned}$$

- Notwendigerweise löst u das *Sturm-Liouville* Randwertproblem,
$$-(pu')' + qu = f \text{ in } (a, b) \quad u' = 0 \text{ in } \{a, b\}$$
wobei $q = m^2$ und $f = mr$.

Herkunft der Differentialgleichungen

- Differentialgleichungen entstehen numerisch durch
  Diskretisierung einer PDG.
- Für die Wärmegleichung, $T|_{t=0} = T^0$, $\alpha = \lambda/(\rho c)$,
  $\partial_t T = \alpha \partial_x^2 T$ in $(a,b) \times \{t > 0\}$, $\quad \partial_x T = 0$ auf $\{a,b\} \times \{t > 0\}$
  kann $\partial_x^2 T$ durch finite Differenzen approximiert werden.
- Das Gitter: $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, N$, $h = (b-a)/N$,



- Mit der Notation $v_i \approx v(x_i)$, $v_{i\pm\frac{1}{2}} \approx v(x_{i\pm\frac{1}{2}})$, t fixiert,

$$\partial_x(\partial_x T)_i \approx \frac{(\partial_x T)_{i+\frac{1}{2}} - (\partial_x T)_{i-\frac{1}{2}}}{h} \approx \frac{1}{h}\left[\frac{T_{i+1} - T_i}{h} - \frac{T_i - T_{i-1}}{h}\right]$$

  wobei $T_0 - T_{-1} := 0$, $T_{N+1} - T_N := 0$.
- Mit $\{T_i\}_{i=0}^N = \boldsymbol{T}$, $\{T_i^0\}_{i=0}^N = \boldsymbol{T}^0$ und $\alpha\{\partial_x(\partial_x T)_i\}_{i=0}^N \approx A\boldsymbol{T}$,
  ergibt sich das System von DG'en,

$$\boldsymbol{T}' = A\boldsymbol{T}, \quad \boldsymbol{T}(t) = \exp[At]\boldsymbol{T}^0$$

Ziele der Untersuchung von Differentialgleichungen

Zwecke der Modellierung

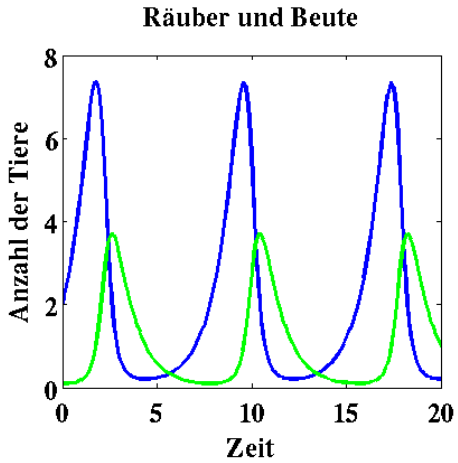
- Vor allem die motivierende Fragestellung zu beantworten.
  - Zeitdauer bis die Haustemperatur 90% ihres Wegs zur Aussentemperatur sinkt, nachdem die Heizung ausgeschaltet wird?
- Das modellierte System besser zu verstehen.
  - Abhängigkeit der Zeitdauer von Parametern? Effekt der Dämmung? Hausoberfläche?
- Systemparameter zu schätzen.
  - Bestimmung der tatsächlichen Eigenschaften der Dämmung?
- Das modellierte System zu steuern oder optimieren.
  - Hausoberfläche optimieren unter Einschränkungen?
- Optimale Steuerung
  - Wie viele Boote einer Flotte sollen in Betrieb sein?
- Optimale Entscheidung
  - Wie viele Waren sollen gekauft und gelagert werden?

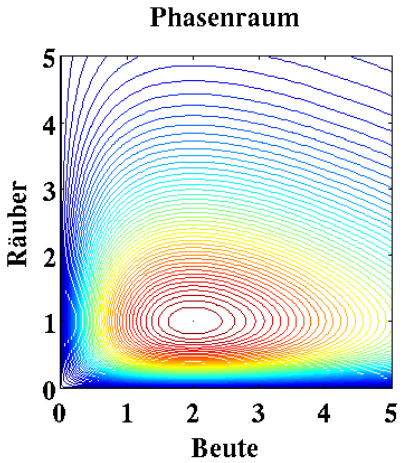
Ziele der Untersuchung von Differentialgleichungen

- Um Modellierungsziele zu erreichen, kann man manchmal das mathematische Modell exakt lösen.
- Wenn eine exakte Lösung nicht praktisch ist, kann eine qualitative Untersuchung der Lösung reichen.
- Z.B. Räuber-Beute,

$$x'(t) = [\alpha - \beta y(t)]x(t), \quad y'(t) = [\gamma x(t) - \delta]y(t)$$

  - $(x, y) = (\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ ist ein *Gleichgewicht*. Stabil? D.h. wenn natürliche Störungen stattfinden, bleibt der Zustand in der Nähe des Gleichgewichts?
  - Sind alle Lösungen *periodisch*? Gibt es *Grenzzyklen*?
  - Bleiben Lösungen *positiv*?
- Wenn das Modell numerisch gelöst werden muss,





wird MATLAB oft verwendet.

Siehe z.B.

```
>> help ode45
```

Differentialgleichungen erster Ordnung

- Die DG erster Ordnung
$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x) = 0$$
ist *linear*, weil der Operator
$$[Ly](x) = a(x)y'(x) + b(x)y(x)$$
in der DG $Ly + c = 0$ linear ist, d.h. es gilt
$$L[\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = \alpha_1 L y_1 + \alpha_2 L y_2$$
$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und $\forall$ differenzierbaren Funktionen y_1, y_2.
Die logistische DG ist *nicht* linear! (Probe!)
- Die obige DG ist *homogen* wenn $c = 0$, und sonst ist sie *inhomogen*.
- Seien $a, b, c \in \mathcal{C}(I)$. Wenn $a(x) \neq 0$, $x \in I$, und $p(x) = b(x)/a(x)$ und $q(x) = c(x)/a(x)$, ergibt sich die normale Form in I,
$$y'(x) + p(x)y(x) + q(x) = 0$$
- Wenn die DG homogen ist, wird sie formell so gelöst:
$$\ln|y| = \int y'/y dx = -\int p(x)dx + k, \quad k \in \mathbb{R}$$
$$|y(x)| = K\mathrm{e}^{-P(x)}, \quad K = \mathrm{e}^k, \quad P'(x) = p(x)$$
$$y(x) = c\exp[\int p(x)dx], \quad c \in \mathbb{R}$$

Differentialgleichungen erster Ordnung

- Nun rigoros: Wenn $P'(x) = p(x)$ und daher $\mathrm{e}^{P(x)} \neq 0$, gilt $\frac{d}{dx}[y(x)\mathrm{e}^{P(x)}] = y'(x)\mathrm{e}^{P(x)} + p(x)y(x)\mathrm{e}^{P(x)} = \mathrm{e}^{P(x)}[y'(x) + p(x)y(x)] = 0$ genau dann wenn $y'(x) + p(x)y(x) = 0$. Beweis für:

Satz: Sei $P'(x) = p(x)$. Es gilt $y'(x) + p(x)y(x) = 0$ genau dann, wenn $y(x) = k\mathrm{e}^{-P(x)}$ für ein $k \in \mathbb{R}$. (allgemeine Lösung)

- Weiters sei $f(x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen DG $y'(x) + p(x)y(x) = -q(x)$. Sei $y(x)$ eine andere Lösung. Dann erfüllt $z(x) = y(x) - f(x)$ die homogene DG, $z'(x) = y'(x) - f'(x) = -[p(x)y(x) + q(x)] + [p(x)f(x) + q(x)] = -p(x)z(x)$ Daher gilt $z(x) = k\mathrm{e}^{-P(x)}$. Beweis für:

Satz: Für die DG $y'(x) + p(x)y(x) + q(x) = 0$ seien $f(x)$ eine partikuläre Lösung und $P'(x) = p(x)$. $y(x)$ löst die DG genau dann wenn $y(x) = f(x) + k\mathrm{e}^{-P(x)}$, $k \in \mathbb{R}$. (allgemeine Lösung)

- Methoden zur Bestimmung der partikulären Lösung f werden unten 21 präsentiert.
- Mit der Nebenbedingung $y(a) = y_0$ wird die Konstante durch $k = \mathrm{e}^{P(a)}[y_0 - f(a)]$ gegeben.

Integrale und Integral-Kurven

- Für nichtlineare DG'en gibt es keine einfachen Analoga der obigen Sätze. Nun quasilineare DG'en,

Def: Kurven in denen gilt $u(x, y) = k$ sind die Niveau-Kurven der Funktion u.

Satz (der impliziten Funktionen): Sei $u \in \mathcal{C}^m(D)$ mit $(x_0, y_0) \in D$ und

$$u(x_0, y_0) = k, \quad \partial_y u(x_0, y_0) \neq 0$$

mit $k \in \mathbb{R}$. Dann $\exists \epsilon, \delta > 0$ mit $B(x_0, \epsilon) \times B(x_0, \delta) \subset D$ und $\exists! y \in \mathcal{C}^m(B(x_0, \epsilon))$ wobei $\forall x \in B(x_0, \epsilon)$,

$$y(x) \in B(y_0, \delta) \quad \text{und} \quad u(x, y(x)) = k.$$

- Beispiel: $u(x, y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $D = \mathbb{R}^2$, $m = \infty$, $k = 1$, $\epsilon, \delta \in (0, 1)$, $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Satz: In $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \partial_y u(x, y) \neq 0\}$ sind die Niveau-Kurven von u Lösungskurven der quasilinearen DG

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))y'(x) = 0.$$

mit $M(x, y) = \partial_x u(x, y)$ und $N(x, y) = \partial_y u(x, y)$.

Integrale und Integral-Kurven

Beweis: Sei $(x_0, y_0) \in D$ und $k = u(x_0, y_0)$. Laut dem Satz der impliziten Funktionen gibt es für die Niveau-Kurve $u(x, y) = k$ in der Nähe von (x_0, y_0) eine Funktion $y(x)$, die $u(x, y(x)) = k$ erfüllt. Nach der Kettenregel gilt

$$\partial_x u(x, y(x)) + \partial_y u(x, y(x))y'(x) = \frac{d}{dx} u(x, y(x)) = \frac{d}{dx} k = 0$$

und $y(x)$ ist eine Lösung der DG. ■

- Beispiel: $u(x, y) = x^2 + y^2$, $M + Ny' = 2x + 2yy' = 0$, $y(x) = \sqrt{k - x^2}$, $u(x, y(x)) = k$.

Def: Ein *Integral* der quasilinearen DG

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))y'(x) = 0$$

ist eine Funktion $u(x, y)$, wobei $u(x, y(x)) = k$, $k \in \mathbb{R}$, für jede Lösungskurve $y(x)$ gilt.
Niveau-Kurven $u(x, y) = k$ eines Integrals u sind *Integral-Kurven* der DG.

- Beispiel: Für $M + Ny' = 2x + 2yy' = 0$ ist $u(x, y) = x^2 + y^2$ ein Integral, und $x^2 + y^2 = k$, $k \in \mathbb{R}$, sind Integral-Kurven.

Trennung der Variablen

- Seien $g(x)$ und $h(y)$ stetig. Eine DG der Form
$$y' = g(x)h(y)$$
hat *trennbare Variablen*. Mit der Transformation
$$g(x) - [1/h(y)]y' = 0$$
ergibt sich das Integral
$$u(x, y) = \int g(x)dx - \int dy/h(y)$$
- Beispiel: Für die DG $y' = (1 + y^2)\mathrm{e}^{-x^2}$,
$$\tan^{-1}[y(x)] = \int dy/(1 + y^2) = \int \mathrm{e}^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(x) - k$$
oder eine Lösung
$$y(x) = \tan[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(x) - k]$$
- Die Funktion $\phi(x) = \int g(x)dx$ existiert im allgemeinen. Wenn $h(y) \neq 0$ gilt $\forall y \in (y_1, y_2)$ existiert die Funktion
$$\psi(y) = \int dy/h(y)$$
und sie ist streng monoton im Intervall (y_1, y_2).
Für $k \in \mathbb{R}$ und x mit $\phi(x) - k \in (\psi(y_1), \psi(y_2))$, folgt aus
$$\phi(x) - \psi(y) = k$$
eine Lösung der DG ist gegeben durch $y(x) = \psi^{-1}(\phi(x) - k)$.

Exakte Differentialgleichungen

Def: In einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ ist die quasilineare DG

$$M(x,y) + N(x,y)y'(x) = 0$$

exakt wenn $\exists u \in \mathcal{C}^1(D)$ wobei $M = \partial_x u(x,y)$ und $N = \partial_y u(x,y)$.

- Wenn die DG exakt ist, hängt das Kurvenintegral $\int_{t_0}^{t_1} [M(x(t),y(t))\dot{x}(t) + N(x(t),y(t))\dot{y}(t)]dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} u(\boldsymbol{x}(t))dt$ nur von $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ ab, wobei $\boldsymbol{x}(t) = (x(t),y(t))$ eine beliebige Kurve ist mit $\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\| = 1$ und $\boldsymbol{x}(t_i) = (x_i,y_i)$, $i = 0,1$.
- Um ein Integral zu bestimmen, reicht die Rechnung über eine Kurve, die zuerst waagerecht und dann senkrecht ist,
$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi,y_0)d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x,\eta)d\eta \qquad \text{(Probe!)}$$
- Wenn die DG exakt ist und $M,N \in \mathcal{C}^1(D)$, dann muss gelten
$$\partial_{yx} u = \qquad \partial_y M(x,y) = \partial_x N(x,y) \qquad = \partial_{xy} u$$
- Beispiel: Die DG ist $y + xy' = 0$, $M = y$, $N = x$. Es gilt
$$\partial_y M = 1 = \partial_x N$$
Ein Integral wird so bestimmt, $x_0 = y_0 = 0$,
$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} y_0 d\xi + \int_{y_0}^{y} x d\eta = (x - x_0)y_0 + x(y - y_0) \to xy$
Integral-Kurven sind $xy = k$, $k \in \mathbb{R}$.

Integrationsfaktoren

Def: Eine Funktion $\mu(x,y)$ ist ein *Integrationsfaktor* für $M(x,y)+N(x,y)y'(x)$ wenn es eine Funktion $u(x,y)$ gibt, wobei

$$\partial_x u(x,y) = \mu(x,y)M(x,y), \quad \partial_y u(x,y) = \mu(x,y)N(x,y)$$

- Mit Integrationsfaktor $\mu(x,y)$ ist die quasilineare DG
$$[\mu(x,y)M(x,y)] + [\mu(x,y)N(x,y)]y'(x) = 0$$
exakt, sogar wenn $M(x,y)+N(x,y)y'(x)=0$ nicht.
- Die Funktionen μ, M, N müssen erfüllen
$$\partial_y[\mu(x,y)M(x,y)] = \partial_x[\mu(x,y)N(x,y)]$$
- Sei u gegeben durch
$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \mu(\xi,y_0)M(\xi,y_0)d\xi + \int_{y_0}^{y} \mu(x,\eta)N(x,\eta)d\eta$$
Dann ist u ein Integral der DG, $M(x,y)+N(x,y)y'(x)=0$, da jede Lösungskurve $y(x)$ erfüllt (Probe!)
$$\frac{d}{dx}u(x,y(x)) = \mu(x,y(x))[M(x,y(x))+N(x,y(x))y'(x)] = 0.$$
- Beispiel: Die DG ist $xy + x^2y' = 0$, $M = xy$, $N = x^2$. Damit gilt
$$xy\partial_y\mu + x\mu = \partial_y[\mu M] = \partial_x[\mu N] = x^2\partial_x\mu + 2x\mu$$
nimm $\partial_y\mu = 0$ und
$$\mu(x) = x\mu'(x) + 2\mu(x) \quad \Leftarrow \quad \mu(x) = 1/x.$$
Die transformierte DG ist $y + xy' = 0$ mit $xy = k$ wie vorher.

Inhomogenene Lineare Differentialgleichungen

- Für die DG
$$y'(x) + p(x)y(x) + q(x) = 0.$$
mit $P'(x) = p(x)$ ist $\mu(x) = \mathrm{e}^{P(x)}$ ein Integrationsfaktor:
- Mit $M(x, y) = p(x)y + q(x)$, $N(x, y) = 1$, gilt
$\mu(x)p(x) = \partial_y[\mu(x)M(x, y)] = \partial_x[\mu(x)N(x, y)] = P'(x)\mathrm{e}^{P(x)}$.
- Ein Integral ist gegeben durch, $y_0 = 0$,
$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^{x} [\mathrm{e}^{P(\xi)}(q(\xi) + p(\xi)y_0)]d\xi + \int_{y_0}^{y} \mathrm{e}^{P(x)} d\eta \\ &= y\mathrm{e}^{P(x)} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{P(\xi)} q(\xi)d\xi \qquad \text{(Probe!)} \end{aligned}$$
- Nach y in $u(x, y) = k$ aufgelöst,
$$y(x) = k\mathrm{e}^{-P(x)} + f(x), \quad f(x) = -\mathrm{e}^{-P(x)} \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{P(\xi)} q(\xi)d\xi$$
- Einsetzen zeigt, $f(x)$ ist eine partikuläre Lösung.
- Laut dem obigen Satz 15 ist $y(x)$ die allgemeine Lösung.
- Alternativer Ansatz: Integrationsfaktor $\mathrm{e}^{P(x)}$, $P'(x) = p(x)$,
$$\begin{aligned} [y(x)\mathrm{e}^{P(x)}]' &= y'(x)\mathrm{e}^{P(x)} + p(x)y(x)\mathrm{e}^{P(x)} = -q(x)\mathrm{e}^{P(x)} \\ y(x)\mathrm{e}^{P(x)} - k &= \int_{x_0}^{x} [y(\xi)\mathrm{e}^{P(\xi)}]' d\xi = -\int_{x_0}^{x} q(\xi)\mathrm{e}^{P(\xi)} d\xi \\ y(x) &= k\mathrm{e}^{-P(x)} - \mathrm{e}^{-P(x)} \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{P(\xi)} q(\xi)d\xi \end{aligned}$$

Inhomogenene Lineare Differentialgleichungen

- Die obige Konstante $k = y(x_0)\mathrm{e}^{P(x_0)}$ wird mit einer Nebenbedingung bestimmt,
$$y'(x) + p(x)y(x) + q(x) = 0, \quad y(x_0) = y_0$$
und die eindeutige Lösung des Problems ist gegeben durch
$$y(x) = y_0\mathrm{e}^{P(x_0)-P(x)} - \mathrm{e}^{-P(x)}\int_{x_0}^{x}\mathrm{e}^{P(\xi)}q(\xi)d\xi$$
- Integrationsfaktoren sind nicht eindeutig. Z.B. für die DG $y - xy' = 0$,
  - $\mu(x) = 1/x^2 \quad \Rightarrow \quad y/x = k$
  - $\mu(x,y) = 1/(x^2+y^2) \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1}(y/x) = k$
  - $\mu(x,y) = 1/(xy) \quad \Rightarrow \quad y = kx$

Hausaufgabe: Durch die Substitution $u(x) = y(x)^{1-\nu}$ schreibe die *Bernoulli* DG
$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y(x)^{\nu}, \quad \nu \neq 1$$
in lineare Form erster Ordnung um, d.h.
$$u'(x) + (1-\nu)p(x)u(x) = (1-\nu)q(x)$$
Leite die allgemeine Lösung für $y(x)$ her. (Logistisch?)

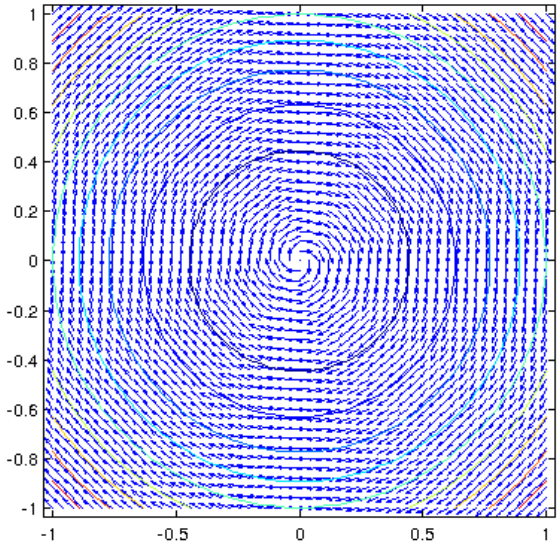
Lineare Bruchgleichung

- Die lineare Bruchgleichung in normaler Form ist
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma x + \delta y}{\alpha x + \beta y}, \quad \alpha\delta \neq \beta\gamma$$
und in quasilinearer Form,
$$(\gamma x + \delta y) - (\alpha x + \beta y)y' = 0.$$
Hier sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Konstanten.
- Durch die Substitution $y = xv$, (Probe!)
$$xv' + v = (\gamma + \delta v)/(\alpha + \beta v)$$
- Trennung der Variablen,
$$\frac{1}{x} + \frac{\alpha + \beta v}{\beta v^2 + (\alpha - \delta)v - \gamma} v' = 0$$
- Integral-Kurven $x = kG(y/x)$ wobei
$$G(v) = \exp\left\{ - \int [(\alpha + \beta v)/(\beta v^2 + (\alpha - \delta)v - \gamma)] dv \right\}$$
- Angenommen worden sind: $x \neq 0$, $\alpha x + \beta y \neq 0$, $\beta v^2 + (\alpha - \delta)v - \gamma \neq 0$. Diese schneiden $\mathbb{R}^2$ in bis auf 8 Gebiete.

Grafische Lösung

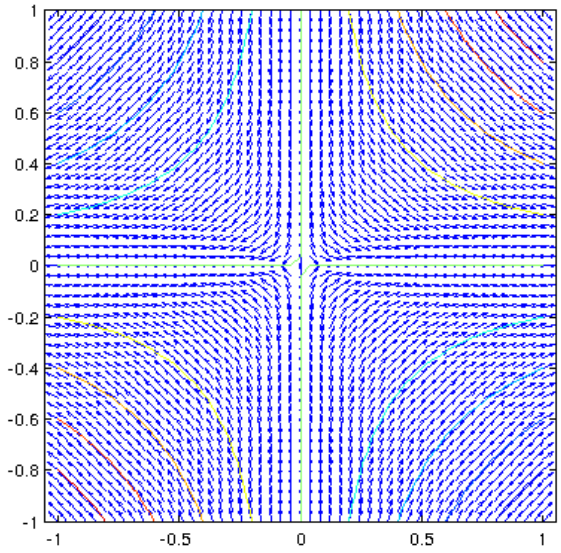
Def: Ein *Richtungsfeld* in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Funktion, die zu jedem Punkt in D eine Richtung zuordnet. Zwei Richtungen sind gleich, wenn sie sich durch ein Mehrfach von π unterscheiden.

- Grafische Lösungsmethode: Für jeden Punkt $(x, y) \in D$, skizziere einen Strich mit Richtung $\theta = \tan^{-1}[y'(x)]$ (z.B. $y'(x) = F(x, y)$ oder $M(x, y) + N(x, y)y'(x) = 0$). Dann skizziere eine Kurve, immer tangent zu einem Strich.



$x + y(x)y'(x) = 0$

$u(x, y) = x^2 + y^2$



$y(x) + xy'(x) = 0$

$u(x, y) = xy$

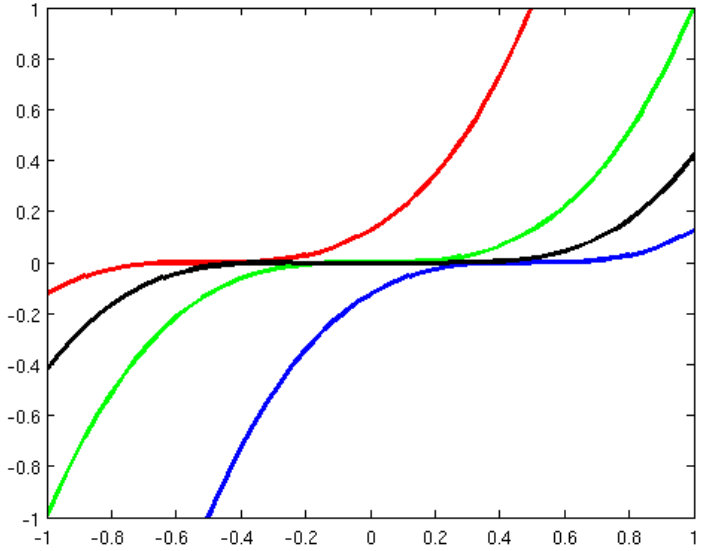
Anfangswertprobleme

- Für ein Anfangswertproblem,
$$y'(t) = F(t, y(t)), \quad t \geq t_0, \qquad y(t_0) = y_0$$
wird eine Lösung $y(t)$ für Zeiten $t \geq t_0$ gesucht, wobei der Lösungswert y_0 zur Anfangszeit t_0 vorgegeben ist.

Def: Ein *wohlgestelltes* Anfangswertproblem erfüllt die Bedingungen,

1. Eine Lösung existiert.
2. Die Lösung ist eindeutig.
3. Die Lösung hängt von y_0 stetig ab.

- Beispiel: DG ist $y'(t) = 3y(t)^{\frac{2}{3}}$. Lösungskurven $y(t) = (t - t_0)^3$ erfüllen $y(t_0) = 0$, aber $y(t) = 0$ erfüllt diese Anfangsbedingung auch. Das Anfangswertproblem ist nicht wohlgestellt mit $y_0 = 0$.



Eindeutigkeit und Stetigkeit

Def: Eine Funktion $F(x, y)$ erfüllt eine *Lipschitz Bedingung* in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$, wenn $\exists L > 0$ wobei

$$|F(x, y_2) - F(x, y_1)| \leq L|y_2 - y_1|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D$$

- Beispiel: $F(x, y) = |xy|$, $D = [a, b] \times \mathbb{R}$, $L = \max\{|a|, |b|\}$.

Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und konvex. Wenn $F \in \mathcal{C}^1(D)$, dann erfüllt F eine Lipschitz Bedingung mit $L = \sup_D |\partial_y F|$.

Beweis: Seien $(x, y_1), (x, y_2) \in D$. Wegen Konvexität liegt die Strecke zwischen diesen Punkten in D. Durch den Mittelwertsatz $\exists \eta = y_1(1 - \tau) + \tau y_2$, $\tau \in [0, 1]$ wobei $F(x, y_2) - F(x, y_1) = \partial_y F(x, \eta)(y_2 - y_1)$. Das Ergebnis folgt durch Abschätzen der Beträge. ■

- Beispiel: $F(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$, $D = \mathbb{R} \times [\epsilon, \infty)$, $\epsilon > 0$, $L = 2\epsilon^{-\frac{1}{3}}$.
- Eine Lipschitz Bedingung ist hinreichend für Eindeutigkeit:

Eindeutigkeit und Stetigkeit

- Angenommen erfüllt $F(x, y)$ eine Lipschitz Bedingung in einem Gebiet $D = [a, b] \times [c, d]$ mit Konstante L.
- Seien $z_1(x)$ und $z_2(x)$ zwei Lösungen der DG, $y'(x) = F(x, y(x))$, wobei $(x, z_1(x)), (x, z_2(x)) \in D$.
- $\sigma(x) = [z_2(x) - z_1(x)]^2$ erfüllt

$$\begin{aligned} \sigma'(x) &= 2[z_2(x) - z_1(x)][z_2'(x) - z_1'(x)] \\ &= 2[z_2(x) - z_1(x)][F(x, z_2(x)) - F(x, z_1(x))] \\ &\leq 2L|z_2(x) - z_1(x)|^2 = 2L\sigma(x) \end{aligned}$$

- Mit dem Integrationsfaktor e^{-2Lx},

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)\mathrm{e}^{-2Lx}] = \sigma'(x)\mathrm{e}^{-2Lx} - 2L\sigma(x)\mathrm{e}^{-2Lx} \leq 0$$

$\sigma(x)\mathrm{e}^{-2Lx}$ ist nicht steigend und die Stetigkeit folgt

$$|z_2(x) - z_1(x)| \leq \mathrm{e}^{L(x-a)}|z_2(a) - z_1(a)|. \quad \text{Beweist:}$$

Satz: Wenn $F(x, y)$ eine Lipschitz Bedingung in einem Gebiet $D = [a, b] \times [c, d]$ erfüllt, gibt es in D höchstens eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems mit $c \leq y(x) \leq d$,

$$y'(x) = F(x, y(x)), \quad x \in [a, b], \qquad y(a) = y_0$$

Vergleichssätze

- Die meisten DG'en können nicht explizit gelöst werden.
- Eine unbekannte Lösung kann aber mit einer bekannten Lösung einer ähnlichen DG verglichen werden.

Satz: In $D = [a, b] \times [c, d]$ erfüllt $F(x, y)$ eine Lipschitz Bedingung, $z_1(x)$ erfüllt die Differentialungleichung

$$y'(x) \leq F(x, y(x)), \quad x \in [a, b]$$

mit $c \leq z_1(x) \leq d$ und $z_2(x)$ löst das Anfangswertproblem

$$y'(x) = F(x, y(x)), \quad x \in [a, b], \qquad y(a) = y_a \geq z_1(a)$$

mit $c \leq z_2(x) \leq d$. Dann gilt $z_1(x) \leq z_2(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Beweis: Nimm an, es gilt $z_1(x_1) > z_2(x_1)$ für $x_1 > a$. Sei x_0 das größte in $\{x \in [a, x_1] : z_1(x) \leq z_2(x)\}$. Es gilt $z_1(x_0) = z_2(x_0)$. Für $x \in [x_0, x_1]$ gelten $\sigma(x) = z_1(x) - z_2(x) \geq 0$ und

$$\sigma'(x) \leq F(x, z_1(x)) - F(x, z_2(x)) \leq L|z_1(x) - z_2(x)| = L\sigma(x)$$

Multiplikation mit e^{-Lx} zeigt, $\sigma(x)\mathrm{e}^{-Lx}$ ist nicht steigend. Es folgt, $0 \leq \sigma(x) \leq \sigma(x_0)\mathrm{e}^{L(x-x_0)} = 0$, $\forall x \in [x_0, x_1]$, ein Widerspruch der Annahme $\sigma(x_1) = z_1(x_1) - z_2(x_1) > 0$. ■

Vergleichssätze

Satz: Seien $z_1(x)$ und $z_2(x)$ Lösungen der DG'en,

$$u'(x) = G(x, u(x)) \quad \text{bzw.} \quad v'(x) = F(x, v(x))$$

in $D = [a, b] \times [c, d]$, wobei $G(x, y) \leq F(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$ und F erfüllt eine Lipschitz Bedingung in D. Wenn $z_1(a) \leq z_2(a)$, dann gilt $z_1(x) \leq z_2(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Beweis: Da $z_1'(x) = G(x, z_1(x)) \leq F(x, z_1(x))$ gilt, sind die Bedingungen des letzten Satzes erfüllt. ■

- Beispiel (Sandwich): Seien z_1, z_2, z_3 Lösungen der Anfangswertprobleme

  $$z_1' = -F(z_1), \quad z_2' = G(z_2), \quad z_3' = F(z_3), \quad z_i(0) = \epsilon, \forall i$$

  in $D = [0, 1] \times [\epsilon/2, 1]$ mit $\epsilon > 0$, $G(z) = \epsilon^2 \cos(1/z)$ und $F(z) = \epsilon^2$. Da $G(z) \leq F(z)$, $\forall z \neq 0$, und $F'(z) = 0$, folgt

  $$z_2(x) \leq z_3(x) = \epsilon(1 + \epsilon x) \quad x \in [0, 1]$$

  Da $-F(z) \leq G(z)$, $\forall z \neq 0$, und $G'(z) = -\epsilon^2 \sin(1/z)/z^2 \Rightarrow \max_{\epsilon/2 \leq z \leq 1} |G'(z)| \leq 4$, folgt

  $$\epsilon(1 - \epsilon x) = z_1(x) \leq z_2(x) \quad x \in [0, 1]$$

  Aus den 2 Ungleichungen folgt $z_2(x) \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$, $x \in [0, 1]$.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

- Sehr intensiv untersuchte DG'en:
$$p_0(x)u''(x) + p_1(x)u'(x) + p_2(x)u(x) = p_3(x), \quad x \in I$$
wobei $p_i(x)$, $i = 0, \ldots, 3$, stetig sind.
- Mit $p = p_1/p_0$, $q = p_2/p_0$, $r = p_3/p_0$ ergibt sich die normale Form
$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = r(x), \quad x \in I$$
- Falls $p_0(x_0) = 0$, $x_0 \in I$, sind p, q, r in x_0 nicht definiert. In x_0 hat die DG einen *singulären* Punkt.
- Beispiele: Die *Bessel* DG hat einen singulären Punkt in $x = 0$:
$$x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0$$
Die *Legendre* DG hat singülare Punkte in $x = \pm 1$,
$$[(1 - x^2)u']' + n(n+1)u = 0$$
- Erst später werden DG'en mit singulären Punkten untersucht.
- Wenn die DG mit Operator $Lu = r$ dargestellt wird, ist dieser Operator *linear*,
$$L[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2] = \alpha_1 Lu_1 + \alpha_2 Lu_2, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(I)$$

Prinzip des Superposierens

- Wenn u und v Lösungen der inhomogenen DG $Lu = r$ sind, und $w = u - v$, folgt
$$Lw = Lu - Lv = r - r = 0$$
oder w ist eine Lösung der homogenen DG. Beweis für:

Satz: Sei $[Ly](x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)$, $y \in \mathcal{C}^2(I)$. Wenn u eine partikuläre Lösung der inhomogenen DG $Lu = r$ ist, und w die allgemeine Lösung der homogenen DG $Lw = 0$ ist, dann ist $u + w$ die allgemeine Lösung der inhomogenen DG.

- Das *Prinzip des Superposierens* ist trivial aber wichtig:

Satz: Seien $u, v \in \mathcal{C}^2(I)$ Lösungen der DG'en $Lu = f$, $Lv = g$. Dann ist $w = \alpha u + \beta v$ eine Lösung der DG $Lw = \alpha f + \beta g$.

- Wenn w_1 und w_2 zwei bestimmte Lösungen der homogenen DG $Lw = 0$ sind, ist auch $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ eine Lösung der homogenen DG, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
- Beispiel: Die DG $u''(x) + \kappa^2 u(x) = 0$ hat die nicht trivialen Lösungen $\cos(\kappa x)$ und $\sin(\kappa x)$, und $w(x) = \alpha \cos(\kappa x) + \beta \sin(\kappa x)$ ist eine Lösung $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Nebenbedingungen

- Das Anfangswertproblem
$$u''(x) + \kappa^2 u(x) = 0, \quad x \geq 0$$
$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1$$
wird durch $w(x) = \alpha \cos(\kappa x) + \beta \sin(\kappa x)$ und das System
$$u_0 = \alpha + 0, \quad u_1 = 0 + \beta\kappa$$
bestimmt, d.h.
$$w(x) = u_0 \cos(\kappa x) + (u_1/\kappa) \sin(\kappa x)$$
- Das Randwertproblem
$$u''(x) + \kappa^2 u(x) = 0, \quad x \in [0, \pi/(2\kappa)]$$
$$u(0) = u_0, \quad u(\pi/(2\kappa)) = u_1$$
wird durch $w(x) = \alpha \cos(\kappa x) + \beta \sin(\kappa x)$ und das System
$$u_0 = \alpha + 0, \quad u_1 = 0 + \beta$$
bestimmt, d.h.
$$w(x) = u_0 \cos(\kappa x) + u_1 \sin(\kappa x)$$
- Bemerke: 2 Bedingungen sind notwendig, um die Lösung eindeutig zu bestimmen.
- Existenz und Eindeutigkeit werden unten bewiesen.

Riccati Gleichung

- Sei $u(x)$ eine Lösung der homogenen DG
$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0, \quad x \in I \qquad (*)$$
wobei $u(x) \neq 0$, $x \in I$, und setze $v(x) = u'(x)/u(x)$.
- Es folgen
$$\begin{aligned} u''(x) &= [v(x)u(x)]' = v'(x)u(x) + v(x)u'(x) \\ &= [v'(x) + v(x)^2]u(x) \end{aligned}$$
und
$$\begin{aligned} u''(x) &= -p(x)[v(x)u(x)] - q(x)u(x) \\ &= -[p(x)v(x) + q(x)]u(x) \end{aligned}$$
oder $v(x)$ erfüllt die *Riccati* DG,
$$v'(x) + v(x)^2 + p(x)v(x) + q(x) = 0 \qquad (\dagger)$$
- Wenn $v(x)$ eine Lösung von $(\dagger)$ ist und $u'(x) = v(x)u(x)$, dann ist $u(x)$ eine Lösung von $(*)$.
- Jede Lösung von $(*)$ mit $u(x) \neq 0$, $x \in I$, ist gegeben durch
$$u(x) = c \exp \int v(x)dx$$
für eine Lösung $v(x)$ von $(\dagger)$.
- Beispiel: DG ist $u''(x) + \kappa^2 u(x) = 0$, Riccati DG ist $v'(x) + v(x)^2 + \kappa^2 = 0$, allgemeine Lösungen sind $v(x) = \kappa \tan[\kappa(c_1 - x)]$ und $u(x) = c_2 \cos[\kappa(c_1 - x)]$.

Konstante Koeffizienten

- Für die homogene DG,
$$u''(x) + pu'(x) + qu(x) = 0, \quad x \in I$$
seien nun $p, q \in \mathbb{R}$.
- Lösungsansatz: Probiere $u(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ und
$$\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + p\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} + q\mathrm{e}^{\lambda x} = 0 \quad \Rightarrow \quad P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$
- $P(\lambda)$ ist das *charakteristische Polynom* der DG.

Hausaufgabe: Schreibe die DG in erste Ordnung um, $\boldsymbol{u}' = A\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} = \langle u, u' \rangle^{\mathrm{T}}$, und zeige, $P(\lambda)$ ist das charakteristische Polynom der Matrix A.

- Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind
$$\lambda_\pm = \tfrac{1}{2}[-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}]$$
- Fall 1: $4q > p^2 \geq 0$. $\lambda_\pm = \mu \pm \imath\nu$, $\mu = -\frac{1}{2}p$, $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$. Mit der Eulerschen Formel,
$$\mathrm{e}^{(\mu \pm \imath\nu)x} = \mathrm{e}^{\mu x}[\cos(\nu x) \pm \imath \sin(\nu x)]$$
gibt es 2 Lösungen der DG,
$$u_1(x) = \mathrm{e}^{\mu x} \cos(\nu x), \quad u_2(x) = \mathrm{e}^{\mu x} \sin(\nu x)$$

Linear Unabhängige Lösungen

- Fall 2: $p^2 > 4q \geq 0$. $\lambda_\pm \in \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $p\lambda_\pm < 0$.
  Es gibt 2 Lösungen der DG,
  $$u_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}, \quad u_2(x) = \mathrm{e}^{\beta x}$$
- Fall 3: $p^2 \geq 0 > q$. $\lambda_\pm \in \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha\beta < 0$. Es gibt wieder die 2 obigen Lösungen der DG.
- Fall 4: $p^2 = 4q$. $\lambda_+ = \lambda_- = -p/2$. Eine Lösung $u_1(x) = \mathrm{e}^{-px/2}$.
  Zweiter Ansatz: Probiere $u(x) = x^\kappa \mathrm{e}^{\lambda x}$ und
  $$[\kappa(\kappa-1)x^{\kappa-2} + 2\kappa\lambda x^{\kappa-1} + \lambda^2 x^\kappa]\mathrm{e}^{\lambda x} + p[\kappa x^{\kappa-1} + \lambda x^\kappa]\mathrm{e}^{\lambda x} + q x^\kappa \mathrm{e}^{\lambda x} = 0$$
  $$\Rightarrow \quad \kappa(\kappa-1)x^{\kappa-2} + (2\lambda + p)\kappa x^{\kappa-1} + (\lambda^2 + p\lambda + q)x^\kappa = 0$$
  oder $\lambda = -p/2$, $\kappa = 1$. Eine zweite Lösung ist $u_2(x) = x\mathrm{e}^{-px/2}$.

Def: Funktionen $\{f_i(x), x \in I\}_{i=1}^n$ sind *linear unabhängig* in I wenn $\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow c_i = 0, i = 1, \ldots, n$.

- Beispiel: Alle obigen Lösungspaare $\{u_1(x), u_2(x)\}$ sind linear unabhängig in $\mathbb{R}$. Z.B. $c_1 \mathrm{e}^{-px/2} + c_1 x \mathrm{e}^{-px/2} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow c_1 + c_2 x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Dann $x = 0 \Rightarrow c_1 = 0$, und $x = 1$ $\Rightarrow c_2 = 0$.

Gleichgewicht

Def: Ein Konstanter Zustand, der eine DG löst, ist ein *Gleichgewicht* für die DG.

- Beispiel: Der Zustand $u_0 = 0$ ist ein Gleichgewicht für die homogene DG
$$u''(x) + pu'(x) + qu(x) = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

Def: Das Gleichgewicht u_0 für diese DG ist *streng stabil*, wenn jede Lösung $u(x)$ erfüllt $u(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} u_0$. Das Gleichgewicht ist *stabil* wenn $\exists B > 0$ s.d. $|u(x) - u_0| \leq B$, $\forall x > 0$. Sonst ist das Gleichgewicht *instabil*.

- Fall 1: $\mu < 0 \Rightarrow$ streng stabil, $\mu = 0 \Rightarrow$ stabil, $\mu > 0 \Rightarrow$ instabil.
$$u_1(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\cos(\nu x), \quad u_2(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\sin(\nu x)$$
- Fall 2,3: $\alpha, \beta < 0 \Rightarrow$ streng stabil, $\alpha > 0$ oder $\beta > 0 \Rightarrow$ instabil.
$$u_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}, \quad u_2(x) = \mathrm{e}^{\beta x}$$
- Fall 4: $p > 0 \Rightarrow$ streng stabil. $p \leq 0 \Rightarrow$ instabil.
$$u_1(x) = \mathrm{e}^{-px}, \quad u_2(x) = x\mathrm{e}^{-px}$$

Masse-Feder-System

- Die Auslenkung $u(t)$ einer Masse (z.B. Aufzug), die mit einer befestigten Feder verbunden ist, wird so modelliert
$$mu''(t) + cu'(t) + ku(t) = f, \quad u(0) = u_0, u'(0) = u_1$$
wobei $m =$ Masse, $c =$ Reibungskoeffizient, $k =$ Federkonstante und $f =$ äußere Kraft. Hier $m, c, k, f \in \mathbb{R}$.
- Mit $m \neq 0$, $p = c/m$, $q = k/m$ und $r = f/m = 0$ ergibt sich das homogene Anfangswertproblem
$$u''(t) + pu'(t) + qu(t) = 0, \quad u(0) = u_0, u'(0) = u_1$$
- Fall 1: $\lambda_\pm = \mu \pm \imath\nu$, $\mu < 0$, $\nu > 0$. Es gibt Schwingungen,
$$u(t) = \mathrm{e}^{\mu t}[u_0 \cos(\nu t) + \sin(\nu t)(u_1 - \mu u_0)/\nu]$$
System ist *untergedämpft*. (Nicht gut für den Aufzug.)
- Fall 2: $\lambda_\pm = -p < 0$. System ist *kritisch gedämpft*,
$$u(t) = \mathrm{e}^{-pt}[u_0 + (pu_0 + u_1)t]$$
(Nicht sicher für den Aufzug.)
- Fall 3: $\lambda_\pm \in \{\alpha, \beta\}$, $\alpha, \beta < 0$. System ist *übergedämpft*,
$$u(t) = [(u_1 - \beta u_0)\mathrm{e}^{\alpha t} + (\alpha u_0 - u_1)\mathrm{e}^{\beta t}]/(\alpha - \beta)$$
(Sicher für den Aufzug.)

Eindeutigkeit

Satz: Für $I = [a, b]$, $p, q, r \in \mathcal{C}(I)$, gibt es höchstens eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(I)$ des Anfangswertproblems
$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = r(x), \quad x \in I, \quad u(a) = u_0, u'(a) = u_1$

Beweis: Seien $u_1(x)$ und $u_2(x)$ Lösungen. Dann erfüllt $w(x) = u_1(x) - u_2(x)$ das homogene Anfangswertproblem

$$w''(x) + p(x)w'(x) + q(x)w(x) = 0, \quad w(a) = 0, w'(a) = 0$$

Die Funktion $\sigma(x) = w(x)^2 + w'(x)^2$ erfüllt

$$\begin{aligned} \sigma'(x) &= 2w'(x)[w(x) + w''(x)] \\ &= 2w'(x)[w(x) - p(x)w'(x) - q(x)w(x)] \\ &= -2p(x)w'(x)^2 + 2[1 - q(x)]w(x)w'(x) \end{aligned}$$

Aus $w(x)^2 \pm 2w(x)w'(x) + w'(x)^2 = |w(x) \pm w(x)'|^2 \geq 0$ folgt $|2w(x)w'(x)| \leq w(x)^2 + w'(x)^2$ und daher

$$2[1 - q(x)]w(x)w'(x) \leq [1 + |q(x)|][w(x)^2 + w'(x)^2]$$

und

$$\sigma'(x) \leq [1 + |q(x)|]w(x)^2 + [1 + |q(x)| + |2p(x)|]w'(x)^2$$

Lösungsbasis einer Differentialgleichung

Mit $K = 1 + \max_{x \in I}[|q(x)| + |2p(x)|] < \infty$ folgt

$$\sigma'(x) \leq K\sigma(x)$$

und mit dem Integrationsfaktor e^{-Kx},

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)\mathrm{e}^{-Kx}] = [\sigma'(x) - K\sigma(x)]\mathrm{e}^{-Kx} \leq 0$$

Daher gilt $0 \leq \sigma(x) \leq \sigma(a)\mathrm{e}^{K(x-a)}$. Da $\sigma(a) = 0$ gilt, folgt $\sigma(x) = 0$, $x \in I$. Es folgt, $w(x) = u_1(x) - u_2(x) = 0$, $x \in I$. ■

Def: Wenn jede Lösung $u(x)$ der homogenen DG

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0, \quad x \in I = [a, b]$$

als lineare Kombination $u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dargestellt werden kann, ist $\{u_1(x), u_2(x)\}$ eine Lösungsbasis der DG.

Satz: Seien $u_1(x)$ und $u_2(x)$ Lösungen der obigen homogenen DG, wobei die Vektoren $\langle u_1(a), u_1'(a)\rangle$ und $\langle u_2(a), u_2'(a)\rangle$ linear unabhängig sind. Dann ist $\{u_1(x), u_2(x)\}$ eine Lösungsbasis der DG.

Wronskian

Beweis: Sei $u(x)$ eine Lösung. Konstanten $\{c_1, c_2\}$ sind durch das System

$$\begin{bmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{bmatrix}$$

wohl bestimmt, weil die Zeilen der Matrix linear unabhängig sind. Dann erfüllt $w(x) = u(x) - c_1 u_1(x) - c_2 u_2(x)$

$$w''(x) + p(x)w'(x) + q(x)w(x) = 0, \quad w(a) = 0, w'(a) = 0$$

Nach dem letzten Satz gilt $w(x) = 0$, $x \in I$. Es folgt, $u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$. ■

Def: Der *Wronskian* von 2 differenzierbaren Funktionen f, g sei definiert durch

$$W(f, g; x) = \det \begin{bmatrix} f(x) & f'(x) \\ g(x) & g'(x) \end{bmatrix}$$

Satz: Mit $I = [a, b]$ seien u_1, u_2 Lösungen der homogenen DG

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0, \quad x \in I$$

Dann erfüllt der Wronskian,

$$W(u_1, u_2; x) = W(u_1, u_2; a) \exp\left[-\int_a^x p(t)dt\right]$$

Wronskian

Beweis: Kurze mit $W(x) = W(u_1, u_2; x)$ ab und leite $W(x)$ ab,

$$\begin{aligned} W'(x) &= [u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)]' \\ &= u_1(x)u_2''(x) \pm u_1'(x)u_2'(x) - u_1''(x)u_2(x) \\ &= u_1(x)[-p(x)u_2'(x) - q(x)u_2(x)] \\ &\qquad -[-p(x)u_1'(x) - q(x)u_1(x)]u_2(x) \\ &= -p(x)[u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)] = -p(x)W(x) \end{aligned}$$

Behauptung folgt mit $W'(x) + p(x)W(x) = 0$ und dem Satz 15. ■

Korollar: Unter den Bedingungen des letzten Satzes gilt $W(u_1, u_2; x) > 0$, $\forall x \in I$ oder $W(u_1, u_2; x) < 0$, $\forall x \in I$ oder $W(u_1, u_2; x) = 0$, $\forall x \in I$.

Satz: Wenn $f(x), g(x)$, $x \in I$ linear abhängige differenzierbare Funktionen sind, gilt $W(f, g; x) = 0$, $x \in I$.

Beweis: Wegen linearer Abhängigkeit $\exists \langle c_1, c_2 \rangle \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ mit

$$\begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall x \in I$$

Daher ist die Matrix-Determinante Null, $\forall x \in I$. ■

Wronskian

Bemerkung: Die Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(x) = |x|^3$ sind linear unabhängig in $I = [-1, 1]$, aber $W(f, g; x) = 0$, $x \in I$. Daher im allgemeinen folgt lineare Abhängigkeit nicht daraus, dass der Wronskian überall Null ist.

Satz: Mit $I = [a, b]$ seien $u_1(x)$ und $u_2(x)$ linear unabhängige Lösungen der homogenen DG,

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0, \quad x \in I$$

Dann gilt $W(u_1, u_2; x) \neq 0$, $\forall x \in I$.

Beweis: Nimm an, $\exists x_0 \in [a, b]$ mit $W(u_1, u_2; x_0) = 0$. Nach dem Korollar 41 gilt $W(u_1, u_2; x) = 0$, $\forall x \in I$. Es folgen

$$u_1'(x)/u_1(x) = u_2'(x)/u_2(x), \quad x \in I$$

$$\ln|u_1(x)| = \int u_1'(x)/u_1(x) = \int u_2'(x)/u_2(x) = \ln|u_2(x)| + k$$

und mit $K = \pm e^k$ folgt

$$u_1(x) = Ku_2(x), \quad \forall x \in I$$

ein Widerspruch der linearen Unabhängigkeit. ■

Wronskian

- Nimm an, eine Lösung $f(x)$ der homogenen DG
$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0, \quad x \in I$$
ist bekannt, und eine zweite Lösung $g(x)$ ist gesucht.
Nach dem obigen Satz erfüllt der Wronskian
$$W(f, g; x) = k\mathrm{e}^{-P(x)} \quad \text{wobei} \quad k \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = p(x)$$
Nach der Beziehung
$$\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right]' = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2} = \frac{W(f, g; x)}{f(x)^2} = \frac{k\mathrm{e}^{-P(x)}}{f(x)^2}$$
ist mit $k = 1$
$$g(x) = f(x) \int \frac{\mathrm{e}^{-P(x)}}{f(x)^2} dx$$
eine zweite Lösung.
- Beispiel: $f(x) = \mathrm{e}^x$ ist eine Lösung der homogenen DG
$$u''(x) - 2u'(x) + u(x) = 0, \quad x \in I$$
mit $p(x) = -2$ und $P(x) = -2x$. Eine zweite Lösung ist
$$g(x) = \mathrm{e}^x \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x)^2} dx = x\mathrm{e}^x$$

Trennungssatz von Sturm

Satz: Wenn $f(x)$ und $g(x)$ linear unabhängige Lösungen der homogenen DG

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0, \quad x \in I$$

sind, dann in I hat $f(x)$ eine Nullstelle zwischen benachbarten Nullstellen von $g(x)$.

Beweis: Angenommen sind x_1, x_2 benachbarte Nullstellen von g. Da f und g linear unabhängige Lösungen sind, erfüllt der Wronskian $W(f, g; x) \neq 0$, $x \in I$, und daher folgt

$$f(x_i)g'(x_i) = W(f, g; x_i) \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

Es folgt, $f(x_i), g'(x_i) \neq 0$, $i = 1, 2$. Weiters gilt $g'(x_1)g'(x_2) < 0$, da es sonst eine Nullstelle für g in (x_1, x_2) gäbe. Laut dem Korollar 41 hat $W(f, g; x)$ immer das gleiche Vorzeichen in I. Es folgt, $f(x_1)f(x_2) < 0$. Als Lösung der DG ist f differenzierbar in I, und daher gilt $f \in \mathcal{C}(I)$. Laut dem Zwischenwertsatz $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$, wobei $f(x_0) = 0$. ■

- DG ist $u''(x) + \kappa^2 u(x) = 0$ und die linear unabhängige Lösungen $\sin(\kappa x)$ und $\cos(\kappa x)$ haben alternierende Nullstellen.

Greensche Funktionen für Anfangswertprobleme

- Mit $I = [a, b]$ soll nun das inhomogene DG gelöst werden,

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = r(t), \quad t \in I, \quad u(a) = u'(a) = 0$$

Def: Wenn die Lösung so dargestellt werden kann,

$$u(t) = \int_a^t G(t, \tau) r(\tau) d\tau$$

ist $G(t, \tau)$ eine *Greensche Funktion* zu diesem Anfangswertproblem.

- Beispiel: Bis zur Zeit τ gibt es für ein Masse-Feder-System keine äußere Kraft und die Masse liegt im Ruhestand, $u_0 = 0$. Zur Zeit τ bekommt die Masse plötzlich die Geschwindigkeit u_1. Die Lösung des Problems 37 (mit $4q > p^2$, $\lambda_\pm = \mu \pm \imath\nu$) ist
$u(t) = 0, \quad t \leq \tau, \qquad u(t) = \mathrm{e}^{\mu(t-\tau)} \sin[\nu(t-\tau)] u_1/\nu, \quad t \geq \tau$
Wenn das System zu den Zeiten $\tau_k = k\Delta\tau$, $k \in \mathbb{N}$, $\Delta\tau \in \mathbb{R}^+$, weitere Geschwindigkeitsanstösse $r(\tau_k)\Delta\tau$ bekommt, wird die Auslenkung $u(t)$ eine Summe solcher Funktionen. Der Limus mit $\Delta\tau \to 0$ ist
$$u(t) = \int_0^t G(t, \tau) r(\tau) d\tau$$
mit Greenscher Funktion $G(t, \tau) = \mathrm{e}^{\mu(t-\tau)} \sin[\nu(t-\tau)]/\nu$.

Greensche Funktionen für Anfangswertprobleme

Satz: Für $I = [a, b]$, $p, q, r \in \mathcal{C}(I)$, sei $G(t, \tau)$ definiert durch

1. $G(t, \tau) = 0$, $a \leq t \leq \tau \leq b$,
2. Für $\tau \geq a$ fixiert und $t \in (\tau, b]$ erfüllt G,

$$[LG](t, \tau) = \partial_t^2 G(t, \tau) + p(t)\partial_t G(t, \tau) + q(t)G(t, \tau) = 0$$
$$G(\tau, \tau) = 0, \quad \partial_t G(t, \tau)|_{t=\tau} = 1$$

Dann löst

$$u(t) = \int_a^t G(t, \tau)r(\tau)d\tau = \int_a^b G(t, \tau)r(\tau)d\tau$$

das Anfangswertproblem

$$[Lu](t) = u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = r(t), \quad u(a) = u'(a) = 0$$

Beweis: Nach der Leibniz Regel,

$$u'(t) = G(t, t)|_{=0} r(t) + \int_a^t \partial_t G(t, \tau)r(\tau)d\tau$$
$$u''(t) = \partial_t G(t, t)|_{=1} r(t) + \int_a^t \partial_t^2 G(t, \tau)r(\tau)d\tau$$

Es folgt

$$[Lu](t) = r(t) + \int_a^t [LG](t, \tau)|_{=0} r(\tau)d\tau = r(t) \qquad \blacksquare$$

Greensche Funktionen für Anfangswertprobleme

Hausaufgabe: Zeige für das Masse-Feder-System, $G(t,\tau) = \mathrm{e}^{\mu(t-\tau)} \sin[\nu(t-\tau)]/\nu$ erfüllt die Bedingungen des letzten Satzes.

- Sei $[Lu](t) = u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t)$. Man löst das Anfangswertproblem mit inhomogenen Anfangswerten,
$$[Lv](t) = s(t), \quad v(a) = v_0, v'(a) = v_1$$
mit $v(t) = u(t) + \ell(t)$, wobei $\ell(t) = v_0 + v_1(t-a)$ und mit $r(t) = s(t) - [L\ell](t)$ löst $u(t)$ das Anfangswertproblem mit homogenen Anfangswerten,
$$[Lu](t) = r(t), \quad u(a) = u'(a) = 0$$
- Um die Greensche Funktion zu konstruieren, braucht man zwei linear unabhängige Lösungen u_1, u_2 der homogenen DG $Lu = 0$. Da $G(t,\tau)$ eine Lösung der homogenen DG für fixiertes τ ist,
$$G(t,\tau) = c_1(\tau)u_1(t) + c_2(\tau)u_2(t)$$
und die τ-abhängigen Koeffizienten c_1, c_2 werden durch die Nebenbedigungen, $G(\tau,\tau) = 0$, $\partial_t G(t,\tau)|_{t=\tau} = 1$, d.h.
$$c_1(\tau) = -u_2(\tau)/W(u_1,u_2;\tau), \quad c_2(\tau) = u_1(\tau)/W(u_1,u_2;\tau)$$

Variation der Konstanten

Korollar: Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$u(t) = \int_a^t \frac{u_1(\tau)u_2(t) - u_2(\tau)u_1(t)}{u_1(\tau)u_2'(\tau) - u_2(\tau)u_1'(\tau)} r(\tau)d\tau$$

wobei u_1, u_2 zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen DG $Lu = 0$ sind.

- Diese Formel kann auch durch die Methode der *Variation der Konstanten* hergeleitet werden:
- Mit $[Lu](x) = u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)$, $I = [a, b]$, $p, q, r \in \mathcal{C}(I)$ seien u_1, u_2 zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen DG $Lu = 0$.
- Der Ansatz hier ist, falls sie existieren solte, sucht man eine Lösung u der inhomogenen DG $Lu = r$ mit der Form,
$$u(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x)$$
wobei c_1, c_2 nicht mehr Konstanten sind sondern Funktionen.

Variation der Konstanten

- Durch Einsetzen dieser Formel,

$$
\begin{aligned}
r(x) &= u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) \\
&= [c_1''(x)u_1(x) + 2c_1'(x)u_1'(x) + c_1(x)u_1''(x)] \\
&+ [c_2''(x)u_2(x) + 2c_2'(x)u_2'(x) + c_2(x)u_2''(x)] \\
&+ p(x)[c_1'(x)u_1(x) + c_1(x)u_1'(x) \\
&\qquad + c_2'(x)u_2(x) + c_2(x)u_2'(x)] \\
&+ q(x)[c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x)] \\
&= [c_1'(x)u_1(x) + c_2'(x)u_2(x)]' \\
&+ [c_1'(x)u_1(x) + c_2'(x)u_2(x)]p(x) \\
&+ [c_1'(x)u_1'(x) + c_2'(x)u_2'(x)]
\end{aligned}
$$

bekommt man eine Lösung u durch die obige Formel, wenn c_1, c_2 durch das System bestimmt werden,

$$
\begin{bmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix}
$$

d.h.

$$
c_1(x) = -\int \frac{u_2(x)r(x)}{W(u_1, u_2; x)} dx, \quad c_2(x) = \int \frac{u_1(x)r(x)}{W(u_1, u_2; x)} dx
$$

Greensche Funktionen für Randwertprobleme

- Mit $I = [a, b]$ soll nun das inhomogene DG gelöst werden,

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = r(x), \quad x \in I, \quad u(a) = u(b) = 0$$

Für $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$ siehe die Methode 47.

Def: Wenn die Lösung so dargestellt werden kann,

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) d\xi$$

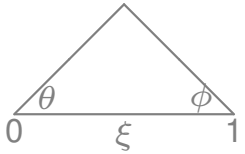
ist $G(x, \xi)$ eine *Greensche Funktion* zu diesem Randwertproblem.

- Beispiel: Eine Saite ist an beiden Enden $x = 0$ und $x = 1$ befestigt, und sie wird mit äußerer Kraft κ an der Stelle $\xi \in (0, 1)$ belastet. Wegen der Spannung $T \in \mathbb{R}^+$ steht sie im Gleichgewicht mit der Auslenkung $u(x)$, die stückweise linear ist. Die gegenwirkende innere Kraft der Saite ist die senkrechte Komponente der Spannungskraft

$$\kappa = T[\sin(\theta) + \sin(\phi)] \approx T[u'(\xi^-) - u'(\xi^+)]$$

Es folgt

$$u(x) = \begin{cases} x(1-\xi)\kappa/T, & 0 \le x \le \xi \\ \xi(1-x)\kappa/T, & \xi \le x \le 1 \end{cases}$$



Greensche Funktionen für Randwertprobleme

Ähnlich für eine äußere Kraft $\kappa(x)\Delta x$ in $[x, x+\Delta x] \subset [a,b]$ ist die Kräftebilanz

$$\kappa(x)\Delta x = T[u'(x^-) - u'(x+\Delta x^+)]$$

oder mit $\Delta x \to 0$ ergibt sich das Randwertproblem,

$$-Tu''(x) = \kappa(x), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Zur Lösung dieses Problems stellt man sich vor, die Saite wird in den Punkten $\xi_k = k\Delta\xi$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\Delta\xi \in \mathbb{R}^+$ mit der Kraft $\kappa(\xi_k)\Delta\xi$ belastet, und die Auslenkung $u(x)$ wird eine Summe obiger Funktionen. Der Limus mit $\Delta\xi \to 0$ ist

$$u(x) = \int_0^1 G(x,\xi) r(\xi) d\xi$$

mit $r(x) = -\kappa(x)/T$ und der Greenschen Funktion

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x(\xi-1), & 0 \le x \le \xi \\ \xi(x-1), & \xi \le x \le 1. \end{cases}$$

Def: Wenn es eine Lösung $u(x) \neq 0$ des homogenen Randwertproblems gibt,

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0, \quad x \in [a,b], \quad u(a) = u(b) = 0$$

sind die Endpunkte $\{a,b\}$ *konjugiert*.

Greensche Funktionen für Randwertprobleme

- Im allgemeinen wird $G(x,\xi)$ durch folgende Bedingungen konstruiert:

1. Für $a \le x < \xi$ und $\xi < x \le b$ gilt
$$[LG](x,\xi) = \partial_x^2 G(x,\xi) + p(x)\partial_x G(x,\xi) + q(x)G(x,\xi) = 0$$
2. Für $\xi \in [a,b]$ gilt
$$G(a,\xi) = G(b,\xi) = 0$$
3. $G \in \mathcal{C}([a,b]\times[a,b])$ aber
$$\partial_x G(x,\xi)|_{x=\xi^+} - \partial_x G(x,\xi)|_{x=\xi^-} = 1, \quad \xi \in (a,b)$$

- Seien f und g zwei linear unabhängige Lösungen der DG
$$[Lu](x) = u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0, \quad x \in [a,b]$$
wobei $f(a) = 0 = g(b)$.
- Dann erfüllt
$$G(x,\xi) = \begin{cases} f(x)g(\xi)/W(f,g,\xi), & a \le x \le \xi \\ f(\xi)g(x)/W(f,g,\xi), & \xi \le x \le b \end{cases}$$
die obigen Bedingungen.

Hausaufgabe: Zeige, $G(x,\xi)$ für die Saite erfüllt diese Bedingungen.

Greensche Funktionen für Randwertprobleme

Satz: Für $I = [a, b]$, $p, q, r \in \mathcal{C}(I)$ und $\{a, b\}$ nicht konjugiert seien L und G wie oben definiert. Dann ist die einzige Lösung des Randwertproblems, $Lu = r$, $u(a) = u(b) = 0$, gegeben durch

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) d\xi$$

Beweis: Mit der Darstellung,

$$u(x) = \int_a^x G(x, \xi) r(\xi) d\xi + \int_x^b G(x, \xi) r(\xi) d\xi$$

folgt mit der Leibniz Regel,

$$u'(x) = \int_a^x \partial_x G(x, \xi) r(\xi) d\xi + \int_x^b \partial_x G(x, \xi) r(\xi) d\xi + [G(x, x^-) r(x) - G(x, x^+) r(x)]_{=0}$$

und

$$u''(x) = \int_a^x \partial_x^2 G(x, \xi) r(\xi) d\xi + \int_x^b \partial_x^2 G(x, \xi) r(\xi) d\xi + r(x)[\partial_x G(x, x^-) - \partial_x G(x, x^+)]_{=W(f,g,x)/W(f,g,x)=1}$$

Es folgt,

$$[Lu](x) = \int_a^x [LG](x, \xi) r(\xi) d\xi + \int_x^b [LG](x, \xi) r(\xi) d\xi + r(x) = r(x)$$

Die Randbedingungen folgen aus $G(a, \xi) = G(b, \xi) = 0$, $\xi \in (a, b)$. Wenn es eine Lösung $v \neq u$ gäbe, wäre $u - v \neq 0$ eine Lösung der homogenen DG, aber $\{a, b\}$ sind nicht konjugiert. ■

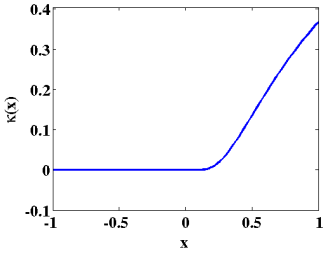
Dirac Delta Funktion

Def: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist *reell analytisch* in x_0 wenn $\exists \epsilon > 0$ wobei $f \in C^\infty(B(x_0, \epsilon))$ und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n / n! \quad x \in B(x_0, \epsilon)$$

- Beispiel: Die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ erfüllt $f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^x|_{x=0} = 1$ und $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Beispiel: Die Funktion

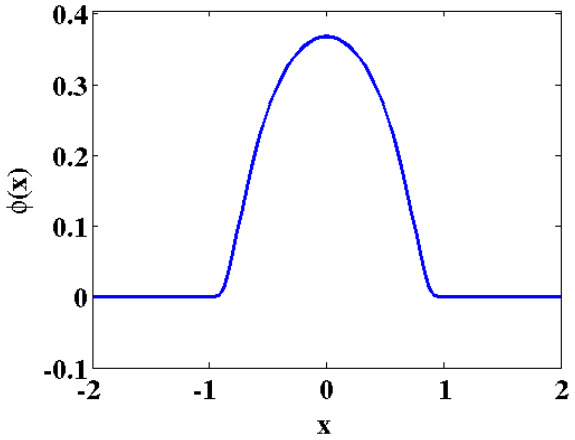
$$\kappa(x) = \begin{cases} \exp(-1/x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$



erfüllt $\kappa \in C^\infty(\mathbb{R})$ aber $\kappa^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, (Probe!) und daher ist κ reell analytisch in keiner Umgebung von $x_0 = 0$.

- Die Funktion $\varphi(x) = c\phi(x)$ mit

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \begin{cases} \exp[1/(x^2 - 1)], & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \\ 1/c &= \int_{-1}^{+1} \phi(t)dt \end{aligned}$$



erfüllt $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 1$.

Dirac Delta Funktion

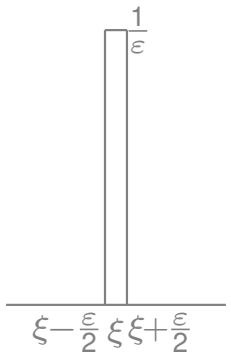
- Die Funktion
$$\delta_\epsilon(x) = \varphi(x/\epsilon)/\epsilon$$
erfüllt $\delta_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$
$$\delta_\epsilon(x) = 0, \quad |x| \geq \epsilon$$
und
$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta_\epsilon(t)dt = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \varphi(t/\epsilon)dt/\epsilon = \int_{-1}^{+1} \varphi(s)ds = 1$$
- Für jede Funktion $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ folgt mit dem Mittelwertsatz für Integrale, $\exists x_\epsilon \in (-\epsilon, +\epsilon)$ wobei
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta_\epsilon(x)dx = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f(x)\delta_\epsilon(x)dx = f(x_\epsilon) \underbrace{\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta_\epsilon(x)dx}_{=1} \xrightarrow{\epsilon\to 0} f(0)$$
Ähnlich gilt
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta_\epsilon(x - x_0)dx \xrightarrow{\epsilon\to 0} f(x_0)$$
- Man versteht die *Dirac Delta Funktion* $\delta(x)$ als der Limus $\delta_\epsilon(x) \xrightarrow{\epsilon\to 0} \delta(x)$ mit der Eigenschaft
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$

Greensche Funktionen und die Dirac Delta Funktion

- Erstens wird eine Greensche Funktion G so konstruiert, dass
$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi) r(\xi)$$
die Anfangs- oder Randbedingungen erfüllt, d.h.
$$G(x,\xi > x) = 0 \Rightarrow u(a) = 0, \quad G(x,x) = 0 \Rightarrow u'(a) = 0$$
oder
$$G(a,\xi) = G(b,\xi) \Rightarrow u(a) = u(b) = 0$$
- Zweitens mit
$$[Lu](x) = u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x)$$
und
$$[LG](x,\xi) = \partial_x^2 G(x,\xi) + p(x)\partial_x G(x,\xi) + q(x)G(x,\xi)$$
soll G formell erfüllen
$$[LG](x,\xi) = \delta(x-\xi)$$
damit formell gilt
$$[Lu](x) = \int_a^b [LG](x,\xi) r(\xi) d\xi = \int_a^b \delta(x-\xi) r(\xi) d\xi = r(x)$$
- Beispiel: Für $p = q = 0$, $u(0) = u(1) = 0$ siehe [7].

Greensche Funktionen und die Dirac Delta Funktion

- Alternative Konstruktion: $G_\varepsilon(x,\xi)$ erfüllt
  $G_\varepsilon(0,\xi) = G_\varepsilon(1,\xi) = 0$,



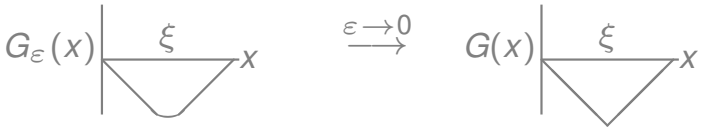
$$\partial_x^2 G_\varepsilon(x,\xi) = \hat{\delta}_\varepsilon(x-\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \xi - \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon}, & \xi - \frac{\varepsilon}{2} \le x \le \xi + \frac{\varepsilon}{2} \\ 0, & \xi + \frac{\varepsilon}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

und ist gegeben durch

$$G_\varepsilon(x,\xi) = \begin{cases} (\xi-1)x, & 0 \le x \le \xi - \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{2\varepsilon}[x-\xi+\varepsilon(\xi-\frac{1}{2})]^2 + \xi(\xi-1)(1-\frac{\varepsilon}{2}), & \xi - \frac{\varepsilon}{2} \le x \le \xi + \frac{\varepsilon}{2} \\ \xi(x-1), & \xi + \frac{\varepsilon}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

die erfüllt $G_\varepsilon(\cdot,\xi) \in \mathcal{C}^1([0,1])$ und

$$G_\varepsilon(x,\xi) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} G(x,\xi) = \begin{cases} (\xi-1)x, & 0 \le x \le \xi \\ \xi(x-1), & \xi \le x \le 1 \end{cases}$$



Variationelle Rechnungen

- Eine Saite mit Spannung T in $x \in [0,1]$ wird mit Kraft pro Längeneinheit $r(x)$ belastet während sie an den Enden $x = 0, 1$ befestigt bleibt, und $u(x)$ ist die Auslenkung im Gleichgewicht.
- Die Auslenkung $u(x)$ soll minimieren (siehe Modellierung),
$$J(u) = \int_0^1 \tfrac{1}{2} T |u'(x)|^2 dx - \int_0^1 r(x)u(x)dx$$
d.h. eine Summe der inneren elastischen Energie der Saite und der gegenwirkenden Arbeit der äußeren Kraft.
- Ein minimierendes $u(x) \in \mathcal{C}_0^2([0,1])$ muss erfüllen

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\delta J}{\delta u}(u;v) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{1}{2} T |u'(x) + \epsilon v'(x)|^2 - r(x)[u(x) + \epsilon v(x)] \right] dx \right. \\
&\qquad \left. - \int_0^1 \left[\frac{1}{2} T |u'(x)|^2 - r(x)u(x) \right] dx \right\} \\
&= \int_0^1 [T u'(x) v'(x) - r(x) v(x)] dx \\
&= \underbrace{T u'(x) v(x)|_0^1}_{=0} - \int_0^1 [T u''(x) + r(x)] v(x) dx, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^\infty([0,1])
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(u + \epsilon v) - J(u)}{\epsilon}$$

Variationelle Rechnungen

d.h. für jede glatte (und befestigte) Störung $v \in C_0^\infty([0,1])$,

$$0 = \frac{\delta J}{\delta u}(u; v) = -\int_0^1 [Tu''(x) + r(x)]v(x)dx$$

- Insbesondere für $f(x) = -[Tu''(x) + r(x)] \in \mathcal{C}([0,1])$, $x_0 \in (0,1)$, $v(x) = \delta_\epsilon(x - x_0)$, $\exists x_\epsilon \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ wobei

$$0 = \int_0^1 f(x)\delta_\epsilon(x - x_0)dx = f(x_\epsilon) \underbrace{\int_0^1 \delta_\epsilon(x - x_0)dx}_{=1} \xrightarrow{\epsilon \to 0} f(x_0)$$

- Da x_0 beliebig ist, muss u erfüllen

$$-Tu''(x) = r(x), \quad x \in [0,1], \qquad u(x) = 0, \quad x = 0, 1$$

Hausaufgabe: Ein Fahnenmast mit Elastizitätsmodul E und Flächenträgheitsmoment I (durch einen Querschnitt) hat die waagerechte Auslenkung $u(x)$ in $x \in [0,1]$, wenn er mit waagerechter Kraft pro Längeneinheit $r(x)$ belastet wird und am Boden mit $u(0) = u'(0) = 0$ befestigt bleibt. Minimiert wird

$$J(u) = \int_0^1 [\tfrac{1}{2}EI|u''(x)|^2 - r(x)u(x)]dx.$$

Zeige, $u \in \mathcal{C}^4([0,1])$ muss die Balkengleichung erfüllen

$$[EIu''(x)]'' = r(x), \quad x \in [0,1], \quad u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(1) = u'''(1) = 0$$

Lineare DG mit Konstanten Koeffizienten

- In $I = [a, b]$ soll $Lu = r$ gelöst werden, wobei
$$[Lu](x) = u^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i u^{(n-i)}(x)$$
und $\{a_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{R}$. Zuerst wird die homogene DG untersucht.
- Das *charakteristische Polynom* der DG ist
$$P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{n-i}$$
- Das charakteristische Polynom kann so faktorisiert werden,
$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}, \quad m \le n = \sum_{i=1}^{m} k_i$$
- Die DG läßt sich so schreiben,
$$Lu = P(D)u, \quad [Du](x) = D_x u(x) = u'(x)$$
- Wenn $P(\lambda_i) = 0$ dann folgt $Lu_i = 0$ mit $u_i(x) = \mathrm{e}^{\lambda_i x}$. Wenn $\lambda_i = \mu_i + \imath\nu_i$, $\mu_i, \nu_i \in \mathbb{R}$, gelten auch $Lv_i = Lw_i = 0$ mit $v_i(x) = \mathrm{e}^{\mu_i x} \cos(\nu_i x)$ und $w_i(x) = \mathrm{e}^{\mu_i x} \sin(\nu_i x)$.

Satz: Wenn $P(\lambda) = g(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$, $g(\lambda_i) \neq 0$, folgen $Lu_{ij} = 0$ mit $u_{ij}(x) = x^j \mathrm{e}^{\lambda_i x}$, $j = 0, \ldots, k_i - 1$.

Beweis: Aus $[D_x - \lambda_i](x^j \mathrm{e}^{\lambda_i x}) = j x^{j-1} \mathrm{e}^{\lambda_i x}$ folgt nach Iterieren $[D_x - \lambda_i]^{k_i}(x^j \mathrm{e}^{\lambda_i x}) = 0$ für $j < k_i$. Es gilt daher
$$Lu_{ij} = P(D)u_{ij} = g(D)[D - \lambda_i]^{k_i} u_{ij} = 0. \qquad \blacksquare$$

Reele und Komplexe Lösungen

Satz: Sei $u(x) = v(x) + \imath w(x)$ mit $v(x) = v(x)^*$, $w(x) = w(x)^*$ und $Lu = 0$. Dann gelten $Lv = Lw = 0$.

Beweis: Es gilt $Lu^* = [Lu]^* = 0^* = 0$. Da L linear ist, folgen
$0 = (Lu + Lu^*)/2 = L(u + u^*)/2 = Lv$ und
$0 = (Lu - Lu^*)/(2\imath) = L(u - u^*)/(2\imath) = Lw$. ■

Korollar: Wenn $P(\lambda) = 0$, $\lambda = \mu + \imath\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, folgen $Lu = Lv = Lw = 0$ mit $u(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\cos(\nu x) + \imath \mathrm{e}^{\mu x}\sin(\nu x)$, $v(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\cos(\nu x)$ und $w(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\sin(\nu x)$.

Korollar: Wenn $P(\lambda) = g(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$, $g(\lambda_i) \neq 0$, $\lambda_i = \mu_i + \imath\nu_i$, $\mu_i, \nu_i \in \mathbb{R}$, folgen $Lu_{ij} = Lv_{ij} = Lw_{ij} = 0$, $0 \leq j \leq k_i - 1$, mit $u_{ij}(x) = x^j \mathrm{e}^{\mu_i x}\cos(\nu_i x) + \imath x^j \mathrm{e}^{\mu_i x}\sin(\nu_i x)$, $v_{ij}(x) = x^j \mathrm{e}^{\mu_i x}\cos(\nu_i x)$ und $w_{ij}(x) = x^j \mathrm{e}^{\mu_i x}\sin(\nu_i x)$.

- Beispiel: Durch die Substitutionen $x = \ln(t)$, $D_x = tD_t$, $\mathrm{e}^{\lambda x} = t^\lambda$, $u(x) = v(\mathrm{e}^x)$, wird die homogene *Eulersche* DG,
$$t^n v^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n b_i t^{n-i} v^{(n-i)}(t) = 0$$
in die Form $Lu = 0$ transformiert. Lösungsansatz: $v(t) = \ln(t)^j t^\lambda$.

Linear Unabhängige Lösungen

Satz: Paarweise verschiedene Funktionen $u_{ij}(x) = x^j \mathrm{e}^{\lambda_i x}$, $i = 1, \ldots, m$, $j \in N \subset \mathbb{N}_0$ ($\#N < \infty$), sind linear unabhängig über $\mathbb{C}$ in jedem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Beweis: Wenn $\{c_{ij}\} \subset \mathbb{C}$ und $\sum_{i,j} c_{ij} u_{ij}(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, folgt $\sum_{i,j} c_{ij} u_{ij}^{(l)}(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, $\forall l \in \mathbb{N}_0$. Für gegebene λ_i sei j_i die höchste in der Summe vorkommende Potenz $c_{i,j_i} x^{j_i} \mathrm{e}^{\lambda_i x}$. Sei

$$q(D) = (D - \lambda_i)^{j_i} \prod_{k \neq i} (D - \lambda_k)^{j_k + 1}$$

Mit $(D_x - \lambda_i)[x^{j_i} \mathrm{e}^{\lambda_i x}] = j_i x^{j_i - 1} \mathrm{e}^{\lambda_i x}, \ldots, (D_x - \lambda_i)^{j_i}[x^{j_i} \mathrm{e}^{\lambda_i x}] = j_i! \mathrm{e}^{\lambda_i x}$ und $(D_x - \lambda_k)^{j_k + 1}[x^{j_k} \mathrm{e}^{\lambda_k x}] = 0$ folgt

$$0 = q(D_x) \sum_{i,j} c_{ij} u_{ij}(x) = c_{i,j_i} \underbrace{q(D_x) x^{j_i} \mathrm{e}^{\lambda_i x}}_{\neq 0}$$

und $c_{i,j_i} = 0$ ist ein Widerspruch. ■

Kollorar: Wenn $\{\lambda_i\}_{i=1}^m = \{\mu_i \pm \imath \nu_i\}_{i=1}^m$, $\{\mu_i, \nu_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$, sind paarweise verschiedene Funktionen $u_{ij} = x^j \mathrm{e}^{\mu_i x} \cos(\nu_i x)$, $v_{ij} = x^j \mathrm{e}^{\mu_i x} \sin(\lambda_i x)$, $i = 1, \ldots, m$, $j \in N \subset \mathbb{N}_0$ ($\#N < \infty$), linear unabhängig über $\mathbb{R}$ in jedem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Linear Unabhängige Lösungen

Beweis: Wenn $\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\} \subset \mathbb{R}$ und $\sum_{i,j}[\alpha_{ij}u_{ij}(x) + \beta_{ij}v_{ij}(x)] = 0$, $\forall x \in (a, b)$, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i,j}\left[\alpha_{ij}x^j e^{\mu_i x}\frac{e^{\imath\nu_i x} + e^{-\imath\nu_i x}}{2} + \beta_{ij}x^j e^{\mu_i x}\frac{e^{\imath\nu_i x} - e^{-\imath\nu_i x}}{2\imath}\right] \\ &= \sum_{i,j}\left[\gamma_{ij}x^j e^{(\mu_i+\imath\nu_i)x} + \delta_{ij}x^j e^{(\mu_i-\imath\nu_i)x}\right] \end{aligned}$$

wobei $\gamma_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{2} + \frac{\beta_{ij}}{2\imath}$ und $\delta_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{2} - \frac{\beta_{ij}}{2\imath}$. Laut dem letzten Satz gilt $\gamma_{ij} = \delta_{ij} = 0$. Es folgen, $\alpha_{ij} = \gamma_{ij} + \delta_{ij} = 0$ und $\beta_{ij} = \imath(\gamma_{ij} - \delta_{ij}) = 0$. ■

Satz: Für die homogene DG $Lu = 0$ mit charakteristischem Polynom

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)^{k_i}, \quad m \le n = \sum_{i=1}^m k_i,$$

und

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^m = \{\mu_i + \imath\nu_i\}_{i=1}^m, \quad \{\mu_i, \nu_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R},$$

gibt es n Lösungen $(\lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \nu_i = 0)$

$$\{x^j e^{\mu_i x}\cos(\nu_i x), x^j e^{\mu_i x}\sin(\nu_i x), i = 1, \ldots, m, j = 0, \ldots, k_i - 1\},$$

die linear unabhängig über $\mathbb{R}$ in jedem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sind.

(Beweis folgt aus obigen Sätzen.)

Lösungsbasis

Satz: $u(x) = 0$ ist die einzige Lösung des Anfangswertproblems

$$[Lu](x) = 0, \quad x \in [a, b], \quad u(a) = \cdots = u^{(n-1)}(a) = 0$$

Beweis: Sei $u(x)$ eine Lösung und setze $\sigma(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [u^{(i)}(x)]^2$. Es folgt aus der Ungleichung,

$$\sigma'(x) = 2\sum_{i=0}^{n-2} u^{(i)}(x)u^{(i+1)}(x) + 2u^{(n-1)}(x)u^{(n)}(x)$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n-2}[u^{(i)}(x)^2 + u^{(i+1)}(x)^2] - 2u^{(n-1)}(x)\sum_{i=1}^{n} a_i u^{(n-i)}(x)$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n-2}[u^{(i)}(x)^2 + u^{(i+1)}(x)^2] + \sum_{i=1}^{n} |a_i|[u^{(n-i)}(x)^2 + u^{(n-1)}(x)^2]$$
$$\leq K\sigma(x), \quad K = 2(1 + \sum_{i=1}^{n} |a_i|)$$

$\sigma(x)\mathrm{e}^{-Kx}$ ist nicht steigend. Wegen $\sigma(a) = 0$ folgt $u(x) = 0$. ■

Satz: Für das Anfangswertproblem, $[Lu](x) = 0$, $x \in I$, $I = [a, b]$, $u^{(i)}(a) = u_i$, $i = 0, \ldots, n-1$, bilden Lösungen $\{u_j(x)\}_{j=1}^{n}$ eine Lösungsbasis wenn sie linear unabhängig sind.

Beweis: Die Matrix $A = \{u_j^{(i-1)}(a)\}_{i,j=1}^{n}$ ist regulär. Sonst $\exists \boldsymbol{\kappa} = \{\kappa_j\}_{j=1}^{n}$ wobei $A\boldsymbol{\kappa} = 0$, und $v(x) = \sum_{j=1}^{n} \kappa_j u_j(x)$ erfüllt $Lv = 0$ und $v^{(i)}(a) = 0$, $i = 0, \ldots, n-1$. Nach dem letzen Satz folgt $v(x) = 0$,

Stabilität

aber die lineare Unabhängigkeit der $\{u_j\}_{j=1}^n$ wird verletzt. Sei u eine Lösung. Setze $\{c_j\}_{j=1}^n = \boldsymbol{c} = A^{-1}\boldsymbol{u}$ wobei $\boldsymbol{u} = \{u^{(i)}(a)\}_{i=0}^{n-1}$. Dann $w(x) = u(x) - \sum_{j=1}^n c_j u_j(x)$ erfüllt $[Lw](x) = 0$, $x \in [a,b]$, $w^{(i)}(a) = 0$, $i = 0, \ldots, n-1$. Nach dem letzten Satz gilt $w(x) = 0$, $x \in I$. Es folgt $u(x) = \sum_{j=1}^n c_j u_j(x)$. ■

Korollar: Für die homogene DG $[Lu](x) = 0$, $x \in [a,b]$, mit charakteristischem Polynom

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)^{k_i}, \quad m \le n = \sum_{i=1}^m k_i,$$

und

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^m = \{\mu_i + \imath\nu_i\}_{i=1}^m, \quad \{\mu_i, \nu_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R},$$

bilden die n Lösungen $(\lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \nu_i = 0)$

$$\{x^j e^{\mu_i x}\cos(\nu_i x), x^j e^{\mu_i x}\sin(\nu_i x), i = 1, \ldots, m, j = 0, \ldots, k_i - 1\},$$

eine Lösungsbasis.

Def: Für die homogene DG $Lu = 0$ ist das Gleichgewicht $u_0 = 0$ *streng stabil* wenn jede Lösung $u(t)$ erfüllt $u(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} u_0$. Das Gleichgewicht ist *stabil* wenn $\exists B > 0$ s.d. $|u(t) - u_0| \le B$, $\forall t > 0$. Sonst ist das Gleichgewicht *instabil*.

Stabilität

Satz: Für die homogene DG $Lu = 0$ mit charakteristischem Polynom

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{k_i}, \quad m \leq n = \sum_{i=1}^{m} k_i,$$

und

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{m} = \{\mu_i + \imath\nu_i\}_{i=1}^{m}, \quad \{\mu_i, \nu_i\}_{i=1}^{m} \subset \mathbb{R},$$

ist das Gleichgewicht $u_0 = 0$ stabil genau dann wenn $\Re\lambda_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$ und $\Re\lambda_i < 0$ falls $k_i > 1$. Das Gleichgewicht ist streng stabil genau dann wenn $\Re\lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Beweis: Die n Lösungen $(\lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \nu_i = 0)$

$$\{t^j \mathrm{e}^{\mu_i t} \cos(\nu_i t), t^j \mathrm{e}^{\mu_i t} \sin(\nu_i t), i = 1, \ldots, m, j = 0, \ldots, k_i - 1\},$$

bilden eine Lösungsbasis. Das Gleichgewicht ist stabil genau dann wenn jede dieser Funktionen beschränkt bleibt. Diese Bedingung wird erfüllt genau dann wenn $\Re\lambda_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$ und $\Re\lambda_i < 0$ falls $k_i > 1$. Das Gleichgewicht ist streng stabil genau dann wenn jede dieser Funktionen für $t \to \infty$ verschwindet. Diese Bedingung wird erfüllt genau dann wenn $\Re\lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, m$. ■

Inhomogene DG

- Mit $I = [a, b]$ und $r \in \mathcal{C}(I)$ soll nun $Lu = r$ gelöst werden.

Def: $\mathcal{P}^k(I)$ ist die Menge der Funktionen, die im Intervall I ein Polynom $k$ten Grades sind. $\mathcal{P}^k = \mathcal{P}^k(\mathbb{R})$.

- Im besonderen Fall $r(t) = \sum_i p_i(t)\mathrm{e}^{\lambda_i t}$, $p_k \in \mathcal{P}^{s_k}$, gibt es eine einfache Lösungsmethode.
- Für v ausreichend glatt gelten
$$(D_t - \lambda)[\mathrm{e}^{\lambda t} v(t)] = \mathrm{e}^{\lambda t} v'(t)$$
und
$$(D_t - \lambda_1)[\mathrm{e}^{\lambda t} v(t)] = \mathrm{e}^{\lambda t}[(\lambda - \lambda_1)v(t) + v'(t)]$$
Beweis für:

Satz: Wenn $f \in \mathcal{P}^s$ gilt, hat die DG $(D_t - \lambda)u(t) = f(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$ eine Lösung der Form $u(t) = g(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$ mit $g \in \mathcal{P}^{s+1}$. Wenn $\lambda_1 \neq \lambda$ gilt, hat die DG $(D_t - \lambda_1)u(t) = f(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$ eine Lösung der Form $u(t) = h(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$ mit $h \in \mathcal{P}^s$.

- Durch Iterieren solcher Rechnungen für
$$L = P(D) = (D - \lambda_1)^{k_1} \cdots (D - \lambda_m)^{k_m}, \quad m \leq n = \sum_{i=1}^m k_i$$
bekommt man den folgenden Satz.

Inhomogene DG

Satz: Die DG $[Lu](t) = f(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$, $f \in \mathcal{P}^k$, hat eine Lösung der Form $u(t) = g(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$, $g \in \mathcal{P}^l$. Seien $P(\lambda_i) = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Wenn gilt $\lambda \neq \lambda_i$, $i = 1, \ldots, m$, folgt $k = l$. Sonst folgt $l = k + k_i$ aus $\lambda = \lambda_i$.

- Beispiel: Das Anfangswertproblem soll gelöst werden,

$$u'''(t) + 3u''(t) + 2u'(t) = 12t\mathrm{e}^t \quad = r(t) = f(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$$
$$u(0) = -17/3, \quad u'(0) = u''(0) = 1/3$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

mit $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$. Mit $f(t)\mathrm{e}^{\lambda t} = 12t\mathrm{e}^t$ gilt $1 = \lambda \neq \lambda_i$, $i = 1, 2, 3$. Also hat eine partikuläre Lösung die Form

$$u_\mathrm{p}(t) = (\alpha + \beta t)\mathrm{e}^t$$

Einsetzen in $Lu = r$ zeigt, $\alpha = -11/3$, $\beta = 2$. Die allgemeine Lösung der komplementären homogenen DG ist

$$u_\mathrm{k}(t) = a + b\mathrm{e}^{-t} + c\mathrm{e}^{-2t}$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden. D.h. $u(t) = u_\mathrm{p}(t) + u_\mathrm{k}(t)$ erfüllt diese wenn $a = 1$, $b = -4$, $c = 1$ oder

$$u(t) = 1 - 4\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t} + (2t - 11/3)\mathrm{e}^t$$

Übertragungsfunktion

- In der DG $Lu = r$ werden r und u als *Eingabe* bzw. *Ausgabe* interpretiert.
- Besonders wichtig ist die Ausgabe für sinusförmige Eingabe
$$r(t) = A\cos(\omega t + \alpha) = \Re\{c\mathrm{e}^{\imath\omega t}\}$$
$c = A\mathrm{e}^{\imath\alpha}$, $A, \omega, \alpha \in \mathbb{R}$. $(A = |c|,\ \alpha = \arg(c))$
- Wenn gilt $Lv = s$, $s(t) = c\mathrm{e}^{\imath\omega t}$, läßt sich die Lösung des Problems $Lu = r$, $r = \Re\{s\}$, durch $u = \Re\{v\}$ darstellen: $Lu = L\Re\{v\} = \Re\{Lv\} = \Re\{s\} = r$.
- Eine partikuläre Lösung der DG, $Lv = s$, $s(t) = c\mathrm{e}^{\imath\omega t}$, ist $v(t) = \Gamma(\imath\omega)c\mathrm{e}^{\imath\omega t}$, wobei (Probe!)
$$\Gamma(\imath\omega) = 1/P(\imath\omega)$$
die *Übertragungsfunktion* ist.
- Wegen der Darstellung $\Gamma(\imath\omega) = \rho(\omega)\mathrm{e}^{-\imath\sigma(\omega)}$,
$$u(t) = \Re\{v(t)\} = \rho(\omega)|c|\cos(\omega t + \alpha - \sigma(\omega))$$
ist $\rho(\omega) = |\Gamma(\imath\omega)| = 1/|P(\imath\omega)|$ die *Verstärkungsfunktion*, und $\sigma(\omega) = -\arg(\Gamma(\imath\omega)) = \arg(P(\imath\omega))$ ist die Verzögerungsfunktion.

Resonanzfrequenzen

- Beispiel: Erzwungene Schwingungen eines leicht gedämpften Oszilators,
$$[Lu](t) = u''(t) + \epsilon u'(t) + \kappa^2 u(t) = \sin(\omega t)$$
Die Übertragungsfunktion ist
$$\Gamma(\imath\omega) = 1/P(\imath\omega) = 1/[-\omega^2 + \epsilon\imath\omega + \kappa^2]$$
Die Verstärkungsfunktion ist
$$\rho(\omega) = |\Gamma(\imath\omega)| = 1/|P(\imath\omega)| = [(\kappa^2 - \omega^2)^2 + \epsilon^2\omega^2]^{-\frac{1}{2}}$$
Die Verzögerungsfunktion ist
$$\sigma(\omega) = \arg(P(\imath\omega)) = \tan^{-1}[\epsilon\omega/(\kappa^2 - \omega^2)]$$
Mit $v(t) = \Gamma(\imath\omega)\mathrm{e}^{\imath\omega t}$ gibt es die partikuläre Lösung
$$u_\mathrm{p}(t) = \Im\{v(t)\} = \rho(\omega)\sin(\omega t - \sigma(\omega)), \text{ d.h.}$$
$[Lu](t) = [L\Im\{v\}](t) = \Im\{Lv\}[t] = \Im\{\Gamma(\imath\omega)\mathrm{e}^{\imath\omega t}/\Gamma(\imath\omega)\} = \sin(\omega t)$.
- Diese Methode funktioniert nicht, wenn das System mit einer *Resonanzfrequenz* ($\omega : P(i\omega) = 0$) getrieben wird.
Beispiel: Mit $\epsilon = 0$ und $\omega \to \kappa$ folgt $\rho \to \infty$.
Eine partikuläre Lösung ist $u_\mathrm{p}(t) = -\frac{1}{2\kappa} t\cos(\kappa t)$ mit
$$(-1)^{j+1} u_\mathrm{p}((j\pi)/\kappa) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Fourier-Reihe

Def: Die *Fourier-Reihe* einer Funktion r ist

$$R(t) = \lim_{K\to\infty} R_K(t), \quad R_K(t) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{K}[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)]$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} r(t)\cos(kt)dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} r(t)\sin(kt)dt, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Def: $r \in \mathcal{C}_s^m([a,b])$ wenn $\exists N \in \mathbb{N}$ und $\{\tau_i\}_{i=1}^N \subset [a,b]$, wobei $r \in \mathcal{C}^m([a,b]\backslash\{\tau_i\}_{i=1}^N)$ und $r^{(k)}(\tau_i^\pm) = \lim_{[a,b]\ni t\to\tau_i^\pm} r^{(k)}(t)$, $i = 1,\ldots,N$, $k = 0,\ldots,m$, existieren.

Satz: Für eine 2π-periodische Funktion $r \in \mathcal{C}(I) \cap \mathcal{C}_s^1(I)$, $I = [-\pi,+\pi]$, konvergiert $R_K \overset{K\to\infty}{\longrightarrow} r$ gleichmäßig in I. Wenn $r \in \mathcal{C}_s^1(I)$, gilt $R(t) = [r(t^+) + r(t^-)]/2$, $t \in I$.

Bemerkung: Es konvergiert $R_K \overset{K\to\infty}{\longrightarrow} r$ im quadratischen Mittel wenn $\int_{-\infty}^{+\infty} |r(t)|^2 dt < \infty$. (Siehe Sturm-Liouville.)

- Die Fourier-Reihe für $\tilde{r}(t)$ im Intervall $[a,b]$ ist gegeben durch $\tilde{R}(t) = R(-\pi + 2\pi(t-a)/(b-a))$, wobei $R(t)$ die Fourier-Reihe für $r(t) = \tilde{r}(a + (b-a)(t+\pi)/(2\pi))$ ist.

Fourier-Reihe

- Die Fourier-Reihe kann in komplexer Form so umgeschrieben werden,
$$R(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \mathrm{e}^{\imath kt}, \quad c_0 = a_0, \quad c_k = c_{-k}^* = a_k - \imath b_k$$
- Für die inhomogene DG $Lu = r$ wird eine partikuläre Lösung mit der Übertragungsfunktion Γ so gegeben,
$$u_\mathrm{p}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Gamma(\imath k) c_k \mathrm{e}^{\imath kt} \qquad \text{(Reell!)}$$
falls kein $k \in \mathbb{N}_0$ eine Resonanzfrequenz ist und diese Reihe sich termweise ableiten läßt.

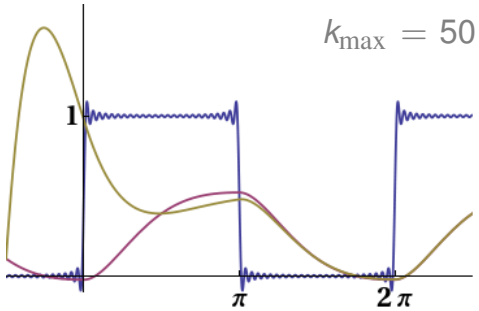
Satz: Sei R' die termweise abgeleitete Fourier-Reihe von r. Für eine 2π-periodische Funktion $r \in \mathcal{C}^1(I) \cap \mathcal{C}^2_\mathrm{s}(I)$, $I = [-\pi, +\pi]$ konvergiert $R'_K \overset{K\to\infty}{\longrightarrow} r'$ gleichmäßig in I. Wenn $r \in \mathcal{C}(I) \cap \mathcal{C}^2_\mathrm{s}(I)$, gilt $R'(t) = [r'(t^+) + r'(t^-)]/2$, $t \in I$.

Bemerkung: Es konvergiert $R'_K \overset{K\to\infty}{\longrightarrow} r'$ im quadratischen Mittel wenn $\int_{-\infty}^{+\infty} [|r(t)|^2 + |r'(t)|^2] dt < \infty$.

Periodische Eingaben

Hausaufgabe: Zeige, die Fourier-Reihe für

$$r(t+2j\pi) = \begin{cases} 0, & -\pi \le t < 0 \\ 1, & 0 \le t \le \pi \end{cases} \qquad j \in \mathbb{Z},$$



$r \in \mathcal{C}_{\mathrm{s}}([a,b])$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, ist gegeben durch

$$R(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \mathrm{e}^{\imath k t}, \quad c_0 = a_0, \quad c_k = c_{-k}^* = a_k - \imath b_k$$

$$a_0 = 1, \quad a_k = \frac{\sin(k\pi)}{k\pi}, \quad b_k = \frac{1-\cos(k\pi)}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}$$

- Beispiel: Wenn das folgende Masse-Feder-System mit der obigen Kraft r getrieben wird,

$$[Lu](t) = u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = r(t)$$

ist $u_{\mathrm{p}} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2_{\mathrm{s}}([a,b])$, $\forall a,b$, eine partikuläre Lösung der DG

$$u_{\mathrm{p}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Gamma(\imath k) c_k \mathrm{e}^{\imath k t}, \quad \Gamma(\imath k) = \frac{1}{-k^2 + 2\imath k + 2}$$

Mit der allgemeinen Lösung $u_{\mathrm{k}}(t)$ der komplementären homogenen DG 37 (Fall 1), bekommt man mit Anfangsbedingungen $u(0) = 0.98$, $u'(0) = -1.0$, die Lösung

$$u(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos(t) + u_{\mathrm{p}}(t)$$

Fourier-Transformierte

Def: Die Fourier-Transformierte einer Funktion $r(t)$ ist

$$\hat{r}(\omega) = \quad [\mathcal{F}(r)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \mathrm{e}^{-\imath\omega t} dt$$

und die inverse Fourier-Transformierte einer Funktion $\hat{r}(\omega)$ ist

$$r(t) = \quad [\mathcal{F}^{-1}(\hat{r})](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{r}(\omega) \mathrm{e}^{\imath\omega t} d\omega$$

Satz: Für $r \in C_{\mathrm{s}}^1([0,\infty))$ mit $\int_{-\infty}^{+\infty} |r(t)| dt < \infty$ existieren $\hat{r} = \mathcal{F}(r)$ und $\mathcal{F}^{-1}(\hat{r})$, und $[\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(r))](t) = [r(t^+) + r(t^-)]/2, t \geq 0$. Wenn auch $r \in \mathcal{C}([0,\infty)) \cap \mathcal{C}_{\mathrm{s}}^2([0,\infty))$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} |r'(t)| dt < \infty$ gelten, folgen $[\mathcal{F}(r')](\omega) = \imath\omega\hat{r}(\omega)$ und $[\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(r'))](t) = [r'(t^+) + r'(t^-)]/2$, $t \geq 0$.

Hausaufgabe: Nimm an, $r(t) \leftrightarrow \hat{r}(\omega)$, d.h. $\hat{r} = \mathcal{F}(r)$ und $r = \mathcal{F}^{-1}(\hat{r})$. Zeige die folgenden Eigenschaften der Fourier-Transformierten unter hinreichenden Bedingungen:

- $r(t - t_0) \leftrightarrow \hat{r}(\omega)\mathrm{e}^{-\imath\omega t_0}$
- $r^{(k)}(t) \leftrightarrow (\imath\omega)^k \hat{r}(\omega)$, $k \in \mathbb{N}$
- $\mathcal{F}$ ist linear
- $\mathrm{e}^{-\alpha t}\theta(t)\sqrt{2\pi} \leftrightarrow 1/(\alpha + \imath\omega)$, $\Re\alpha > 0$
  $+\pi\delta(\omega)$, $\alpha = 0$

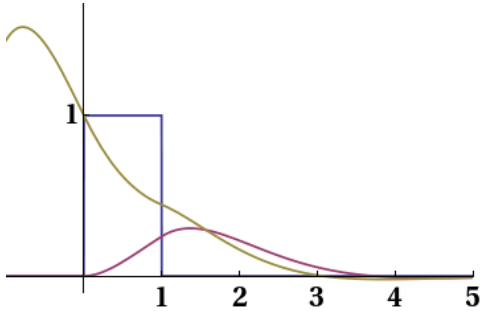
wobei θ die *Heaviside* Treppenfunktion ist:

$$\theta(t) = 0, \quad t < 0, \qquad \theta(t) = 1, \quad t \geq 0 \qquad \theta(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

Zeitbegrenzte Eingaben

- Für u mit $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$ ist die Fourier-Transformierte von Lu gegeben durch
$$[\mathcal{F}(Lu)](\omega) = P(\imath\omega)\hat{u}(\omega) = \hat{u}(\omega)/\Gamma(\imath\omega)$$
- Mit $\hat{r} = \mathcal{F}(r)$ ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen DG $Lu = r$ gegeben durch
$$u_{\mathrm{p}}(t) = \mathcal{F}^{-1}(\Gamma\hat{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(\imath\omega)\hat{r}(\omega)\mathrm{e}^{\imath\omega t}d\omega$$

Hausaufgabe: Zeige, die Fourier-Transformierte für
$$r(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$
$r \in \mathcal{C}_{\mathrm{s}}(\mathbb{R})$, ist gegeben durch
$$\hat{r}(\omega) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\imath\omega}}{\imath\omega\sqrt{2\pi}}$$



- Beispiel: Wenn das folgende Masse-Feder-System mit der obigen Kraft r getrieben wird,
$$[Lu](t) = u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = r(t)$$
$$\Gamma(\imath\omega) = 1/[-\omega^2 + 2\imath\omega + 2]$$
ist $u_{\mathrm{p}} = \mathcal{F}^{-1}(\Gamma\hat{r}) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2_{\mathrm{s}}(\mathbb{R})$ eine partikuläre Lösung der DG:

Zeitbegrenzte Eingaben

- Wegen der Partialbruchzerlegung,

$$\frac{2}{x(x+1+\imath)(x+1-\imath)} = \frac{1}{x} + \frac{1/(\imath-1)}{x+1+\imath} - \frac{1/(\imath+1)}{x+1-\imath}$$

folgt

$$\Gamma(\imath\omega)\hat{r}(\omega) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\imath\omega}}{2\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{\imath\omega} + \frac{1/(\imath-1)}{\imath\omega+1+\imath} - \frac{1/(\imath+1)}{\imath\omega+1-\imath}\right]$$

- Mit den Eigenschaften der Fourier-Transformierten,

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\imath\omega}}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\imath\omega}\right) = \tfrac{1}{2}[\theta(t)-\theta(t-1)] = \tfrac{1}{2}r(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\imath\omega}}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1/(\imath-1)}{\imath\omega+1+\imath}\right) = \frac{1}{2(\imath-1)}\left[\mathrm{e}^{-(1+\imath)t}\theta(t) - \mathrm{e}^{-(1+\imath)(t-1)}\theta(t-1)\right]$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\imath\omega}}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1/(\imath+1)}{\imath\omega+1-\imath}\right) = \frac{1}{2(\imath+1)}\left[\mathrm{e}^{-(1-\imath)t}\theta(t) - \mathrm{e}^{-(1-\imath)(t-1)}\theta(t-1)\right]$$

- Die Summe ist aber reell, d.h.

Zeitbegrenzte Eingaben

$$\left(\frac{-\imath-1}{-\imath-1}\right)\frac{\mathrm{e}^{-(1+\imath)t}}{2(\imath-1)}-\frac{\mathrm{e}^{-(1-\imath)t}}{2(\imath+1)}\left(\frac{-\imath+1}{-\imath+1}\right)=-\frac{\imath+1}{4}\mathrm{e}^{-(1+\imath)t}-\frac{1-\imath}{4}\mathrm{e}^{-(1-\imath)t}$$

$$=-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{\imath t}+\mathrm{e}^{-\imath t}}{2}+\frac{\mathrm{e}^{\imath t}-\mathrm{e}^{-\imath t}}{2\imath}\right]=-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}[\cos(t)+\sin(t)]$$

und $$\frac{\mathrm{e}^{-(1+\imath)(t-1)}}{2(\imath-1)}+\frac{\mathrm{e}^{-(1-\imath)(t-1)}}{2(\imath+1)}=-\frac{\mathrm{e}^{-(t-1)}}{2}[\cos(t-1)+\sin(t-1)]$$

- Die partikuläre Lösung $u_\mathrm{p}=\mathcal{F}^{-1}(\Gamma\hat{r})\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})\cap\mathcal{C}^2_\mathrm{s}(\mathbb{R})$ ist

$$\begin{aligned}u_\mathrm{p}(t)=\{&r(t)-\mathrm{e}^{-t}[\cos(t)+\sin(t)]\theta(t)\\&+\mathrm{e}^{-(t-1)}[\cos(t-1)+\sin(t-1)]\theta(t-1)\}/2\end{aligned}$$

  die erfüllt $u_\mathrm{p}(0)=u_\mathrm{p}'(0)=0$.
- Mit der allgemeinen Lösung $u_\mathrm{k}(t)$ der komplementären homogenen DG 37 (Fall 1), bekommt man mit Anfangsbedingungen $u(0)=1$, $u'(0)=-1$, die Lösung

$$u(t)=\mathrm{e}^{-t}\cos(t)+u_\mathrm{p}(t).$$

Laplace-Transformierte

Def: Die Laplace-Transformierte einer Funktion $r(t)$ ist

$$R(s) = \quad [\mathcal{L}(r)](s) = \int_0^{+\infty} r(t)\mathrm{e}^{-st}dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

und die inverse Laplace-Transformierte einer in $\{z \in \mathbb{R} : \Re\{z\} \geq \sigma\}$ analytischen Funktion $R(s)$ ist

$$r(t) = \quad [\mathcal{L}^{-1}(R)](t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\sigma-\imath\infty}^{\sigma+\imath\infty} R(s)\mathrm{e}^{st}ds$$

Bemerkung: Für gewisse Funktionen r gilt $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(r)) = r$, aber anhand des nächsten Satzes wird die Inversionsformel selten verwendet. In der Praxis *erkennt* man eine Funktion $R(s)$ als Laplace-Transformierte einer Funktion $r(t)$ und berechnet weiter mit $r = \mathcal{L}^{-1}(R)$. (Weitere Details: Analysis.)

Satz: Wenn $\mathcal{L}(r_1) = \mathcal{L}(r_2)$ gilt für $r_1, r_2 \in \mathcal{C}([0,\infty))$, folgt $r_1 = r_2$.

Def: Eine Funktion $r(t)$ hat *exponentielle Ordnung* (α, T) wenn $\exists M > 0$ wobei $\mathrm{e}^{-\alpha t}|r(t)| \leq M$, $\forall t > T$.

Laplace-Transformierte

Satz: Nimm an, eine Funktion r hat exponentielle Ordnung (α, T), $\alpha, T > 0$, und $r \in \mathcal{C}_s([0,\tau])$, $\forall \tau > 0$. Dann existiert $[\mathcal{L}(r)](s)$ für $\Re\{s\} > \alpha$.

Satz: Nimm an, eine Funktion $r \in \mathcal{C}([0,\infty))$ hat exponentielle Ordnung (α, T), $\alpha, T > 0$, und $r \in \mathcal{C}_s^1([0,\tau])$, $\forall \tau > 0$. Dann existieren $R(s) = [\mathcal{L}(r)](s)$ und $[\mathcal{L}(r')](s)$ für $\Re\{s\} > \alpha$ und

$$[\mathcal{L}(r')](s) = sR(s) - r(0).$$

Hausaufgabe: Nimm an, $r(t) \leftrightarrow R(s)$, d.h. $R = \mathcal{L}(r)$ und $r = \mathcal{L}^{-1}(R)$. Zeige die folgenden Eigenschaften der Laplace-Transformierten unter hinreichenden Bedingungen:

- $r(t-t_0)\theta(t-t_0) \leftrightarrow R(s)\mathrm{e}^{-st_0}$
- $\mathcal{L}$ ist linear
- $r^{(k)}(t) \leftrightarrow s^k R(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-1-i} r^{(i)}(0)$
- $\mathrm{e}^{-\alpha t}\theta(t) \leftrightarrow 1/(s+\alpha)$

Def: Eine *kausale* Funktion $r(t)$ erfüllt $r(t) = 0$, $t < 0$.

Faltung

Def: Die *Faltung* von Funktionen f und g sei definiert durch

$$[f * g](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Wenn f und g kausal sind, gilt

$$[f * g](t) = \int_{0}^{t} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

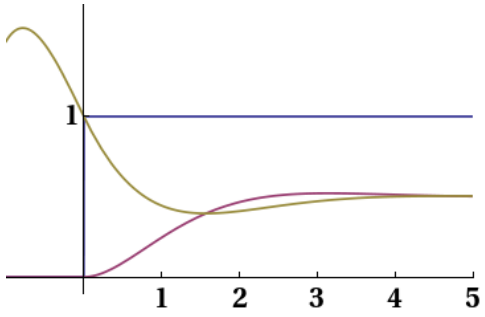
Wenn Funktionen f und g ausreichend regulär sind, kann die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden, und es folgt

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}(f)](s)[\mathcal{L}(g)](s) &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(T)\mathrm{e}^{-s(T+t)}dT\right] g(t)dt \\
&\overset{\tau=T+t}{=} \int_0^\infty \left[\int_t^\infty f(\tau-t)\mathrm{e}^{-s\tau}d\tau\right] g(t)dt \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\tau}\left[\int_0^t f(\tau-t)g(t)dt\right] d\tau = [\mathcal{L}(f*g)](s)
\end{aligned}$$

Satz: Nimm an, f, g haben exponentielle Ordnung (α, T), $\alpha, T > 0$, und $f, g \in \mathcal{C}_\mathrm{s}([0,\tau])$, $\forall \tau > 0$. Mit $F(s) = [\mathcal{L}(f)](s)$ und $G(s) = [\mathcal{L}(g)](s)$ folgt $F(s)G(s) = [\mathcal{L}(f*g)](s)$, $\Re\{s\} > \alpha$.

Kausale Eingaben

- Für ein u mit $U = \mathcal{L}(u)$ und $u^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \ldots, n-1$, ist die Laplace-Transformierte von Lu gegeben durch
$$[\mathcal{L}(Lu)](s) = P(s)U(s) = U(s)/\Gamma(s)$$
- Mit $R = \mathcal{L}(r)$ ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen DG $Lu = r$ gegeben durch $u_{\mathrm{p}} = \mathcal{L}^{-1}(\Gamma R)$.
- Beispiel: Das Masse-Feder-System
$$[Lu](t) = u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = r(t)$$
$$\Gamma(s) = 1/(s^2 + 2s + 2)$$
wird mit der Kraft $r(t) = \theta(t)$ getrieben. Die Laplace-Transformierte ist $R(s) = 1/s$.



- Wegen der Partialbruchzerlegung,
$$\frac{2}{x(x+1+\imath)(x+1-\imath)} = \frac{1}{x} + \frac{1/(\imath-1)}{x+1+\imath} - \frac{1/(\imath+1)}{x+1-\imath}$$
folgt
$$\Gamma(s)R(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} + \frac{1/(\imath-1)}{s+1+\imath} - \frac{1/(\imath+1)}{s+1-\imath}\right]$$

Kausale Eingaben

- Mit den Eigenschaften der Laplace-Transformierten,

$$[\mathcal{L}^{-1}(\Gamma R)](t) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\mathrm{e}^{-(1+\imath)t}}{(\imath-1)} - \frac{\mathrm{e}^{-(1-\imath)t}}{(\imath+1)}\right]\theta(t)$$

- Die Summe ist aber reell,

$$\left(\frac{-\imath-1}{-\imath-1}\right)\frac{\mathrm{e}^{-(1+\imath)t}}{(\imath-1)} - \frac{\mathrm{e}^{-(1-\imath)t}}{(\imath+1)}\left(\frac{-\imath+1}{-\imath+1}\right) = -\frac{\imath+1}{2}\mathrm{e}^{-(1+\imath)t} - \frac{1-\imath}{2}\mathrm{e}^{-(1-\imath)t}$$

$$= -\mathrm{e}^{-t}\left[\frac{\mathrm{e}^{\imath t}+\mathrm{e}^{-\imath t}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{\imath t}-\mathrm{e}^{-\imath t}}{2\imath}\right] = -\mathrm{e}^{-t}[\cos(t)+\sin(t)]$$

- Die partikuläre Lösung $u_\mathrm{p} = \mathcal{L}^{-1}(\Gamma R)$ ist

$$u_\mathrm{p}(t) = \tfrac{1}{2}\{1 - \mathrm{e}^{-t}[\cos(t)+\sin(t)]\}\theta(t).$$

- Mit der allgemeinen Lösung $u_\mathrm{k}(t)$ der komplementären homogenen DG 37 (Fall 1), bekommt man mit Anfangsbedingungen $u(0) = 1$, $u'(0) = -1$, die Lösung

$$u(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos(t) + u_\mathrm{p}(t).$$

Greensche Funktionen

- Wegen der Partialbruchzerlegung,

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s^2+2s+2} = \frac{1}{(s+1+\imath)(s+1-\imath)} = \frac{-1/(2\imath)}{s+1+\imath} + \frac{1/(2\imath)}{s+1-\imath}$$

  folgt mit den Eigenschaften der Laplace-Transformierten,

$$\gamma(t) = [\mathcal{L}^{-1}(\Gamma)](t) = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-(1+\imath)t}}{2\imath} + \frac{\mathrm{e}^{-(1-\imath)t}}{2\imath}\right]\theta(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin(t)\theta(t)$$

- Mit dem Faltungssatz ist eine partikuläre Lösung u_p gegeben durch

$$u_\mathrm{p}(t) = [\mathcal{L}^{-1}(\Gamma R)](t) = [\gamma * r](t) = \int_0^t \gamma(t-\tau)r(\tau)d\tau$$

  die erfüllt $u_\mathrm{p}(0) = u_\mathrm{p}'(0) = 0$.
- Für den obigen Fall mit $r(t) = \theta(t)$,

$$u_\mathrm{p}(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)d\tau = \tfrac{1}{2}\{1-\mathrm{e}^{-t}[\cos(t)+\sin(t)]\}\theta(t)$$

  wie schon vorher direkt berechnet.
- Bemerke: $G(t,\tau) = \gamma(t-\tau)$ ist die Greensche Funktion!

Greensche Funktionen

Satz: Für $I = [a, b]$, $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, sei $G(t, \tau)$ definiert durch

1. $G(t, \tau) = 0$, $a \leq t \leq \tau \leq b$,
2. Für $\tau \geq a$ fixiert und $t \in (\tau, b]$ erfüllt G,

$$[LG](t, \tau) = \partial_t^n G(t, \tau) + \sum_{i=1}^n a_i \partial_t^{n-i} G(t, \tau) = 0$$

$$\partial_t^k G(t, \tau)|_{t=\tau} = 0, \quad k = 0, \ldots, n-2, \quad \partial_t^{n-1} G(t, \tau)|_{t=\tau} = 1$$

Dann löst

$$u(t) = \int_a^t G(t, \tau) r(\tau) d\tau = \int_a^b G(t, \tau) r(\tau) d\tau$$

das Anfangswertproblem

$$[Lu](t) = u^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_i u^{(n-i)}(t) = r(t)$$

$$u^{(k)}(a) = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Satz: Diese Greensche Funktion hat die Form $G(t, \tau) = \gamma(t - \tau)$ und hängt nur von $t - \tau$ ab.

Beweis: Nimm $[a, b] = [0, 1]$. Sei $\gamma(t) = G(t, 0)$. Dann gilt $\gamma(t) = 0$, $t < 0$. Für $t \geq 0$ gelten $L\gamma = 0$ und $\{\gamma^{(k)}(0) = 0\}_{k=0}^{n-1}$, $\gamma^{(n-1)}(0) = 1$. Auch für fixiertes τ löst $G(t + \tau, \tau)$ dieses Anfangswertproblem. Laut dem Satz 64 gilt $\gamma(\mathrm{t}) - G(\mathrm{t} + \tau, \tau) = 0$. Setze $t = \mathrm{t} + \tau$. ■

Potenzreihenansatz

- Nun sind die Koeffizienten nicht mehr konstant, z.B.
$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x) = 0$$
- Die entwickelten Methoden gelten auch für DG höherer Ordnung, aber die Methoden werden hauptsächlich für DG zweiter Ordnung gezeigt.

Def: Ein Punkt x_0 ist für die obige DG *gewöhnlich* wenn p und q in x_0 beide analytisch sind. Sonst ist x_0 ein *singulärer* Punkt für die DG.

- Seien $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ und $\{a_k\}$ Koeffizienten der Potenzreihen.

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k, \quad u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

Seien ρ_p, ρ_q, ρ_u die jeweiligen Konvergenzradien.

Satz: Wenn x_0 für die obige DG gewöhnlich ist, existieren zwei analytische linear unabhängige Lösungen u_1 und u_2. Ihre Potenzreihen um x_0 erfüllen $\rho_{u_1}, \rho_{u_2} \geq \min\{\rho_p, \rho_q\}$.

Methode der Unbestimmten Koeffizienten

- Diese Lösungen werden mit der *Methode der unbestimmten Koeffizienten* gefunden.
- Sei $x_0 = 0$ ein gewöhnlicher Punkt für die DG.
- Man setzt die obigen Reihen in die DG ein,

$$\begin{aligned}
u'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots \\
u''(x) &= 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \cdots \\
q(x)u(x) &= q_0a_0 + (q_0a_1 + q_1a_0)x + (q_0a_2 + q_1a_1 + q_2a_0)x^2 \\
&\quad + \cdots + \left[\sum_{k=0}^{n} q_k a_{n-k}\right] x^n + \cdots \\
p(x)u'(x) &= p_0a_1 + (2p_0a_2 + p_1a_1)x + (3p_0a_3 + 2p_1a_2 + p_2a_1)x^2 \\
&\quad + \cdots + \left[\sum_{k=0}^{n}(n+1-k)p_k a_{n+1-k}\right] x^n + \cdots
\end{aligned}$$

und setzt den Koeffizienten jedes Terms x^n zu Null. Es ergeben sich die Bedingungen,

$$a_2 = -[p_0a_1 + q_0a_0]/(2 \cdot 1)$$

$$a_3 = -[(2p_0a_2 + p_1a_1) + (q_0a_1 + q_1a_0)]/(3 \cdot 2)$$

$$a_4 = -[(3p_0a_3 + 2p_1a_2 + p_2a_1) + (q_0a_2 + q_1a_1 + q_2a_0)]/(4 \cdot 3)$$

Legendre Differentialgleichung

- Im allgemeinen,

$$a_{n+1} = -\left[\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)p_k a_{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} q_k a_{n-1-k}\right] / [n(n+1)], \quad n \geq 1$$

- Für gegebene a_0 und a_1 werden alle Koeffizienten $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ *rekursiv* so bestimmt.
- Beispiel: Die *Legendre* DE, $\lambda \in \mathbb{R}$

$(1-x^2)u''(x) - 2xu'(x) + \lambda u(x) =$

$$[(1-x^2)u'(x)]' + \lambda u(x) = 0$$

wobei $p(x) = -2x/(1-x^2)$ und $q(x) = \lambda/(1-x^2)$.
Der Punkt $x_0 = 0$ ist gewöhnlich. $\rho_p, \rho_q = ?$

$$\begin{aligned}
\lambda u(x) &= \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \cdots + \lambda a_n x^n + \cdots \\
-2xu'(x) &= -2a_1 x - 4a_2 x^2 - 6a_3 x^3 - \cdots - 2na_n x^n - \cdots \\
(1-x^2)u''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots \\
&\qquad + (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \cdots \\
&\quad -2a_2 x^2 - 6a_3 x^3 - 12a_4 x^4 - \cdots \\
&\qquad -2n(n-1)a_n x^n + \cdots
\end{aligned}$$

Bedingungen sind

$$0 = 2a_2 + \lambda a_0 = 6a_3 + (\lambda - 2)a_1 = 12a_4 + (\lambda - 6)a_2 = \cdots$$

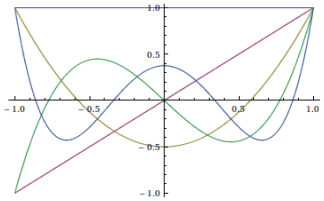
Legendre Differentialgleichung

Die Rekursionsformel für die Koeffizienten ist

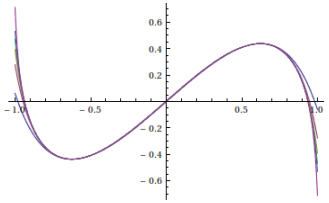
$$a_{n+2} = a_n[n(n+1) - \lambda]/[(n+1)(n+2)], \quad n \geq 0$$

eine Rekursion für gerade Potenzen und eine Rekursion für ungerade Potenzen von x. Laut dem Satz gilt $\rho_u \geq 1$.

- Wenn $\exists n \in \mathbb{N}$ wobei $\lambda = n(n+1)$, dann gibt es eine Polynom-Lösung P_n, die eine gerade bzw. ungerade Funktion ist, wenn n gerade bzw. ungerade ist.



- Diese sind die *Legendre Polynome*,
$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad \text{usw.}$$
- Beispiel: Für das Anfangswertproblem
$$[(1-x^2)u'(x)]' + 6u(x) = 0, \quad u(0) = -\tfrac{1}{2}, \quad u'(0) = 0$$
folgen mit $a_0 = u(0) = -\frac{1}{2}$, $a_1 = u'(0) = 0$,
$$a_2 = a_0(0-6)/2 = \tfrac{3}{2}, \quad a_4 = a_2(6-6)/12 = 0, \quad \text{usw}$$
$$a_3 = a_1[\cdots] = 0, \qquad a_5 = a_3[\cdots] = 0, \quad \text{usw}$$
die Lösung ist $u(x) = P_2(x)$.



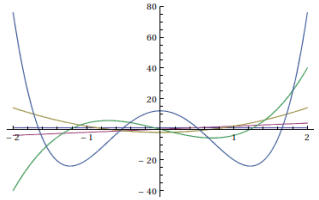
- Für die Anfangswerte $a_0 = u(0) = 0$, $a_1 = u'(0) = 1$,
$$a_{2k} = [\cdots]a_0 = 0, \qquad \{a_{2k+1}\} = \{1, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{5}, -\tfrac{4}{35}, -\tfrac{5}{63}, \ldots\}$$

Hermite Differentialgleichung

Hausaufgabe: Verwende die Methode der Unbestimmten Koeffizienten, um die *Hermite* DG mit $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zu lösen,

$$u''(x) - 2xu'(x) + \lambda u(x) = 0$$

Zeige, $x_0 = 0$ ist gewöhnlich, die Koeffizienten erfüllen

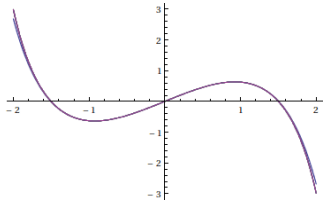


$$a_{n+2} = a_n(2n - \lambda)/[(n+1)(n+2)], \quad n \geq 0$$

und $\rho_u = \infty$. Wenn $\exists n \in \mathbb{N}$ wobei $\lambda = 2n$, gibt es eine Polynom-Lösung H_n. Diese sind die *Hermite Polynome*,

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad \text{usw.}$$

- Beispiel: Für das Anfangswertproblem
  $$u''(x) - 2xu'(x) + 4u(x) = 0, \quad u(0) = -2, \quad u'(0) = 0$$
  folgen mit $a_0 = u(0) = -2$, $a_1 = u'(0) = 0$,
  $$a_2 = a_0(0-4)/2 = 4, \quad a_4 = a_2(4-4)/12 = 0, \quad \text{usw}$$
  $$a_3 = a_1[\cdots] = 0, \qquad a_5 = a_3[\cdots] = 0, \quad \text{usw}$$
  die Lösung ist $u(x) = H_2(x)$.



- Für die Anfangswerte $a_0 = u(0) = 0$, $a_1 = u'(0) = 1$,
  $$a_{2k} = [\cdots]a_0 = 0, \qquad \{a_{2k+1}\} = \{1, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{30}, -\tfrac{1}{210}, -\tfrac{1}{1512}, \ldots\}$$

Differentialgleichungen mit Singulären Punkten

- Ansatz: Wenn die DG,
$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0$$
einen singulären Punkt in x_0 hat, wird eine Lösung der folgenden Form gesucht,
$$u(x) = (x - x_0)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \nu, a_k = ?$$

Def: Sei x_0 ein singulärer Punkt der obigen DG. Wenn die Funktionen
$$(x - x_0)p(x) = P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k (x - x_0)^k$$
$$(x - x_0)^2 q(x) = Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k (x - x_0)^k$$
beide in x_0 analytisch sind, ist x_0 ein regulärer singulärer Punkt. Sonst ist x_0 nicht regulär.

- Die DG läßt sich so umschreiben,
$$\begin{aligned} 0 &= (x - x_0)^2 u''(x) + (x - x_0)P(x)u'(x) + Q(x)u(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\nu)(x - x_0)^{\nu+k} \end{aligned}$$
wobei $\{A_k(\nu)\}$ von den Koeffizienten $\{a_k\}$ für u, $\{P_k\}$ für P und $\{Q_k\}$ für Q abhängen. Es soll gelten $A_k(\nu) = 0$, $\forall k$.

Def: Die Gleichung $A_0(\nu) = 0$ heißt die *Indizial-Gleichung* der DG.

Differentialgleichungen mit Singulären Punkten

Satz: Sei x_0 ein regulärer singulärer Punkt der obigen DG. Dann existiert mindestens eine Lösung der Form

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+\nu}$$

wobei ν erfüllt $A_0(\nu) = 0$. Die Lösung gilt für $0 < |x - x_0| < R$ für ein $R > 0$.

- Beispiel: Für die *Bessel* DG der Ordnung $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$x^2 u''(x) + x u'(x) + (x^2 - \lambda^2) u(x) = 0$$
ist $x_0 = 0$ ein regulärer singulärer Punkt. Es gelten $P(x) = 1$ und $Q(x) = (x^2 - \lambda^2)$. Mit Substitution folgt

$$A_0(\nu) = [\nu^2 - \lambda^2] a_0$$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (\nu+k)(\nu+k-1) a_k x^{\nu+k} + (\nu+k) a_k x^{\nu+k} + a_k x^{\nu+k+2} - \lambda^2 a_k x^{\nu+k} \right\}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ (\nu+k)(\nu+k-1) a_k + (\nu+k) a_k + a_{k-2} - \lambda^2 a_k \right\} x^{\nu+k}$$

$$+ [\nu(\nu-1) + \nu - \lambda^2] a_0 x^{\nu} + [(\nu+1)\nu + (\nu+1) - \lambda^2] a_1 x^{\nu+1}$$

Methode von Frobenius

Satz: Sei x_0 ein regulärer singulärer Punkt der obigen DG. Angenommen gelten $A_0(\nu_1) = A_0(\nu_2) = 0$ mit $\Re\{\nu_1\} \geq \Re\{\nu_2\}$.

1. $\nu_1 - \nu_2 \notin \mathbb{N}_0$. Dann gibt es zwei linear unabhängige Lösungen,
$$u_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1,2}(k)(x - x_0)^{k+\nu_{1,2}}, \quad a_{1,2}(0) \neq 0$$
2. $\nu_1 - \nu_2 \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zwei linear unabhängige Lösungen,
$$u_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_1(k)(x - x_0)^{k+\nu_1}, \quad a_2(0) \neq 0$$
$$u_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_2(k)(x - x_0)^{k+\nu_2} + c u_1(x) \ln|x - x_0|,$$
$$a_1(0) \neq 0, \quad c \in \mathbb{R}$$
3. $\nu_1 = \nu_2$. Dann gibt es zwei linear unabhängige Lösungen,
$$u_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_1(k)(x - x_0)^{k+\nu_1}, \quad a_1(0) \neq 0$$
$$u_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_2(k)(x - x_0)^{k+\nu_2+1} + u_1(x) \ln|x - x_0|,$$
$$a_1(0) \neq 0$$

Die Lösungen gelten für $0 < |x - x_0| < R$ für ein $R > 0$.

Methode der Reduktion der Ordnung

- Sei $u_1(x)$ eine bekannte Lösung der DG mit $r(x) = 0$,
$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = r(x)$$
- Für gegebenes $r(x)$ sucht man eine Lösung der Form $u_2(x) = v(x)u_1(x)$ und setzt die Ableitungen
$$u_2'(x) = v'(x)u_1(x) + v(x)u_1'(x)$$
$$u_2''(x) = v''(x)u_1(x) + 2v'(x)u_1'(x) + v(x)u_1''(x)$$
in die DG ein
$$u_1(x)v''(x) + [2u_1'(x) + p(x)u_1(x)]v'(x) +$$
$$[u_1''(x) + p(x)u_1'(x) + q(x)u_1(x)]_{=0}v(x) = r(x)$$
- Es folgt eine DG erster Ordnung in v'
$$u_1(x)v''(x) + [2u_1'(x) + p(x)u_1(x)]v'(x) = r(x)$$
Ein Integrationsfaktor ist
$$\mu(x) = u_1(x)\mathrm{e}^{P(x)}, \quad P'(x) = p(x)$$
und aus
$$[v'(x)u_1^2(x)\mathrm{e}^{P(x)}]' = u_1(x)r(x)\mathrm{e}^{P(x)}$$
folgt mit $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$
$$v(x) = \int^x \left\{ u_1^{-2}(s)\mathrm{e}^{-P(s)} \left[\int^s u_1(t)r(t)\mathrm{e}^{P(t)}dt + k_1 \right] \right\} ds + k_2$$

Bessel Differentialgleichung

- Für eine Lösung
$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\nu}$$
der Bessel DG der Ordnung $\lambda > 0$,
$$x^2 u''(x) + x u'(x) + (x^2 - \lambda^2) u(x) = 0$$
werden Koeffizienten $\{a_k\}$ durch folgende Bedingungen bestimmt, $(a_k = a_1(k))$

$$0 = \sum_{k=2}^{\infty} x^{\nu+k} \underbrace{\left\{ [(\nu+k)^2 - \lambda^2] a_k + a_{k-2} \right\}}_{=A_k(\nu)} + \underbrace{[\nu^2 - \lambda^2] a_0}_{=A_0(\nu)} x^{\nu} + \underbrace{[(\nu+1)^2 - \lambda^2] a_1}_{=A_1(\nu)} x^{\nu+1}$$

- Die Nullstellen für $A_0(\nu)$ sind $\nu_1 = \lambda$ und $\nu_2 = -\lambda$.
- Wenn $\nu_1 - \nu_2 = 2\lambda \notin \mathbb{N}_0$ trifft Fall 1 zu, d.h. es gibt Lösungen u_1 und u_2 der obigen Form mit ν_1 bzw. ν_2.
- Wenn $\nu_1 - \nu_2 = 2\lambda \in \mathbb{N}$, z.B. $\lambda = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$, trifft Fall 2 zu, d.h. es gibt eine Lösung der obigen Form für $\nu_1 = \lambda$. Diese Lösung u_1 wird jetzt gesucht. Nachher wird u_2 gegeben.
- Durch $0 = A_1(\nu_1) = (2\lambda + 1) a_1$ folgt $a_1 = 0$.

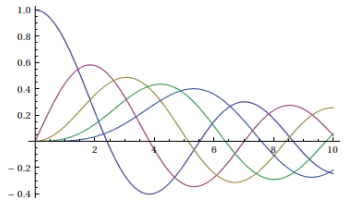
Bessel Differentialgleichung

- Durch $A_k(\nu) = 0$ mit $\nu = \nu_1 = \lambda$ folgt die Rekursionsformel,
$$k(k+2\lambda)a_k + a_{k-2} = 0, \quad k \geq 2$$
oder $a_{2m+1} = [\cdots]a_1 = 0$ und
$$a_{2m} = \frac{-a_{2(m-1)}}{[2m][2(m+\lambda)]} = \cdots$$
$$= \frac{(-1)^m a_0}{[(2m)\cdots 4\cdot 2][2(m+\lambda)\cdots 2(2+\lambda)2(1+\lambda)]}$$
$$= \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m![(m+\lambda)\cdots(2+\lambda)(1+\lambda)]}$$
- Die Funktion
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{s-1} dx$$
erfüllt $s! := \Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für $s > 0$. Es folgt,
$(m+\lambda)\cdots(1+\lambda) = \Gamma(m+\lambda+1)/\Gamma(1+\lambda) = (m+\lambda)!/\lambda!$
- Die gesuchte Lösung läßt sich so schreiben,
$$u_1(x) = a_0 2^\lambda \lambda! \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+\lambda)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\lambda}$$

Bessel Funktionen erster Gattung

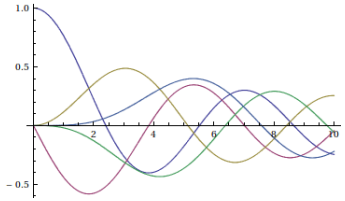
- Mit $1/a_0 = 2^\lambda \lambda!$ ergibt sich die *Bessel Funktion erster Gattung der Ordnung* λ,

$$J_\lambda(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+\lambda)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\lambda}$$



- Auch für $\lambda = 0$ ist $J_0(x)$ eine Lösung der Bessel Gleichung der Ordnung 0.
- Für jedes $\lambda \geq 0$ weist $J_\lambda(x)$ gedämpfte Schwindungen auf wenn $x \to +\infty$, und die positiven Nullstellen von J_λ und $J_{\lambda+1}$ trennen einander.
- Wenn $\lambda \notin \mathbb{N}$, z.B. $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$, ist

$$J_{-\lambda}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-\lambda)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\lambda}$$

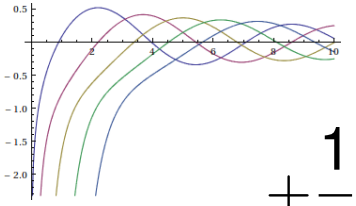


eine linear unabhängige Lösung.
- Wenn $\lambda \in \mathbb{N}$ hat eine linear unabhängige Lösung die Form

$$u_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_2(k) x^{k-\lambda} + c J_\lambda(x) \ln x, \quad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Bessel Funktionen zweiter Gattung

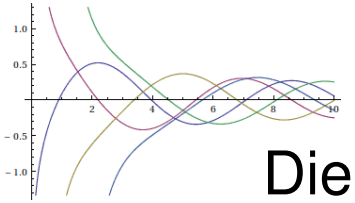
- Üblicherweise wird eine linear unabhängige Lösung durch folgende Kombination von u_2 und J_λ dargestellt,



$$Y_\lambda(x) = \frac{2}{\pi}\left\{\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)J_\lambda(x) - \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\lambda-1}\frac{(\lambda-m-1)!}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\lambda}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m+\lambda}\frac{1}{k}\right)\left[\frac{1}{m!(m+\lambda)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\lambda}\right]\right\}$$

wobei



$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) \approx 0.5772$$

Diese Lösung heißt die *Bessel Funktion zweiter Gattung der Ordnung* λ.

- Für $\lambda = 0$ ist $Y_0(x)$ gegeben durch

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right]$$

Autonome Systeme

- Nun werden Systeme von DG'en untersucht,

$$\begin{cases} x_1'(t) &= X_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= X_n(x_1(t), \ldots, x_n(t), t) \end{cases}$$

- Ein solches System wird mit Vektornotation so geschrieben,

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t)$$

  wobei $t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{X} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$.

- Beispiel: Für das Räuber-Beute Modell [9] mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$

$$x'(t) = [\alpha - \beta y(t)]x(t), \quad y'(t) = [\gamma x(t) - \delta]y(t)$$

  hat man $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t))$ mit

$$\boldsymbol{x}(t) = \langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \langle x(t), y(t) \rangle$$
$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \langle (\alpha - \beta x_2)x_1, (\gamma x_1 - \delta)x_2 \rangle.$$

Autonome Systeme

- Beispiel: Für die Diskretisierung der Wärmegleichung 11,

$$\begin{cases} T_0'(t) &= \frac{\alpha}{h^2}[-T_0(t) + T_1(t)] \\ T_1'(t) &= \frac{\alpha}{h^2}[T_0(t) - 2T_1(t) + T_2(t)] \\ &\vdots \\ T_{N-1}'(t) &= \frac{\alpha}{h^2}[T_{N-2}(t) - 2T_{N-1}(t) + T_N(t)] \\ T_N'(t) &= \frac{\alpha}{h^2}[T_{N-1}(t) - T_N(t)] \end{cases}$$

  hat man $\boldsymbol{T}'(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}(t))$ mit $\boldsymbol{T}(t) = \langle T_0(t), \ldots, T_N(t)\rangle$ und $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}) = A\boldsymbol{T}$ wobei

$$A = \frac{\alpha}{h^2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ \mathbf{0} & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Für diese beiden Beispiele hängen $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{F}$ von der Zeit t nicht explizit ab. Diese Eigenschaft gilt nicht mehr, z.B. wenn die Parameter $\alpha, \beta, \ldots$ von t abhängen sollten.

Ebene Autonome Systeme

Def: Ein System von DG'en

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$$

in dem $\boldsymbol{X}$ von der Zeit t nicht explizit abhängt, heißt *autonom*.

- Ein nicht autonomes System
$$x_i'(t) = X_i(x_1(t), \ldots, x_{n-1}(t), t), \quad i = 1, \ldots, n-1$$
läßt sich autonom so umformulieren,
$$x_i'(t) = X_i(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad i = 1, \ldots, n$$
wobei $x_n(t) = t$ und $X_n(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

Def: Ein Punkt $\boldsymbol{x}^\star$ in dem gilt $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^\star) = 0$ ist ein *Gleichgewicht* für das System $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t))$.

- Wenn $n = 2$ hat man ein *ebenes autonomes System*,
$$x'(t) = X(x(t), y(t)), \quad y'(t) = Y(x(t), y(t))$$
z.B. für das Räuber-Beute Modell
$$X(x, y) = (\alpha - \beta y)x \text{ und } Y(x, y) = (\gamma x - \delta)y.$$
- Ein ebenes autonomes System läßt sich so umschreiben,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)} \quad (X(x, y) \neq 0) \quad \text{oder} \quad X(x, y)y'(x) = Y(x, y)$$
und so treffen die Definitionen für DG'en erster Ordnung zu.

Integral-Kurven

- Beispiel: Die allgemeine Lösung des Systems
$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t)$$
$(X(x,y) = -y, Y(x,y) = x)$ ist für $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$,
$$x(t) = k_1 \cos(t + k_2), \quad y(t) = k_1 \sin(t + k_2)$$
Die Integral-Kurven sind
$$x^2(t) + y^2(t) = k_1^2[\cos^2(t + k_2) + \sin^2(t + k_2)] = k_1^2$$
Lösungen der DG erster Ordnung, $(X(x,y)y'(x) = Y(x,y))$
$$y(x)y'(x) = -x$$
sind $y(x) = \pm\sqrt{k^2 - x^2}$ für $k \in \mathbb{R}$ und $|x| < |k|$, und die Integral-Kurven sind $x^2 + y^2 = k^2$.
Bemerke: Ableitungen für das autonome System sind für jedes t wohl definiert, während ein Integral für die DG erster Ordnung nicht überall differenzierbar ist.

Satz: Sei $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Dann liegt jede Integral-Kurve des ebenen autonomen Systems
$$x'(t) = \partial_y V(x(t), y(t)), \quad y'(t) = -\partial_x V(x(t), y(t))$$
in einer Niveau-Kurve $V(x,y) =$ Konstante.

Integral-Kurven

Beweis: Es folgt aus

$$D_t V(x(t), y(t)) = \partial_x V(x(t), y(t)) x'(t) + \partial_y V(x(t), y(t)) y'(t)$$
$$= \partial_x V(x(t), y(t))[\partial_y V(x(t), y(t))] + \partial_y V(x(t), y(t))[-\partial_x V(x(t), y(t))] = 0$$

dass $V(x(t), y(t)) =$ Konstante. ■

- Mit $\nabla V(x, y) = \langle \partial_x V(x, y), \partial_y V(x, y) \rangle$ und
$$\nabla^\perp V(x, y) = \langle \partial_y V(x, y), -\partial_x V(x, y) \rangle$$
hat man
$$\nabla V(x, y) \cdot \nabla^\perp V(x, y) = 0.$$
Für das System
$$\boldsymbol{x}'(t) = \nabla^\perp V(\boldsymbol{x}(t))$$
folgt
$$D_t V(\boldsymbol{x}(t)) = \nabla V(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \boldsymbol{x}'(t) = \nabla V(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \nabla^\perp V(\boldsymbol{x}(t)) = 0.$$
- Für $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mu(x, y) \neq 0$ und das neue System
$$\boldsymbol{x}'(t) = \mu(\boldsymbol{x}(t)) \nabla^\perp V(\boldsymbol{x}(t))$$
folgt auch
$$\nabla V(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \boldsymbol{x}'(t) = \mu(\boldsymbol{x}(t)) \nabla V(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \nabla^\perp V(\boldsymbol{x}(t)) = 0.$$

Räuber-Beute Modell

Hausaufgabe: Zeige für das Räuber-Beute Modell mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$

$$x'(t) = [\alpha - \beta y(t)]x(t), \quad y'(t) = [\gamma x(t) - \delta]y(t)$$

das System läßt sich so umschreiben,

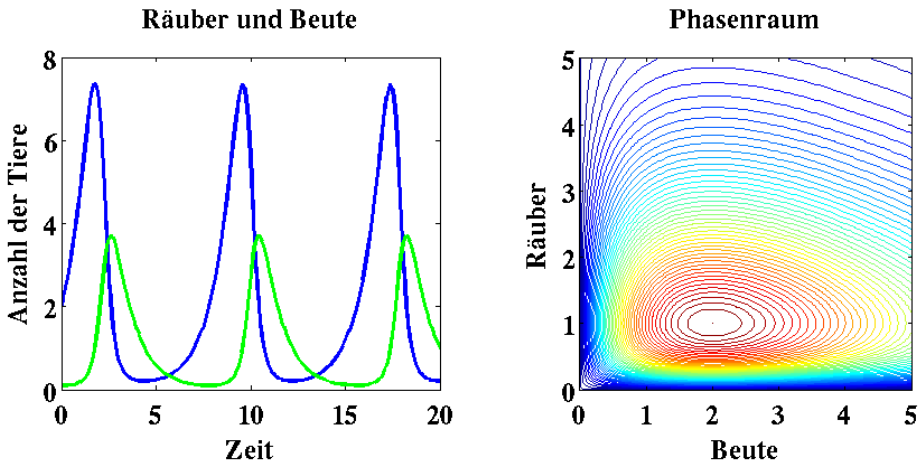
$$\boldsymbol{x}'(t) = \mu(\boldsymbol{x}(t))\nabla^{\perp} V(\boldsymbol{x}(t))$$

wobei $\mu(x, y) = xy$ und

$$V(x, y) = \delta \ln(x) - \gamma x + \alpha \ln(y) - \beta y$$

Daher liegen die Integral-Kurven in den Niveau-Kurven $V(x, y) =$ Konstante.

- Lösungen $\boldsymbol{x}(t)$ und Niveau-Kurve $V(\boldsymbol{x}) =$ Konstante sehen so aus:



Potenzial Landschaft

Def: Sei $P \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Für ein autonomes System

$$\boldsymbol{x}'(t) = -\nabla P(\boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

ist P ein *Potenzial*.

- Mit einem Potenzial P folgt

  $$D_t P(\boldsymbol{x}(t)) = \nabla P(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \boldsymbol{x}'(t) = -\|\nabla P(\boldsymbol{x}(t))\|^2 \leq 0$$

  d.h. entlang einer Lösungskurve ist P nicht steigend. Man sagt, die Lösung bewegt sich in der *Landschaft* des Potenzials.
- Sei $\boldsymbol{x}^\star$ ein Minimum für P mit

  $$\nabla P(\boldsymbol{x}) \neq 0, \quad \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}^\star, \epsilon) \backslash \{\boldsymbol{x}^\star\}, \quad \epsilon > 0.$$

  Dann fährt eine Lösung $\boldsymbol{x}(t)$ zu $\boldsymbol{x}^\star$, wenn $\boldsymbol{x}_0 \in B(\boldsymbol{x}^\star, \epsilon)$.
- Für $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mu(x, y) > 0$, und das neue System

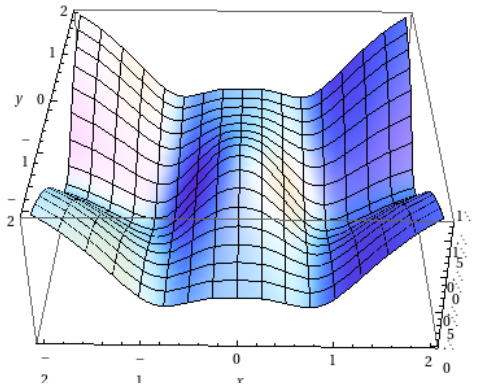
  $$\boldsymbol{x}'(t) = -\mu(\boldsymbol{x}(t)) \nabla P(\boldsymbol{x}(t))$$

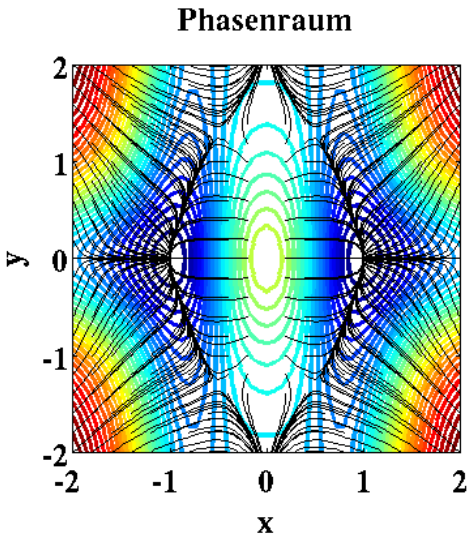
  folgt auch

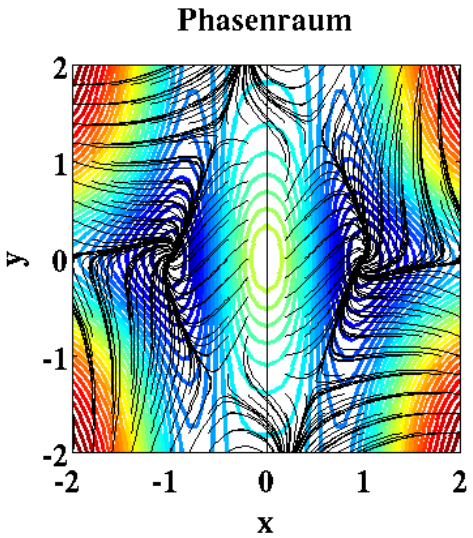
  $$D_t P(\boldsymbol{x}(t)) = \nabla P(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \boldsymbol{x}'(t) = -\mu(\boldsymbol{x}(t)) \|\nabla P(\boldsymbol{x}(t))\|^2 \leq 0$$
- Die Funktion P ist eine *Lyapunov* Funktionen für $\boldsymbol{x}^\star$: 119.

Potenzial Landschaft

- Beispiel:
  $$\phi(x,y) = \frac{(x^2-1)^2}{1+x^4} + \frac{(2x^2-1/2)y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}$$
  hat strenges Min in $(\pm 1, 0)$ (streng stabil) und strenges Max in $(0,0)$ (instabil).







- Lösungskurven links für
  $$\boldsymbol{x}'(t) = -\nabla\phi(\boldsymbol{x}(t)) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x}_0 \in [-2,2]\times[-2,2]$$
- Lösungskurven rechts für
  $$\boldsymbol{x}'(t) = \nabla^{\perp}\phi(\boldsymbol{x}(t)) - \nabla\phi(\boldsymbol{x}(t)) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x}_0 \in [-2,2]\times[-2,2]$$

Poincaré Phasenebene

Def: Ein *Phasenraum* ist ein Raum in dem alle Zustände eines Systems dargestellt werden.

Satz: Wenn für ein autonomes System

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t))$$

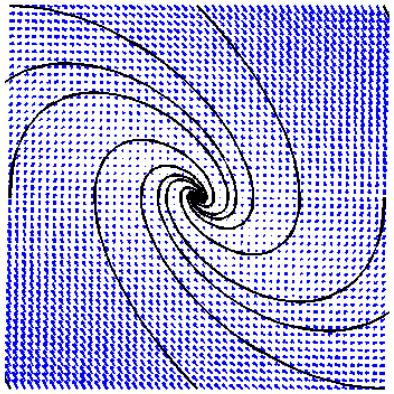
$\boldsymbol{x}_1$ eine Lösung mit $\boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_0$ ist, ist $\boldsymbol{x}_2(t) = \boldsymbol{x}_1(t - \tau)$ eine Lösung mit $\boldsymbol{x}_2(\tau) = \boldsymbol{x}_0$. Beweis: Hausaufgabe.

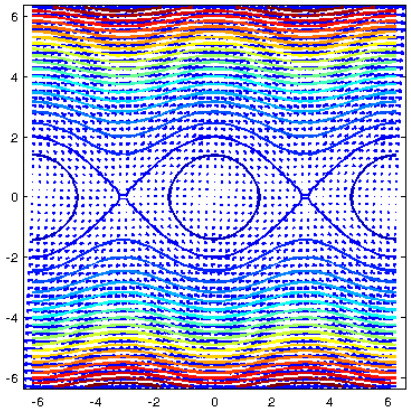
Bemerkung: Wenn Lösungen des Anfangswertproblems für ein autonomes System eindeutig sind, sind wegen des obigen Satzes alle Lösungskurven im Phasenraum identisch, die durch einen gegebenen Punkt laufen.

- Eine DG $\ddot{x}(t) = X(x(t), \dot{x}(t))$
  läßt sich als System so umschreiben,
  $$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t))$$
  wobei $\boldsymbol{x}(t) = \langle x_1(t), x_2(t)\rangle = \langle x(t), \dot{x}(t)\rangle$
  $$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \langle x_2, X(x_1, x_2)\rangle.$$
  Der Phasenraum für $\langle \text{Position}, \text{Geschwindigkeit}\rangle$ heißt die Poincaré Phasenebene.

Oszilatoren und Pendel

- Beispiel: Ein gedämpfter Oszilator,
$$\ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + u(t) = 0, \quad u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1$$
als System $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t))$ mit
$$\boldsymbol{x}(t) = \langle x_1(t), x_2(t)\rangle = \langle u(t), \dot{u}(t)\rangle, \quad \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \langle x_2, -x_1 - x_2\rangle$$
Lösungskurven 37 in der Poincaré Phasenebene unten links.





- Beispiel: Ein Pendel 9
$$\ddot{\theta}(t) + \sin(\theta(t)) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \theta_1$$
als System $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t))$ mit
$$\boldsymbol{x}(t) = \langle x_1(t), x_2(t)\rangle = \langle \theta(t), \dot{\theta}(t)\rangle, \quad \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \langle x_2, -\sin(x_1)\rangle$$
Lösungskurven liegen in den Niveau Kurven
$$x_2^2 - 2\cos(x_1) = k, \quad k \in \mathbb{R}$$
in der Poincaré Phasenebene oben rechts.

Lineare Systeme mit Konstanten Koeffizienten

- Es soll ein lineares System gelöst werden,
$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$
wobei $\forall t \geq 0$, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
- Für $n = 1$ ist die Lösung gegeben durch 15
$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0$$
- Für $t \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist
$$\{P_N(At)\}_{N=1}^{\infty}, \quad P_N(At) = \textstyle\sum_{k=0}^{N}(At)^k/k!$$
eine Cauchy Folge in $\mathbb{R}^{n\times n}$, da $\forall M \geq N$
$$\|P_M(At) - P_N(At)\| \leq \textstyle\sum_{k=N+1}^{M} \|At\|^k/k! \overset{M,N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Matrixnorm ist.

Def: Für $t \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $\mathrm{e}^{At} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch $\mathrm{e}^{At} = \lim_{N\to\infty} P_N(At)$.

Satz: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $AB = BA \Rightarrow \mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B$.

Beweis: $AB = BA \Rightarrow (A+B)^k = \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}A^mB^{k-m}$. Es folgt
$\mathrm{e}^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty}(A+B)^k/k! = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}A^mB^{k-m}/k! = \sum_{0\leq m\leq k}^{\infty} A^mB^{k-m}/[m!(k-m)!] = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} A^mB^l/[m!l!] = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B$. ■

Matrixexponential

Satz: Für $t \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$D_t \mathrm{e}^{At} = A\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At}A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Beweis: Für $\Delta t \in \mathbb{R}$ gilt

$\mathrm{e}^{A(t+\Delta t)} - \mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{A\Delta t} - \mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At}[\mathrm{e}^{A\Delta t} - I] = \mathrm{e}^{At}\sum_{k=1}^{\infty}(A\Delta t)^k/k!$

und daher folgt

$[\mathrm{e}^{A(t+\Delta t)} - \mathrm{e}^{At}]/\Delta t = \mathrm{e}^{At}[A + A^2\Delta t\sum_{k=2}^{\infty}(A\Delta t)^{k-2}/k!] \overset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{At}A$

Für $P_N(At) = \sum_{k=0}^{N}(At)^k/k!$ gilt $\|AP_N(At) - P_N(At)A\| = 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, für eine beliebige Matrixnorm $\|\cdot\|$. Es folgt

$$A\mathrm{e}^{At} \overset{N\to\infty}{\longleftarrow} AP_N(At) = P_N(At)A \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{At}A. \qquad \blacksquare$$

Satz: Das Anfangswertproblem

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

wird eindeutig gelöst mit

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0$$

Beweis: Durch Ableiten der Lösungsformel folgt

$$\boldsymbol{x}'(t) = D_t\mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{-At_0} = A\mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{-At_0}\boldsymbol{x}_0 = A\boldsymbol{x}(t).$$

Durch Auswerten an der Stelle $t = t_0$ folgt $\boldsymbol{x}(t_0) = \mathrm{e}^{A\cdot 0}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0$.

Lösungsbasis

Sei $\tilde{\boldsymbol{x}}$ eine andere Lösung. Dann erfüllt $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}$,

$$\boldsymbol{w}'(t) = A\boldsymbol{w}(t), \quad \boldsymbol{w}(t_0) = \boldsymbol{0}$$

Mit dem Integrationsfaktor e^{-At} folgt

$$[\mathrm{e}^{-At}\boldsymbol{w}(t)]' = \mathrm{e}^{-At}\boldsymbol{w}'(t) - A\mathrm{e}^{A-t}\boldsymbol{w}(t) = 0$$

und daher durch Integration,

$$\mathrm{e}^{-At}\boldsymbol{w}(t) - \mathrm{e}^{-At_0}\boldsymbol{w}(t_0) = \int_{t_0}^{t}[\mathrm{e}^{-As}\boldsymbol{w}(s)]'ds = \boldsymbol{0}$$

folgt $\boldsymbol{w}(t) = 0$, $\forall t$, aus $\boldsymbol{w}(t_0) = 0$. ■

Satz: Für $n \geq 1$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $\boldsymbol{v}$ ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Dann ist $\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{v}$ eine Lösung von $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$.

Beweis: Durch Ableiten der Lösungsformel folgt

$$\boldsymbol{x}'(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}[\lambda\boldsymbol{v}] = \mathrm{e}^{\lambda t}[A\boldsymbol{v}] = A\mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{x}(t).$$ ■

Satz: Angenommen besitzt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 1$, eine Zerlegung $A = V\Lambda V^{-1}$, wobei $V = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ regulär ist und $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Dann ist $\{\mathrm{e}^{\lambda_i t}\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^{n}$ eine Lösungsbasis für die homogene DG $\boldsymbol{x}'(t) - A\boldsymbol{x}(t) = 0$.

Wärmegleichung

Beweis: Sei $\boldsymbol{x}(t)$ eine beliebige Lösung. Setze $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle = \boldsymbol{c} = V^{-1}\boldsymbol{x}(0)$ und

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathrm{e}^{\lambda_i t} \boldsymbol{v}_i$$

Dann erfüllt $\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{u}(t)$ die DG,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}'(t) &= \boldsymbol{x}'(t) - \boldsymbol{u}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) - \sum_{i=1}^{n} c_i \mathrm{e}^{\lambda_i t}[\lambda_i \boldsymbol{v}_i] \\ &= A\boldsymbol{x}(t) - \sum_{i=1}^{n} c_i \mathrm{e}^{\lambda_i t}[A\boldsymbol{v}_i] = A\boldsymbol{x}(t) - A\boldsymbol{u}(t) = A\boldsymbol{w} \end{aligned}$$

und die Anfangsbedingung $\boldsymbol{w}(0) = 0$. Laut dem Satz 110 gilt $\boldsymbol{w}(t) = 0$, und es folgt $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{u}(t)$. ■

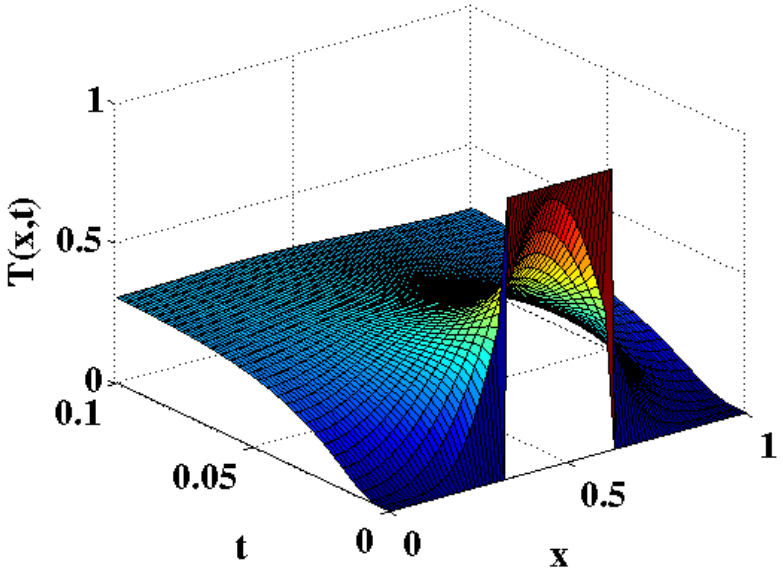
- Beispiel: Für die diskretisierte Wärmegleichung 11 mit $\alpha = 1$ $n = 101$ gilt $AV = V\Lambda$ mit $V = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$,

$$\lambda_j = -\frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi(j-1)}{2n}\right)$$

$$v_{i,j} = \begin{cases} 1/\sqrt{n}, & j = 1 \\ \sqrt{\frac{2}{n}} \cos\left(\frac{\pi(j-1)(i-\frac{1}{2})}{n}\right), & j \geq 2 \end{cases}$$

$$i, j = 1, \ldots, n$$

$$\boldsymbol{T}(t) = \mathrm{e}^{At}\boldsymbol{T}_0 = V\mathrm{e}^{\Lambda t}V^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_0$$



Äquivalente Systeme

Def: Sei $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ das charakteristische Polynom für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 1$. Die skalare DG $P_A(D_t = d/dt)x(t) = 0$ ist die *säkulare Gleichung* des linearen autonomen Systems $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$.

Satz: Sei $\boldsymbol{x}(t) = \langle x_1(t), \ldots, x_n(t)\rangle$ eine Lösung des linearen autonomen Systems $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 1$. Dann ist jede Komponente $x_i(t)$ eine Lösung der säkularen DG $P_A(D_t)x(t) = 0$.

Beweis: Mit $A = \{a_{i,j}\}$, $A_{i,j} = \{a_{k,l}\}_{(k,l)\neq(i,j)}$ und $K(A) = \{(-1)^{i+j}\det(A_{j,i})\}$ folgt $K(A)A = AK(A) = \det(A)I$. Mit $C(\lambda) = K(\lambda I - A)$ folgt $C(D_t)[D_t - A] = P_A(D_t)I$. ■

Def: Autonome Systeme

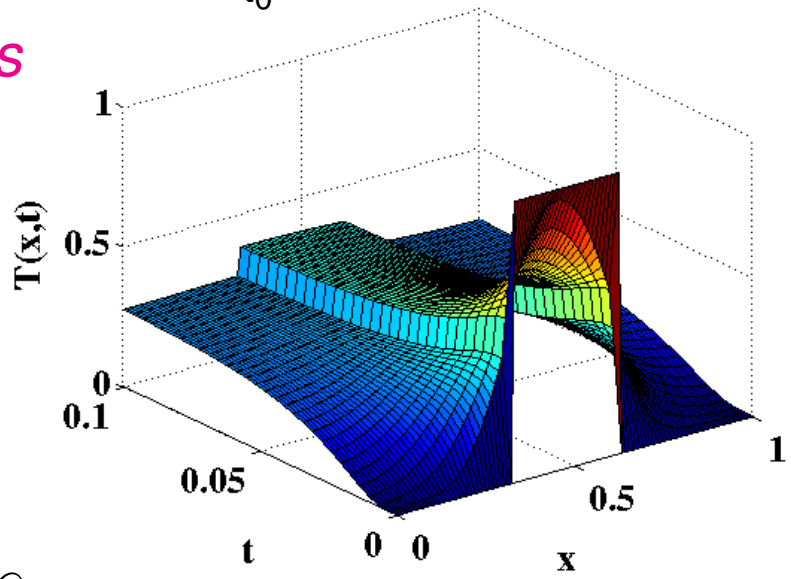
$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{x}(t) \in X \subset \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [a,b] \qquad (\star)$$
$$\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{u}(t)), \quad \boldsymbol{u}(t) \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [c,d] \qquad (\dagger)$$

sind *äquivalent* genau dann, wenn $\exists\phi : X \to U$ ein Diffeomorphismus, wobei $D_t\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t)))$ aus $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x})$ und $(\star)$ folgt und $D_t\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}(t)) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}(t)))$ aus $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) = \phi^{-1}(\boldsymbol{u})$ und $(\dagger)$ folgt.

Inhomogene Systeme

Satz: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 1$, mit der Zerlegung $A = V\Lambda V^{-1}$ sind die Systeme $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ und $\boldsymbol{u}'(t) = \Lambda\boldsymbol{u}(t)$ äquivalent und haben dieselbe säkulare Gleichung. Beweis: $\phi(\boldsymbol{x}) = V^{-1}\boldsymbol{x}$.

- Es soll ein lineares inhomogenes System gelöst werden,
$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$
wobei $\forall t \geq 0$, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\boldsymbol{b}(t) \in \mathbb{R}^n$.
- Mit dem Integrationsfaktor e^{-At} folgt
$$[\mathrm{e}^{-At}\boldsymbol{x}(t)]' = \mathrm{e}^{-At}\boldsymbol{x}'(t) - \mathrm{e}^{At}A\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{-At}\boldsymbol{b}(t)$$
- Durch Integration,
$\mathrm{e}^{-At}\boldsymbol{x}(t) - \mathrm{e}^{-At_0}\boldsymbol{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t}[\mathrm{e}^{-As}\boldsymbol{x}(s)]'ds = \int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-As}\boldsymbol{b}(s)ds$, d.h.
$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{A(t-s)}\boldsymbol{b}(s)ds$
- Für einen konstanten Vektor
$\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{b}$ mit $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$,
$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + [I - \mathrm{e}^{A(t-t_0)}]\boldsymbol{c}$
- Beispiel: Für die diskretisierte Wärmegleichung 111
mit $\boldsymbol{b} = -A\boldsymbol{T}_0/10$,
Hausaufgabe: $\boldsymbol{T}(t) \to \overline{T}_0\boldsymbol{e}$, $t \to \infty$.



Stabilität

Def: Sei $\boldsymbol{x}^\star$ ein Gleichgewicht für das autonome System $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t))$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, d.h. $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^\star) = 0$. Das Gleichgewicht ist

1. *stabil* wenn $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$ wobei $\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^\star\| < \delta \Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^\star\| < \epsilon$, $\forall t > 0$,
2. *asymptotisch attraktiv* wenn $\exists \delta$ wobei $\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^\star\| < \delta \Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^\star\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$,
3. *streng stabil* wenn stabil und asymptotisch attraktiv,
4. *neutral stabil* wenn stabil aber nicht asymptotisch attraktiv,
5. und *instabil* wenn nicht stabil.

Satz: Für das System $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 1$, ist das Gleichgewicht $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ asymptotisch attraktiv genau dann wenn $\max\{\Re\sigma(A)\} < 0$. Dann ist das Gleichgewicht streng stabil.

Beweis: Sei $\boldsymbol{x}(t) = \langle x_1(t), \ldots, x_n(t)\rangle$ eine Lösung von $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$. Laut dem Satz 112 ist $x_i(t)$ für jedes $i = 1, \ldots, n$ eine Lösung von $P_A(D_t)x_i(t) = 0$. Laut dem Satz 66 gilt $x_i(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ genau dann wenn $\Re\lambda_j < 0$, $\forall \lambda_j \in \sigma(A)$.

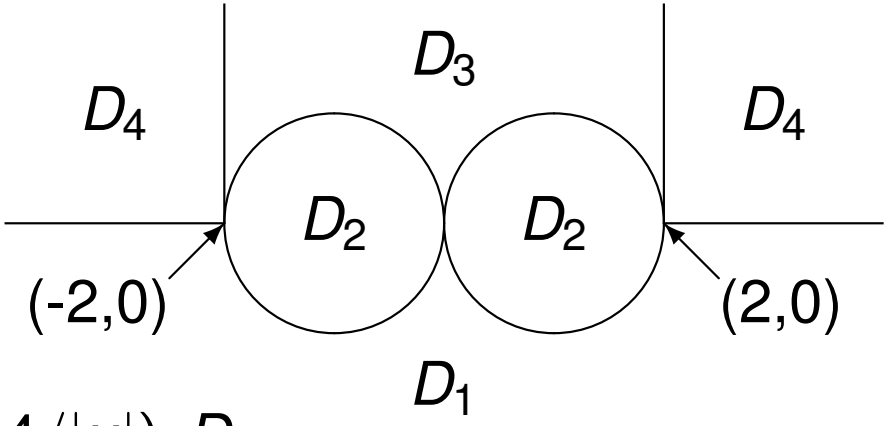
Stabilität

Für die zweite Aussage wird zuerst bewiesen, dass es höchstens n linear unabhängige Lösungen von $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ gibt. Seien $\{\boldsymbol{x}_j(t)\}_{j=1}^m$ linear unabhängige Lösungen. Wenn $m > n$ gilt, $\exists\{c_j\}_{j=1}^m \subset \mathbb{R}$, wobei $\sum_{j=1}^m c_j\boldsymbol{x}_j(0) = 0$. Dann $\boldsymbol{w}(t) = \sum_{j=1}^m c_j\boldsymbol{x}_j(t)$ erfüllt $\boldsymbol{w}'(t) = A\boldsymbol{w}(t)$ und $\boldsymbol{w}(0) = \boldsymbol{0}$. Es folgt induktiv, $\boldsymbol{w}^{(k)}(0) = A\boldsymbol{w}^{(k-1)}(0) = \boldsymbol{0}$, $k = 1, \ldots, n-1$. Mit $\boldsymbol{w}(t) = \langle w_1(t), \ldots, w_n(t)\rangle$ folgt mit dem Satz 112, es gelten $P_A(D_t)w_i(t) = 0$ und $w_i^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \ldots, n-1$, $i = 1, \ldots, n$. Laut dem Satz 64 gilt $w_i(t) = 0$, $\forall t$, $i = 1, \ldots, n$. Aber $\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{0}$ verletzt die linear Unabhängigkeit der Lösungen $\{\boldsymbol{x}_j(t)\}_{j=1}^m$. Daher gilt $m \leq n$. Nun sei $\boldsymbol{x}(t) = \sum_{j=1}^m c_j\boldsymbol{x}_j(t)$ eine beliebige Lösung, die bezüglich der Lösungsbasis so dargestellt werden kann. Da das Gleichgewicht $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ asymptotisch attraktiv ist, gilt $c_j\boldsymbol{x}_j(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für $\|c_j\boldsymbol{x}_j(0)\|$ klein genug. Für $\epsilon > 0$ wähle $\{c_j\}$ sodass $\|c_j\boldsymbol{x}_j(t)\| < \epsilon/m$, $\forall t \geq 0$. Dann folgt $\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq \sum_{j=1}^m \|c_j\boldsymbol{x}_j(t)\| < \epsilon$, $\forall t \geq 0$. ■

Bemerkung: Im allgemeinen ist ein Gleichgewicht nicht immer stabil wenn es asymptotisch attraktiv ist.

Stabilität

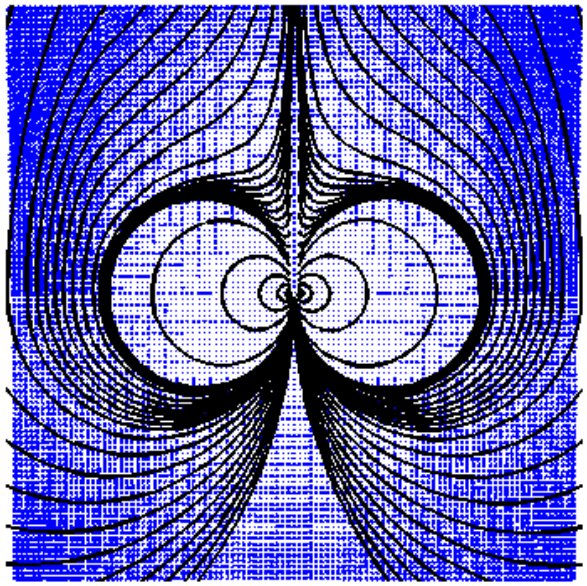
- Beispiel: Für das System:



$$x' = \begin{cases} 2xy, D_1 \cup D_2 \cup D_3 \\ 2xy/(4|x|-7), D_4 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} y^2 - x^2, D_1 \cup D_2 \\ 4|x| - y^2 - 3x^2, D_3 \\ (4|x| - y^2 - 3x^2)/(3 - 4/|x|), D_4 \end{cases}$$

d.h. $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t))$, ist $\langle x, y \rangle = \mathbf{0}$ ein asymptotisch attraktives Gleichgewicht, das nicht stabil ist:



Sei $\epsilon \in (0,1)$. $\forall \delta > 0$, $\exists \boldsymbol{x}_0 \in B(0,\delta)$, wobei

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

und $\exists T > 0$ mit $\boldsymbol{x}(T) \notin B(0,1)$. Trotzdem gilt

$$\boldsymbol{x}(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Stabilität

Satz: Sei $\boldsymbol{x}^\star$ ein Gleichgewicht für das autonome System $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t))$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, d.h. $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^\star) = 0$. Für $\boldsymbol{X} \in \mathcal{C}^1(\boldsymbol{x}^\star, \epsilon)$ seien $J = \partial\boldsymbol{X}/\partial\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^\star)$ und $\mu = \max \Re\{\sigma(J)\}$, wobei $\sigma(J)$ die Eigenwerte (Spektrum) von J bezeichnet. Das Gleichgewicht $\boldsymbol{x}^\star$

1. ist streng stabil wenn $\mu < 0$,
2. ist instabil wenn $\mu > 0$,
3. könnte stabil oder instabil sein wenn $\mu = 0$.

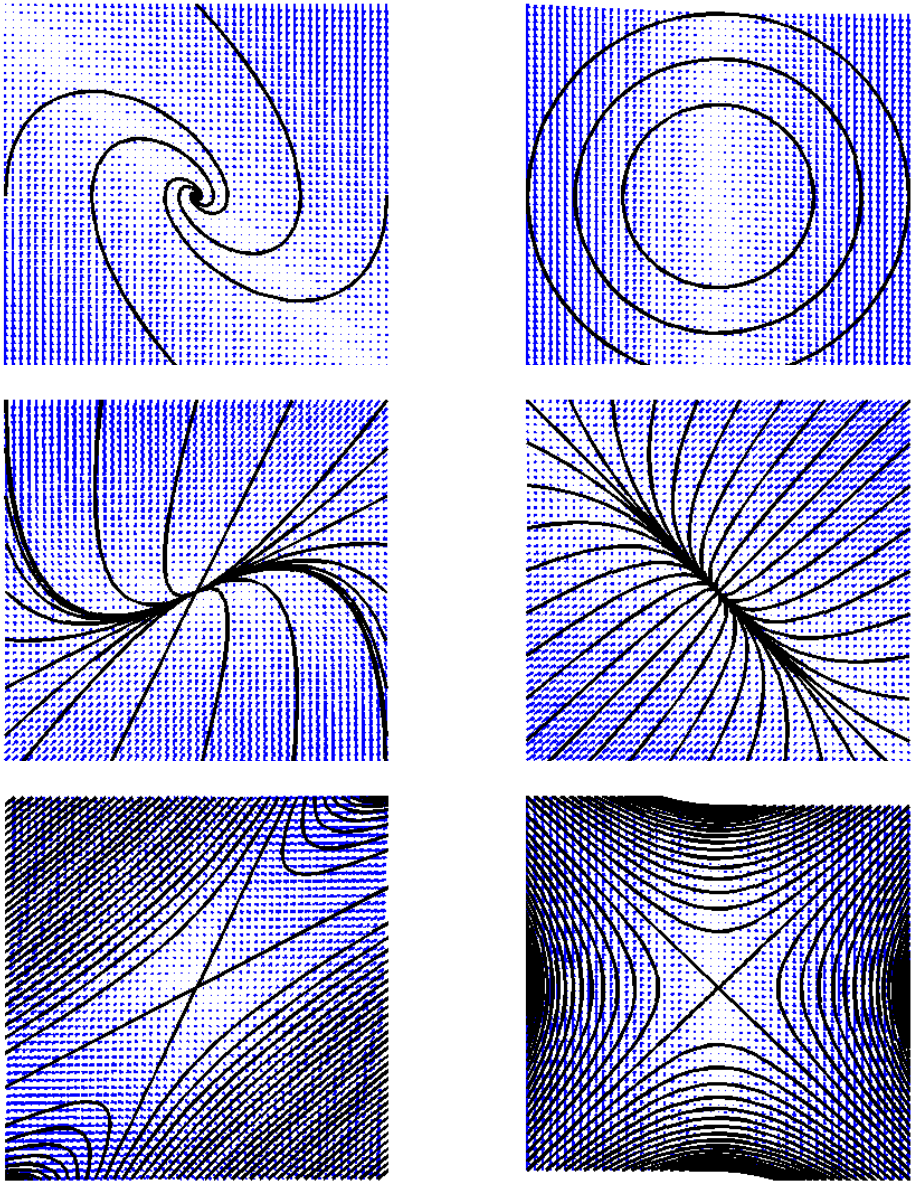
- Beispiel: Für das logistische Modell
$$P'(t) = F(P(t)), \quad F(P) = P(1-P)$$
ist $P_1^\star = 0$ instabil aber $P_2^\star = 1$ ist streng stabil:
$$F'(P) = 1 - 2P, \quad F'(0) = 1 > 0, \quad F'(1) = -1 < 0$$
- Beispiel: Für das Pendel Modell 107 ist $\boldsymbol{x}_2^\star = \langle \pi, 0 \rangle$ instabil:
$$\ddot\theta(t) + \sin(\theta(t)) = 0 \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t)) \quad \text{mit}$$
$$\boldsymbol{x}(t) = \langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \langle \theta(t), \dot\theta(t) \rangle, \quad \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \langle x_2, -\sin(x_1) \rangle$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_2^\star) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma(J_2) = \{\pm 1\}$$

aber $\boldsymbol{x}_1^\star = \boldsymbol{0}$? (stabil, siehe Lyapunov 119 unten.)

Fokalpunkte, Knotenpunkte und Sattelpunkte

- Für die Stabilität des Gleichgewichts $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ des Systems $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + p\lambda + q$.
- Fokalpunkte. $4q > p^2 \geq 0$.
  $\lambda_{1,2} = \mu \pm \imath\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$
  $\mu < 0 \Rightarrow \boldsymbol{x}_0$ streng stabil,
  $\mu > 0 \Rightarrow \boldsymbol{x}_0$ instabil,
  $\mu = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x}_0$ stabil.
- Knotenpunkte. $p^2 > 4q > 0$.
  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$,
  $\lambda_{1,2} < 0 \Rightarrow \boldsymbol{x}_0$ streng stabil,
  $\lambda_{1,2} > 0 \Rightarrow \boldsymbol{x}_0$ instabil.
- Sattelpunkte. $p^2 > 4q > 0$.
  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$,
  $\boldsymbol{x}_0$ instabil.



Methode von Lyapunov

Def: Sei $\boldsymbol{x}^\star$ ein Gleichgewicht für das autonome System $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t))$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, d.h. $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^\star) = 0$. Dann ist $F \in \mathcal{C}^1(B(\boldsymbol{x}^\star, \epsilon))$ eine *Lyapunov Funktion* für $\boldsymbol{x}^\star$ wenn:

1. In $B(\boldsymbol{x}^\star, \epsilon)$ hat F ein einziges Minimum in $\boldsymbol{x}^\star$,
2. Es gilt $\nabla F(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \leq 0$, $\forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}^\star, \epsilon)$.

Wenn $<$ gilt, ist F eine *strenge Lyapunov Funktion*.

Satz: Sei $\boldsymbol{x}^\star$ ein Gleichgewicht für das autonome System $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t))$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, d.h. $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^\star) = 0$. Existiert für $\boldsymbol{x}^\star$ eine Lyapunov Funktion F, dann ist $\boldsymbol{x}^\star$ ein stabiles Gleichgewicht. Wenn F streng ist, ist $\boldsymbol{x}^\star$ streng stabil. Beweis: Hausaufgabe.

- Beispiel: Für das Pendel Modell 107
$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{X}(x_1, x_2) = \langle x_2, -\sin(x_1)\rangle$$
mit Gleichgewicht $\boldsymbol{x}_1^\star = \boldsymbol{0}$ ist
$$F(x_1, x_2) = x_2^2 - 2\cos(x_1)$$
eine Lyapunov Funktion,
$$\nabla F(x_1, x_2) = 2\langle \sin(x_1), x_2\rangle, \quad \nabla^2 F(x_1, x_2) = 2\mathrm{diag}\{\cos(x_1), 1\}$$
$$\nabla F(\boldsymbol{x}_1^\star) = 0, \quad \nabla^2 F(\boldsymbol{x}_1^\star) = 2I, \quad \nabla F(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = 0$$

Methode von Lyapunov

Satz: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 1$, und SPD (symmetrisch positiv definit) $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt es ein SPD $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Lösung der *Lyapunov Gleichung*,

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q$$

genau dann wenn $\max \Re\{\sigma(A)\} < 0$. Dann ist P eindeutig.

Beweis: Sei P eine SPD Lösung. Sei $\boldsymbol{x}(t)$ eine Lösung von $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$. Die (Lyapunov) Funktion $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$ erfüllt

$$\begin{aligned} D_tF(\boldsymbol{x}(t)) &= \boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}'(t) \\ &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(A^{\mathrm{T}}P + PA)\boldsymbol{x}(t) = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\boldsymbol{x}(t) \\ &\leq -\min\{\sigma(Q)\}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 \leq -KF(\boldsymbol{x}(t)) \end{aligned}$$

wobei $K = \min\{\sigma(Q)\}/\max\{\sigma(P)\}$. Es folgt, $D_t[F(\boldsymbol{x}(t))\mathrm{e}^{Kt}] \leq 0$ und daher $F(\boldsymbol{x}(t))\mathrm{e}^{Kt} \leq F(\boldsymbol{x}(0))$ oder

$$\min\{\sigma(P)\}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 \leq F(\boldsymbol{x}(t)) \leq F(\boldsymbol{x}(0))\mathrm{e}^{-Kt} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Laut dem Satz 114 folgt $\max \Re\{\sigma(A)\} < 0$. Nun sei $\max \Re\{\sigma(A)\} < 0$, und daher ist das Integral wohl definiert:

$$P = \int_0^\infty \mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}Q\mathrm{e}^{tA}dt$$

Dann gilt

Methode von Lyapunov

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = \int_0^\infty A^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}Q\mathrm{e}^{tA}dt + \int_0^\infty \mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}Q\mathrm{e}^{tA}Adt$$
$$= \int_0^\infty D_t[\mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}Q\mathrm{e}^{tA}]dt = -Q.$$

Zusätzlich ist P SPD weil

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} = \int_0^\infty \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}Q\mathrm{e}^{tA}\boldsymbol{x}dt = \int_0^\infty \|Q^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{tA}\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0$$

und $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow Q^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{tA}\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Sei $\tilde{P}$ eine andere Lösung. Dann folgt

$$\tilde{P} = -\int_0^\infty D_t[\mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}\tilde{P}\mathrm{e}^{tA}]dt = -\int_0^\infty \mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}(A^{\mathrm{T}}\tilde{P} + \tilde{P}A)\mathrm{e}^{tA}dt$$
$$= \int_0^\infty \mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}Q\mathrm{e}^{tA}dt = P. \qquad \blacksquare$$

Satz (Poincaré-Lyapunov): Wenn das Gleichgewicht $\boldsymbol{x}^\star = \mathbf{0}$ für das lineare autonome System $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ streng stabil ist, dann ist es auch für das nicht lineare System

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \xi(\boldsymbol{x}(t))$$

wenn $\|\xi(\boldsymbol{x})\| = o(\|\boldsymbol{x}\|)$. $\qquad (\|\xi(\boldsymbol{x})\|/\|\boldsymbol{x}\| \xrightarrow{\boldsymbol{x}\to 0} 0)$

Beweis: Für ein SPD Q sei P eine Lösung der Lyapunov Gleichung,

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q$$

Sei $\boldsymbol{x}(t)$ eine Lösung des nicht linearen Systems mit

Methode von Lyapunov

$$\|\boldsymbol{x}(0)\|^2 \le \epsilon^2/\kappa(P), \quad \kappa(P) = \max\{\sigma(P)\}/\min\{\sigma(P)\}$$

wobei $\epsilon > 0$ klein genug ist, dass

$$\|\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})\| < \tfrac{1}{4}\|\boldsymbol{x}\| \min\{\sigma(Q)\}/\max\{\sigma(P)\}$$

wenn $\|\boldsymbol{x}\| \le \epsilon$. Die (Lyapunov) Funktion $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} P \boldsymbol{x}$ erfüllt,

$$\begin{aligned} D_t F(\boldsymbol{x}(t)) &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(A^{\mathrm{T}}P + PA)\boldsymbol{x}(t) + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}(t)) \\ &= -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\boldsymbol{x}(t) + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}(t)) \\ &\le -\min\{\sigma(Q)\}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 + 2\max\{\sigma(P)\}\|\boldsymbol{x}(t)\|\|\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}(t))\|. \end{aligned}$$

Solang $\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \epsilon$ gilt, folgt

$$D_t F(\boldsymbol{x}(t)) \le -\tfrac{1}{2}\min\{\sigma(Q)\}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 \le -KF(\boldsymbol{x}(t))$$

wobei $K = \frac{1}{2}\min\{\sigma(Q)\}/\max\{\sigma(P)\}$. Daher gelten $D_t[F(\boldsymbol{x}(t))\mathrm{e}^{Kt}] \le 0$ und $F(\boldsymbol{x}(t))\mathrm{e}^{Kt} \le F(\boldsymbol{x}(0))$. Es folgt

$$\min\{\sigma(P)\}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 \le F(\boldsymbol{x}(t)) \le F(\boldsymbol{x}(0))\mathrm{e}^{-Kt} \le \max\{\sigma(P)\}\|\boldsymbol{x}(0)\|^2\mathrm{e}^{-Kt}$$

oder $\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 \le \kappa(P)\|\boldsymbol{x}(0)\|^2\mathrm{e}^{-Kt} < \epsilon^2$, $t > 0$. Es bleibt dann $\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \epsilon$, $\forall t \ge 0$. Weiters gilt

$$\min\{\sigma(P)\}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 \le F(\boldsymbol{x}(t)) \le \mathrm{e}^{-Kt}F(\boldsymbol{x}(0)) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \blacksquare$$

Ungleichung von Gronwall

Satz (Gronwall): Seien $\alpha, \beta, u \in \mathcal{C}(I)$, $I = [a, b]$, mit $\beta(t) > 0$, $\forall t \in I$. Wenn

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds, \quad \forall t \in I$$

dann

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left[\int_s^t \beta(r)dr\right] ds, \quad t \in I.$$

Beweis: Die Funktion

$$v(t) = \int_a^t \beta(s)u(s)ds$$

erfüllt

$$v'(t) = \beta(t)u(t) \leq \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)v(t).$$

Mit

$$\gamma(t) = -\int_a^t \beta(r)dr \qquad (\gamma(s) - \gamma(t) = \int_s^t \beta(r)dr)$$

folgt

$$D_t[v(t)\mathrm{e}^{\gamma(t)}] = [v'(t) - \beta(t)v(t)]\mathrm{e}^{\gamma(t)} \leq \alpha(t)\beta(t)\mathrm{e}^{\gamma(t)}.$$

Durch Integration,

$$v(t)e^{\gamma(t)} - 0 = \int_a^t D_s[v(s)\mathrm{e}^{\gamma(s)}]ds \leq \int_a^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\gamma(s)}ds$$

oder

$$\int_a^t \beta(s)u(s)ds = v(t) \leq \int_a^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\gamma(s)-\gamma(t)}ds \qquad \blacksquare$$

Ungleichung von Gronwall

Alternativer Beweis des Satzes 121: Da $\max \Re\{\sigma(A)\} < 0$ gilt, $\exists K, \mu > 0$ wobei $\|\mathrm{e}^{At}\| \leq K\mathrm{e}^{-\mu t}$, $\forall t \geq 0$. Sei $\epsilon < \mu$ und δ klein genug, dass $\|\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})\| \leq \epsilon\|\boldsymbol{x}\|/K$ für $\|\boldsymbol{x}\| \leq \delta$. Sei $\boldsymbol{x}(t)$ eine Lösung des nicht linearen Systems,

$$D_t[\mathrm{e}^{-At}\boldsymbol{x}(t)] = \mathrm{e}^{-At}[\boldsymbol{x}'(t) - A\boldsymbol{x}(t)] = \mathrm{e}^{-At}\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}(t))$$

mit $\|\boldsymbol{x}(0)\| \leq \delta/K$. Durch Integration,

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{At}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)}\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}(s))ds$$

Durch Abschätzen,

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq K\mathrm{e}^{-\mu t}\|\boldsymbol{x}(0)\| + \int_0^t K\mathrm{e}^{-\mu(t-s)}\|\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}(s))\|ds$$

Solang $\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq \delta$ gilt, folgt

$$\mathrm{e}^{\mu t}\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq K\|\boldsymbol{x}(0)\| + \epsilon\int_0^t \mathrm{e}^{\mu s}\|\boldsymbol{x}(s)\|ds$$

Nach Gronwall 124, $\quad (u(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\|\boldsymbol{x}(t)\|, \alpha = K\|\boldsymbol{x}(0)\|, \beta = \epsilon)$

$$\mathrm{e}^{\mu t}\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq K\|\boldsymbol{x}(0)\|\left[1 + \epsilon\int_0^t \mathrm{e}^{\epsilon(s-t)}ds\right] =$$

$$= K\|\boldsymbol{x}(0)\|\left[1 - \int_0^t D_s\mathrm{e}^{\epsilon(t-s)}ds\right] = K\|\boldsymbol{x}(0)\|\mathrm{e}^{\epsilon t}$$

oder $\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq K\|\boldsymbol{x}(0)\|\mathrm{e}^{(\epsilon-\mu)t} < \delta$, $t > 0$. Es bleibt dann $\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq \delta$, $\forall t \geq 0$, und es folgt $\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq \delta\mathrm{e}^{(\epsilon-\mu)t} \xrightarrow{t\to\infty} 0$. ■

Grenzzyklen

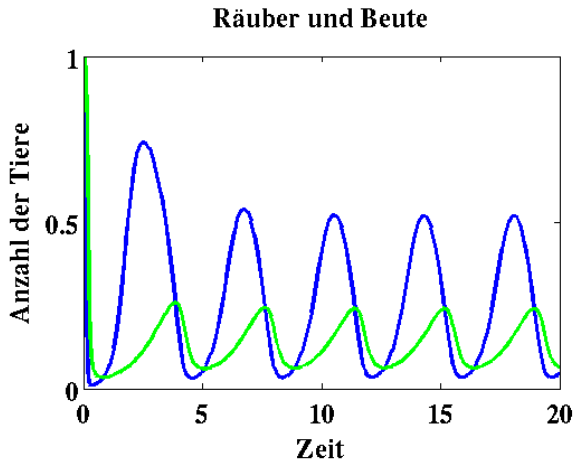
Hausaufgabe: Zeige für das Räuber-Beute Modell
$x'(t) = [\alpha - \beta y(t)]x(t), \quad y'(t) = [\gamma x(t) - \delta]y(t), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$
die Funktion

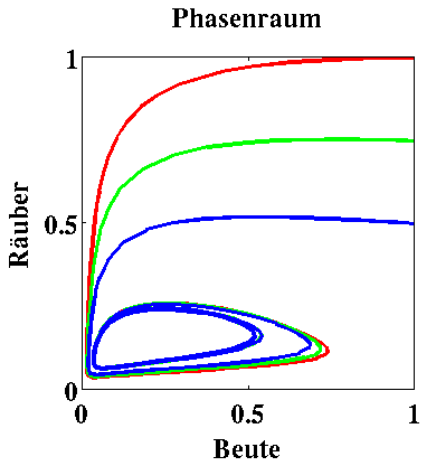
$$V(x, y) = \delta \ln(x) - \gamma x + \alpha \ln(y) - \beta y$$

ist eine Lyapunov Funktion für das Gleichgewicht
$(x^\star, y^\star) = (\delta/\gamma, \alpha/\beta)$. (Siehe 103.)

- Räuber-Beute Variante mit *stabilen Grenzzyklen*,

$$x' = \alpha x \left(1 - \frac{x}{\kappa}\right) - \frac{\beta x y}{1 + \gamma x}, \quad y' = \tau y \left(1 - \frac{y}{\sigma x}\right)$$





$\alpha = 5$, $\beta = 66\frac{2}{3}$, $\gamma = 6\frac{2}{3}$, $\kappa = 1$, $\sigma = 1$, $\tau = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.
Alle 3 Lösungskurven nähern sich an einer periodischen Lösung.

Grenzzyklen

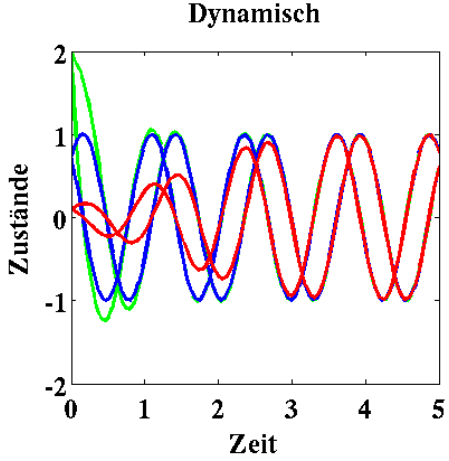
Def: Für $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, ist die Menge M ein *Attraktor*, wenn $\exists \delta > 0$, sodass $\forall \boldsymbol{x}_0$ mit $\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}_0, M) < \delta$, gilt die Konvergenz $\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}(t), M) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Wenn die Konvergenz $\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}(t), M) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt, ist M ein *Abweiser*.

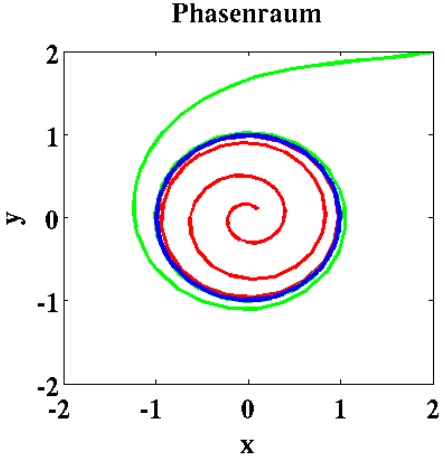
Def: Für $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, ist die Menge G ein *Grenzzyklus*, wenn eine periodische Lösung $\boldsymbol{x}_G$ in G liegt, und es existiert mindestens eine andere Lösung $\tilde{\boldsymbol{x}}$, die erfüllt $\mathrm{dist}(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), G) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ oder $\mathrm{dist}(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), G) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. G ist ein *stabiler Grenzzyklus* wenn es ein Attraktor ist, und G ist ein *instabiler Grenzzyklus* wenn es ein Abweiser ist.

- Beispiel:

$$\begin{cases} x' = (1 - r^2)x - y \\ y' = (1 - r^2)y + x \end{cases}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$rr' = xx' + yy'$$
$$= \cdots = (1 - r^2)r^2$$





Grenzzyklen

- Aus $r'(t) = [1 - r^2(t)]r(t)$ und $r(0) > 0$ folgt $r(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1$, d.h. $r = 1$ ist streng stabil für diese skalare DG.
- Sei $\boldsymbol{x}(t)$ eine Lösung mit $r(t) = \|\boldsymbol{x}(t)\|$. Sei
$$G = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{x}\| = 1\}.$$
Es folgt, $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}(t), G) = |r(t) - 1| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, und G ist ein stabiler Grenzzyklus.
- Der nächste Satz kann für dieses Beispiel angewendet werden, um auf die Existenz eines Grenzzyklus zu schließen.
$$D = \overline{B(0,2)} \backslash B(0,1/2), \qquad \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x} > 0 \text{ für } \|\boldsymbol{x}\| = 1/2$$
$$E = \mathbb{R}^2, \qquad \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x} < 0 \text{ für } \|\boldsymbol{x}\| = 2.$$

Satz (Poincaré-Bendixson): Für das autonome System $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t))$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, wird angenommen:

1. $D \subset \mathbb{R}^2$ ist kompakt, $E \subset \mathbb{R}^2$ ist offen, $D \subset E$.
2. $\boldsymbol{X} \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R}^2)$ und $\boldsymbol{X}$ hat keine Nullstellen in D.
3. Eine Lösungskurve K ist in D enthalten.

Dann ist K eine periodische Lösungskurve oder K nähert sich an einer periodischen Lösungskurve für $t \to \infty$.

Grenzzyklen

- Beispiel: In der *Rayleigh* DG,
$$\ddot{x} - \mu(1 - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0, \quad \mu > 0$$
ist Dämpfung positiv oder negativ, je nach Betrag der Geschwindigkeit. Es gibt einen Grenzzyklus in der Poincaré Phasenebene.
- Wenn man die Rayleigh DG ableitet und $y = \dot{x}\sqrt{3}$ setzt, bekommt man die *Van der Pol* DG,
$$\ddot{y} - \mu(1 - y^2)\dot{y} + y = 0, \quad \mu > 0$$
die mit Vakuumröhren zu tun hat. Es gibt einen Grenzzyklus in der Poincaré Phasenebene.

Satz (Levinson-Smith): Nimm an, in der Liénard DG,
$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$
haben f und g folgende Eigenschaften: $g(-x) = -g(x)$, $f(-x) = f(x)$, $g(x)/x > 0$, $\forall x$, $\mathrm{sgn}(f(x)) = \mathrm{sgn}((x-a)(x-b))$ für $a < 0 < b$ und $\int_0^\infty f(x)dx = \infty$. Dann gibt es einen eindeutigen Grenzzyklus in der Poincaré Phasenebene, der für alle nicht trivialen Lösungskurven attraktiv ist.

Existenz und Eindeutigkeit

- Für ein System, $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{X} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$
$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$
wird bewiesen, das Anfangswertproblem ist wohlgestellt 25.
- Ein *Integral* des Systems ist eine Funktion $U(\boldsymbol{x}, t)$, wobei $U(\boldsymbol{x}(t), t) =$ Konstante gilt für jede Lösung $\boldsymbol{x}(t)$.
- Obwohl das System als autonomes System umformuliert werden kann 100, werden die Aufgaben nicht leichter.
- Da jede DG höherer Ordnung als System erster Ordnung umgeschrieben werden kann, ist die gezielte Wohlgestelltheit allgemein.
- Es wird mindestens angenommen, dass $\boldsymbol{X} \in \mathcal{C}(R, \mathbb{R}^n)$ für $R \subset \mathbb{R}^{n+1}$, oder dass $\boldsymbol{X}$ Lipschitz stetig ist:

Def: $\boldsymbol{X} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ erfüllt eine Lipschitz Bedingung in $R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ genau dann wenn $\exists L > 0$ wobei
$$\|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{y}, t)\| \leq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \quad \forall (\boldsymbol{x}, t), (\boldsymbol{y}, t) \in R$$

Lipschitz Bedingung

Satz: Wenn $\boldsymbol{X} \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$ für eine konvexe und kompakte Menge $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, erfüllt $\boldsymbol{X}$ eine Lipschitz Bedingung in D.

Beweis: Sei L gegeben durch $\|\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)\|/n \leq \|\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)\|_{\mathrm{F}}/n \leq \max_{1 \leq i \leq n} \max_{(\boldsymbol{x},t) \in D} \|\partial_{x_i} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)\| = L$.
Für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$ folgt aus Konvexität von D,

$$\boldsymbol{x} + s(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \in D, \quad \forall s \in [0, 1].$$

Durch die Ketten-Regel,

$$D_s \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x} + s(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}), t) = \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x} + s(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}), t) \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}).$$

Für die Funktion $\phi_i(s) = X_i(\boldsymbol{x} + s(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}), t)$ folgt aus dem Mittelwertsatz, $\exists \sigma_i \in [0, 1]$ wobei $\phi_i(1) - \phi_i(0) = \phi_i'(\sigma_i)(1 - 0)$ oder mit $\Sigma = \mathrm{diag}\{\sigma_i\}_{i=1}^n$,

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{y}, t) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t) = \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x} + \Sigma(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}), t) \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}).$$

Durch Abschätzen,

$$\|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{y}, t) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)\| \leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| \max_{(\boldsymbol{\xi},\tau) \in D} \|\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi}, \tau)\|. \qquad \blacksquare$$

Satz: Wenn $\boldsymbol{X}$ eine Lipschitz Bedingung in $R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ erfüllt, existiert höchstens eine Lösung $\boldsymbol{x}(t)$, $t, t_0 \in I$ des Anfangswertproblems

Eindeutigkeit

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \quad \text{mit} \quad \{(\boldsymbol{x}(t), t) : t \in I\} \subset R.$$

Beweis: Seien $\boldsymbol{x}(t)$ und $\boldsymbol{y}(t)$ beide Lösungen. Dann $\sigma(t) = \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\|^2$ erfüllt $\sigma(t_0) = 0$ und

$$\begin{aligned} \sigma'(t) &= 2[\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)] \cdot [\boldsymbol{x}'(t) - \boldsymbol{y}'(t)] \\ &= 2[\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)] \cdot [\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{y}(t), t)] \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \sigma'(t) \le |\sigma'(t)| &\le 2\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\| \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{y}(t), t)\| \\ &\le 2L\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\|^2 = 2L\sigma(t) \end{aligned}$$

Mit dem Integrationsfaktor e^{-2Lt}

$$[\sigma(t)\mathrm{e}^{-2Lt}]' = [\sigma'(t) - 2L\sigma(t)]\mathrm{e}^{-2Lt} \le 0$$

ist $\sigma(t)\mathrm{e}^{-2Lt}$ nicht steigend. Daher

$$0 \le \sigma(t)\mathrm{e}^{-2Lt} \le \sigma(t_0)\mathrm{e}^{-2Lt_0} = 0$$

und $0 = \sigma(t) = \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\|$, $\forall t \in I$. ■

Satz: Für $t \in I$ seien $\boldsymbol{u}(t)$ und $\boldsymbol{v}(t)$ zwei Lösungen der DG $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t)$ mit $\{(\boldsymbol{u}(t), t) : t \in I\}, \{(\boldsymbol{v}(t), t) : t \in I\} \subset R$, wobei $\boldsymbol{X}$ eine Lipschitz Bedingung in R erfüllt. Dann folgt

Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten

$$\|\boldsymbol{u}(t+\tau)-\boldsymbol{v}(t+\tau)\| \le \mathrm{e}^{2L|\tau|}\|\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{v}(t)\|, \quad t+\tau \in I$$

Beweis: Die Funktionen $\sigma_\pm(\tau) = \|\boldsymbol{u}(t\pm\tau)-\boldsymbol{v}(t\pm\tau)\|^2$, $t\pm\tau \in I$, erfüllen $\sigma_\pm(\tau) \ge 0$, $\sigma'_\pm(\tau) \le 2L\sigma_\pm(\tau)$ und daher

$$\sigma_\pm(\tau)\mathrm{e}^{-2L\tau} - \sigma_\pm(0) = \int_0^\tau [\sigma_\pm(s)\mathrm{e}^{-2Ls}]' ds \le 0, \quad \tau > 0$$

oder für $\tau > 0$

$$\|\boldsymbol{u}(t\pm\tau)-\boldsymbol{v}(t\pm\tau)\| \le \mathrm{e}^{2L\tau}\|\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{v}(t)\|. \qquad \blacksquare$$

Korollar: Sei $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \quad \text{mit} \quad \{(\boldsymbol{x}(t), t) : t \in I\} \subset R.$$

wobei $\boldsymbol{X}$ eine Lipschitz Bedingung in R, und $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$ ist wohl definiert in R. Dann

1. $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$ ist eine stetige Funktion von $(\boldsymbol{x}_0, t)$,
2. $\tilde{\boldsymbol{x}}_0 \to \boldsymbol{x}_0 \Rightarrow \boldsymbol{x}(\tilde{\boldsymbol{x}}_0, t) \to \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$ gleichmäßig für $t \in I$.

Beweis: Laut dem letzten Satz,

$$\|\boldsymbol{x}(t, \tilde{\boldsymbol{x}}_0) - \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)\| \le \mathrm{e}^{2L|t-t_0|}\|\tilde{\boldsymbol{x}}_0 - \boldsymbol{x}_0\| \qquad \blacksquare$$

Stetige Abhängigkeit von Parametern

Satz: Sei $\sigma(t) \geq 0$, $t \in [a, b]$, eine differenzierbare Funktion die erfüllt,

$$\sigma'(t) \leq 2L\sigma(t) + 2\epsilon\sqrt{\sigma(t)}, \quad t \in [a, b].$$

Dann gilt

$$\sigma(t) \leq \left[\sqrt{\sigma(a)}\mathrm{e}^{L(t-a)} + \tfrac{\epsilon}{L}(\mathrm{e}^{L(t-a)} - 1)\right]^2, \quad t \in [a, b]$$

Beweis: Die Bernoulli DG

$$u'(t) = 2Lu(t) + 2\epsilon\sqrt{u(t)}, \quad u(a) = \sigma(a)$$

wird zuerst gelöst. Aus $u'(t) > 0$ und $u(a) = \sigma(a) > 0$ folgt $u(t) > 0$. Mit $v(t) = \sqrt{u(t)}$,

$$2v(t)v'(t) = 2Lv^2(t) + 2\epsilon v(t)$$

oder mit $v(t) > 0$,

$$2v'(t) = 2Lv(t) + 2\epsilon, \quad v(a) = \sqrt{u(a)} = \sqrt{\sigma(a)}.$$

Die Lösung ist

$$\sqrt{u(t)} = v(t) = \sqrt{\sigma(a)}\mathrm{e}^{L(t-a)} + (\epsilon/L)(\mathrm{e}^{L(t-a)} - 1)$$

Die Funktion $F(\sigma, t) = 2L\sigma + 2\epsilon\sqrt{\sigma}$ erfüllt eine Lipschitz Bedingung für $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, d.h. $\sup_{\sigma \geq \sigma_0} \partial_\sigma F(\sigma, t) = 2L + \epsilon/\sqrt{\sigma_0}$.

Stetige Abhängigkeit von Parametern

Laut dem Satz 28 folgt $\sigma(t) \leq u(t)$, $t \in [a, b]$.
Nun für den Fall $\sigma(a) = 0$ sei $u_k(t)$ die Lösung der Bernoulli DG

$$u_k'(t) = 2Lu_k(t) + 2\epsilon\sqrt{u_k(t)}, \quad u_k(a) = 1/k, \quad k \in \mathbb{N}$$

Zu zeigen ist, $\sigma(t) \leq u_k(t)$, $t \in [a, b]$. Nimm an, $\exists t_1 > a$ wobei $u_k(t_1) < \sigma(t_1)$. Sei $t_0 = \max\{t \in [a, t_1) : u_k(t) \geq \sigma(t)\}$. Es folgen, $\sigma(t_0) = u_k(t_0) > 0$ und $u_k(t) < \sigma(t)$, $t \in (t_0, t_1]$. Diese Ungleichung verletzt den ersten Teil des Beweises, wobei $\sigma(t) \leq u_k(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Es folgt, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\sigma(t) \leq \left[\mathrm{e}^{L(t-a)}/\sqrt{k} + (\epsilon/L)(\mathrm{e}^{L(t-a)} - 1)\right]^2, \quad t \in [a, b]. \qquad \blacksquare$$

Satz: Seien $\boldsymbol{x}(t)$ und $\boldsymbol{y}(t)$ Lösungen der DG'en

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t), \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y}(t), t)$$

mit $\{(\boldsymbol{x}(t), t) : t \in [a, b]\}, \{(\boldsymbol{y}(t), t) : t \in [a, b]\} \subset R$, wobei $\boldsymbol{X}$ eine Lipschitz Bedingung in R erfüllt. Seien $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathcal{C}(R)$ mit

$$\|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}, t)\| \leq \epsilon, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in R$$

Dann folgt

$$\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\| \leq \|\boldsymbol{x}(a) - \boldsymbol{y}(a)\|\mathrm{e}^{L|t-a|} + \tfrac{\epsilon}{L}(\mathrm{e}^{L|t-a|} - 1)$$

Äquivalente Integralgleichung

Beweis: Die Funktion $\sigma(t) = \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\|^2$ erfüllt

$$\begin{aligned}\sigma'(t) &= 2[\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)] \cdot [\boldsymbol{x}'(t) - \boldsymbol{y}'(t)] \\ &= 2[\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)] \cdot [\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t) - \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y}(t), t)] \\ &= 2[\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)] \cdot [\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t) \pm \boldsymbol{X}(\boldsymbol{y}(t), t) - \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y}(t), t)]\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\sigma'(t) \leq |\sigma'(t)| &\leq 2\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\|\|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{y}(t), t)\| \\ &\quad + 2\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\|\|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t) - \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y}(t), t)\| \\ &\leq 2L\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\|^2 + 2\epsilon\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\|\end{aligned}$$

oder

$$\sigma'(t) \leq 2L\sigma(t) + 2\epsilon\sqrt{\sigma(t)}$$

Die Behauptung folgt mit dem letzten Satz. ■

Satz: Für $\boldsymbol{X} \in \mathcal{C}(R)$, $R = \mathbb{R}^n \times I$, $t_0 \in I$, ist $\boldsymbol{x}$ eine Lösung der Integralgleichung,

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(s), s)ds, \quad t \in I, \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(I)$$

genau dann wenn $\boldsymbol{x}$ eine Lösung des Anfangswertproblems ist

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad t \in I, \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}^1(I)$$

Beweis: **Hausaufgabe.**

Existenz

Def: Für $\boldsymbol{X} \in \mathcal{C}(R)$, $R = \mathbb{R}^n \times I$, $t_0 \in I$, und $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ sei die Abbildung U für $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(I)$ definiert durch

$$[U\boldsymbol{x}](t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(s), s)ds$$

Korollar: Die Abbildung U hat einen Fixpunkt $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(I)$ genau dann wenn $\boldsymbol{x}$ eine Lösung des Anfangswertproblems ist

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad t \in I, \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}^1(I)$$

Satz: Für $R = \mathbb{R}^n \times I$, $t_0 \in I$, erfüllt $\boldsymbol{X}$ eine Lipschitz Bedingung in R. Sei $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad t \in I.$$

Beweis: Zur Vereinfachung seien $t_0 = 0$ und $I = [0, T]$.

Hausaufgabe: Wiederhole für den allgemeinen Fall.

Zu zeigen ist, die Folge $\boldsymbol{x}^{k+1} = U\boldsymbol{x}^k$, $\boldsymbol{x}^0(t) = \boldsymbol{x}_0$, konvergiert gleichmäßig für $t \in I$. Sei

$$M = \sup_{t \in I} \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0, t)\|.$$

Sukzessive Approximation

Es gilt

$$\|\boldsymbol{x}^1(t) - \boldsymbol{x}^0(t)\| = \|\int_0^t \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^0(s), s)ds\| \leq \int_0^t \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0, s)\|ds \leq Mt$$

Weiters für $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\boldsymbol{x}^{k+1}(t) - \boldsymbol{x}^k(t)\| \leq \int_0^t \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^k(s), s) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^{k-1}(s), s)\|ds$$

Mit der Lipschitz Bedingung,

$$\|\boldsymbol{x}^{k+1}(t) - \boldsymbol{x}^k(t)\| \leq L\int_0^t \|\boldsymbol{x}^k(s) - \boldsymbol{x}^{k-1}(s)\|ds$$

Insbesondere,

$$\|\boldsymbol{x}^2(t) - \boldsymbol{x}^1(t)\| \leq L\int_0^t \|\boldsymbol{x}^1(s) - \boldsymbol{x}^0(s)\|ds \leq L\int_0^t Msds = ML\frac{t^2}{2!}$$

$$\|\boldsymbol{x}^3(t) - \boldsymbol{x}^2(t)\| \leq L\int_0^t \|\boldsymbol{x}^2(s) - \boldsymbol{x}^1(s)\|ds \leq L\int_0^t ML\frac{s^2}{2!}ds = ML^2\frac{t^3}{3!}$$

usw. Induktiv für $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\boldsymbol{x}^k(t) - \boldsymbol{x}^{k-1}(t)\| \leq \frac{M}{L}\frac{(Lt)^k}{k!} \leq \frac{M}{L}\frac{(LT)^k}{k!}$$

Sukzessive Approximation

Nach dem Weierstrass M-test, konvergiert folgende Folge $\{\boldsymbol{x}^K(t)\}$ gleichmäßig für $t \in I$,

$$\boldsymbol{x}^K(t) = \boldsymbol{x}^0(t) + \sum_{k=0}^{K-1} [\boldsymbol{x}^{k+1}(t) - \boldsymbol{x}^k(t)] \qquad \blacksquare$$

Sei $\boldsymbol{x}^\infty(t)$ der Limes dieser Folge für $t \in I$. Nach dem Satz der gleichmäßigen Konvergenz gilt $\boldsymbol{x}^\infty \in \mathcal{C}(I)$. Zu zeigen ist, die Differenz

$$\boldsymbol{x}^\infty(t) - \boldsymbol{x}_0 - \int_0^t \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^\infty(s), s)ds, \quad t \in I$$

ist Null. Man subtrahiert,

$$0 = \boldsymbol{x}^{k+1}(t) - \boldsymbol{x}_0 - \int_0^t \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^k(s), s)ds, \quad t \in I$$

Durch Abschätzen,

$$\|\boldsymbol{x}^\infty(t) - \boldsymbol{x}^{k+1}(t) - \int_0^t [\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^\infty(s), s) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^k(s), s)]ds\|$$

$$\leq \|\boldsymbol{x}^\infty(t) - \boldsymbol{x}^{k+1}(t)\| + \int_0^t \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^\infty(s), s) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^k(s), s)\|ds$$

$$\leq (1 + LT) \max_{m=k,k+1} \sup_{s \in I} \|\boldsymbol{x}^\infty(s) - \boldsymbol{x}^m(s)\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \blacksquare$$

Lokale Existenz

Satz: Für $R = D \times I$ mit $D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leq K\}$ und $I = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq T\}$ erfüllt $\boldsymbol{X}$ eine Lipschitz Bedingung in R. Sei $M = \sup_{(\boldsymbol{x},t)\in R} \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)\|$. Dann existiert eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

für $|t - t_0| \leq \min\{T, K/M\}$.

Beweis: Sei $\mathcal{F}$ die Menge der Funktionen $\boldsymbol{x}$ die erfüllen

$$\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(\tilde{I}) \text{ wobei } \tilde{I} = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq \min\{T, K/M\}\},$$
$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{x}(t) \in D \text{ für } t \in \tilde{I}.$$

Für $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$ sei $\boldsymbol{y} = U\boldsymbol{x}$. Es gelten, $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}(\tilde{I})$, $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ und

$$\|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(s), s)\| ds \leq Mt \leq K, \quad t \in \tilde{I}$$

d.h. $U : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$. Da die Lipschitz Bedingung in $\tilde{R} = D \times \tilde{I} \subset R$ gilt und eine Folge $\boldsymbol{x}^k = U\boldsymbol{x}^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, immer $\boldsymbol{x}^k(t) \in D$ für $t \in \tilde{I}$ erfüllt, können die Schritte des letzten Beweises für $t \in \tilde{I}$ durchgeführt werden. Eindeutigkeit folgt mit dem Satz 130. ■

Satz von Arzelà-Ascoli

Def: Eine Menge $\mathcal{F}$ von Funktionen $\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$, $I = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq T\}$ ist *gleichgradig stetig* wenn, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ wobei

$$|t - s| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(s)\| < \epsilon$$

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$ wenn $s, t \in I$.

Satz (Arzelà-Ascoli): Sei eine Folge von Funktionen $\boldsymbol{x}^k : I \to \mathbb{R}^n$, $I = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq T\}$, beschränkt und gleichgradig stetig. Dann konvergiert eine Teilfolge $\{\boldsymbol{x}^{k_l}(t)\}$ gleichmäßig für $t \in I$.

Satz (Peano): Für $R = D \times I$ mit $D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leq K\}$ und $I = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq T\}$ gilt $\boldsymbol{X} \in \mathcal{C}(R)$. Sei $M = \sup_{(\boldsymbol{x},t)\in R} \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)\|$. Dann existiert mindestens eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

für $|t - t_0| \leq \min\{T, K/M\}$.

Beweis: Zur Vereinfachung seien $t_0 = 0$ und $I = [0, T]$.

Hausaufgabe: Wiederhole für den allgemeinen Fall.

Satz von Peano

Setze $\tilde{T} = \min\{T, K/M\}$ und $\tilde{I} = [0, \tilde{T}]$. Sei $\boldsymbol{x}^k(t)$ definiert durch

$$\boldsymbol{x}^k(t) = \boldsymbol{x}_0, \quad 0 \le t \le \tilde{T}/k \qquad (\star)$$

$$\boldsymbol{x}^k(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_0^{t-\tilde{T}/k} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^k(s), s)ds, \quad \tilde{T}/k \le t \le \tilde{T} \qquad (\dagger)$$

Wegen $(\star)$ $\exists \tau > \tilde{T}/k$ wobei $\|\boldsymbol{x}^k(t) - \boldsymbol{x}_0\| \le K$, $0 \le t \le \tau$. Mit $(\dagger)$,

$$\|\boldsymbol{x}^k(\tau) - \boldsymbol{x}_0\| \le \int_0^{\tau-\tilde{T}/k} \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(s), s)\|ds \le (\tau - \tilde{T}/k)M < \tilde{T}M \le K$$

Daher gilt $\|\boldsymbol{x}^k(t) - \boldsymbol{x}_0\| < K$, $t \in \tilde{I}$, und die Folge ist beschränkt. Weiters gilt

$$\|\boldsymbol{x}^k(t_2) - \boldsymbol{x}^k(t_1)\| \le \int_{t_1-\tilde{T}/k}^{t_2-\tilde{T}/k} \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^k(s), s)\|ds \le M|t_2 - t_1|$$

und daher ist die Folge gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli konvergiert eine Teilfolge $\{\boldsymbol{x}^{k_l}\}$ gleichmäßig für $t \in \tilde{I}$ zu einer Funktion $\boldsymbol{x}^\infty \in \mathcal{C}(\tilde{I})$ mit $\|\boldsymbol{x}^\infty(t) - \boldsymbol{x}_0\| \le K$, $t \in \tilde{I}$. Zu zeigen ist,

$$\boldsymbol{x}^\infty(t) - \boldsymbol{x}_0 - \int_{t_0}^t \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^\infty(s), s)ds, \quad t \in \tilde{I}$$

 diese Differenz ist Null. Man subtrahiert,

Satz von Peano

$$0 = \boldsymbol{x}^{k_l}(t) - \boldsymbol{x}_0 - \int_0^t \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^{k_l}(s), s)ds + \int_{t-\tilde{T}/k_l}^t \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^{k_l}(s), s)ds, \quad t \in \tilde{I}$$

Durch Abschätzen,

$$\|\boldsymbol{x}^\infty(t) - \boldsymbol{x}^{k_l}(t) - \int_0^t [\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^\infty(s), s) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^{k_l}(s), s)]ds + \int_{t-\tilde{T}/k_l}^t \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^{k_l}(s), s)ds\|$$

$$\leq \|\boldsymbol{x}^\infty(t) - \boldsymbol{x}^{k_l}(t)\| + \int_0^t \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^\infty(s), s) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^{k_l}(s), s)\|ds + \int_{t-\tilde{T}/k_l}^t \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^{k_l}(s), s)\|ds$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gilt $\sup_{t\in\tilde{I}} \|\boldsymbol{x}^\infty(t) - \boldsymbol{x}^{k_l}(t)\| \overset{k_l\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Da R kompakt ist, konvergiert $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^{k_l}(t), t) \to \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^\infty(t), t)$ gleichmäßig für $t \in \tilde{I}$. Es folgt

$$\sup_{t\in\tilde{I}} \int_0^t \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^\infty(s), s) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^{k_l}(s), s)\|ds \overset{k_l\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Schließlich folgt die Behauptung mit

$$\int_{t-\tilde{T}/k_l}^t \|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^{k_l}(s), s)\|ds \leq M\tilde{T}/k_l \overset{k_l\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \blacksquare$$

Sturm-Liouville Systeme

Def: Eine *Sturm-Liouville* DG ist eine lineare DG zweiter Ordnung der Form

$$[p(x)u'(x)]' + [\lambda\rho(x) - q(x)]u(x) = 0, \quad x \in I, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

die *regulär* ist, wenn $q, \rho \in \mathcal{C}(I)$, $p \in \mathcal{C}^1(I)$,

$$p(x), \rho(x) > 0, \quad x \in I$$

und I endlich ist; sonst ist die DG *singulär*. Man schreibt die DG mit $Lu + \lambda\rho u = 0$, wobei

$$[Lu](x) = [p(x)u'(x)]' - q(x)u(x).$$

Hausaufgabe: Schreibe die reguläre Sturm-Liouville DG in erste Ordnung $\boldsymbol{x}'(x) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(x))$ um, und mit den Sätzen 39 und 139 zeige, es existieren zwei Lösungen der Sturm-Liouville DG, die eine Lösungsbasis bilden.

Def: Ein *reguläres Sturm-Liouville System* besteht aus einer regulären Sturm-Liouville DG auf einem Intervall $[a, b]$ zusammen mit *getrennten* Randbedingungen,

$$\alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0, \quad \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0$$

wobei $|\alpha| + |\alpha'| > 0$ und $|\beta| + |\beta'| > 0$.

Eigenfunktionen und Eigenwerte

Def: Ein *periodisches Sturm-Liouville System* besteht aus einer regulären Sturm-Liouville DG auf einem Intervall $[a, b]$ zusammen mit *periodischen* Randbedingungen,

$$u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b)$$

wobei die Koeffizienten auch erfüllen,

$$p(a) = p(b), \quad \rho(a) = \rho(b), \quad q(a) = q(b).$$

Def: Eine nicht triviale Lösung $u \in \mathcal{C}^2([a, b])$ eines Sturm-Liouville Systems ist eine *Eigenfunktion* mit entsprechendem *Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Beispiel: Das Sturm-Liouville System
$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad u(0) = u(\pi) = 0$$
hat die Eigenfunktion $u_n(x) = \sin(nx)$ mit Eigenwerten $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Diese werden folgendermaßen gefunden.

  Das charakteristische Polynom der homogenen DG ist
$$P(z) = z^2 + \lambda = (z - \sqrt{-\lambda})(z + \sqrt{-\lambda}).$$
Laut dem Korollar 65 ist eine Lösungsbasis gegeben durch

Eigenfunktionen und Eigenwerte

$\{e^{+\sqrt{-\lambda}x}, e^{-\sqrt{-\lambda}x}\},\ \lambda < 0, \quad \{\cos(\sqrt{\lambda}x), \sin(\sqrt{\lambda}x)\},\ \lambda \geq 0.$

Durch die Randbedingungen muss die mögliche Lösung $u(x) = Ae^{+\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$, $\lambda < 0$, erfüllen,

$$A + B = 0, \quad Ae^{+\sqrt{\lambda}\pi} + Be^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0, \quad \text{d.h.} \quad A = B = 0.$$

Die mögliche Lösung $u(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$, $\lambda \geq 0$, muss erfüllen,

$$A = 0, \quad B\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0, \quad \text{d.h.} \quad A = 0, \sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}, (B = 1).$$

- Beispiel: Für das Sturm-Liouville System

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in [-\pi, \pi]$$
$$u(-\pi) = u(\pi), \quad u'(-\pi) = u'(\pi)$$

muss $u(x) = Ae^{+\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$, $\lambda < 0$, erfüllen,

$$\left.\begin{aligned} Ae^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + Be^{+\sqrt{-\lambda}\pi} &= Ae^{+\sqrt{-\lambda}\pi} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \\ Ae^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - Be^{+\sqrt{-\lambda}\pi} &= Ae^{+\sqrt{-\lambda}\pi} - Be^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{aligned}\right\} \text{d.h. } A = B = 0$$

und $u(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$, $\lambda \geq 0$, muss erfüllen,

$$\begin{aligned} A\cos(-\sqrt{\lambda}\pi) + B\sin(-\sqrt{\lambda}\pi) &= A\cos(\sqrt{\lambda}\pi) + B\sin(\sqrt{\lambda}\pi) \\ -A\sin(-\sqrt{\lambda}\pi) + B\cos(-\sqrt{\lambda}\pi) &= -A\sin(\sqrt{\lambda}\pi) + B\cos(\sqrt{\lambda}\pi) \end{aligned}$$

Eigenfunktionen und Eigenwerte

oder

$$\begin{bmatrix} \cos(-\sqrt{\lambda}\pi) - \cos(\sqrt{\lambda}\pi) & \sin(-\sqrt{\lambda}\pi) - \sin(\sqrt{\lambda}\pi) \\ -\sin(-\sqrt{\lambda}\pi) + \sin(\sqrt{\lambda}\pi) & \cos(-\sqrt{\lambda}\pi) - \cos(\sqrt{\lambda}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mit $\cos(-\sqrt{\lambda}\pi) = \cos(\sqrt{\lambda}\pi)$ und $\sin(-\sqrt{\lambda}\pi) = -\sin(\sqrt{\lambda}\pi)$ ist die Determinante der Matrix gegeben durch $4\sin^2(\sqrt{\lambda}\pi)$. Also muss gelten: $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}_0$.

Für $\lambda = 0$ gibt es eine Eigenfunktion $u_0(x) = \cos(0) = 1$.
Für $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, gibt es zwei linear unabhängige Eigenfunktionen, $u_n^{(1)}(x) = \cos(nx)$, $u_n^{(2)}(x) = \sin(nx)$.

- Mit der Bessel DG

$$[ru'(r)]' + [\kappa^2 r - n^2/r]u(r) = 0, \quad r \in [a, b]$$

und Randbedingungen

$$u(a) = u(b) = 0$$

ist das Sturm-Liouville System regular wenn $b > a > 0$.
Mit $a = 0$ sind die Koeffizienten $p(r) = r$ und $\rho(r) = \kappa^2 r$ nicht positiv, und $q(r) = n^2/r$ ist nicht stetig auf $[a, b]$.
So ist das System *singulär* für $a = 0$.

Orthogonalität der Eigenfunktionen

Def: Zwei Funktionen f und g sind *orthogonal* bezüglich eines Gewichts ρ auf einem Intervall I genau dann wenn

$$\int_I \rho(x) f(x) g(x) dx = 0$$

wobei I endlich, unendlich, offen oder abgeschlossen sein kann.

- Für das Sturm-Liouville System $u''(x) + \lambda u(x) = 0$ mit den Randbedingungen
$$u(0) = u(\pi) = 0$$
oder
$$u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi)$$
sind die oben genannten Eigenfunktionen orthogonal bezüglich des Gewichts $\rho = 1$ auf den jeweiligen Intervallen $[0, \pi]$
$$\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)dx = 0, \quad n \neq m$$
bzw. $[-\pi, \pi]$
$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = 0, \quad n \neq m$$
$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = 0, \quad \forall n, m.$$

Orthogonalität der Eigenfunktionen

Satz: Eigenfunktionen u, v eines regulären Sturm-Liouville Systems mit unterschiedlichen Eigenwerten μ, λ sind orthogonal bezüglich des Gewichts ρ auf dem Intervall $[a, b]$.

Beweis: Mit der Notation $[Lu](x) = [p(x)u'(x)]' - q(x)u(x)$ gilt

$$u(x)[Lv](x) - v(x)[Lu](x) = u(x)[p(x)v'(x)]' - v(x)[p(x)u'(x)]'$$
$$= \{p(x)[u(x)v'(x) - v(x)u'(x)]\}'.$$

Mit $Lu + \lambda\rho u = Lv + \mu\rho v = 0$ auf $[a, b]$ folgt

$$(\lambda - \mu)\int_a^b \rho(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b \{u(x)[Lv](x) - v(x)[Lu](x)\}dx$$
$$= \{p(x)[u(x)v'(x) - v(x)u'(x)]\}_a^b.$$

Mit $\alpha \neq 0 \neq \beta$,

$$= p(b)[u(b)v'(b) - v(b)u'(b)] - p(a)[u(a)v'(a) - v(a)u'(a)] =$$
$$p(b)[u'(b)v'(b) - v'(b)u'(b)]\beta'/\beta - p(a)[u(a)v(a) - v(a)u(a)]\alpha'/\alpha = 0.$$

und ähnlich für die anderen Randbedingungen. ■

Hausaufgabe: Zeige, Eigenfunktionen u, v eines periodischen Sturm-Liouville Systems mit unterschiedlichen Eigenwerten μ, λ sind orthogonal bezüglich des Gewichts ρ auf dem Intervall $[a, b]$.

Sturm-Liouville Reihe

Def: Seien $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ Eigenfunktionen eines regulären Sturm-Liouville Systems mit unterschiedlichen Eigenwerten, und daher sind sie orthogonal bezüglich des Gewichts ρ auf $[a, b]$. Für eine auf $[a, b]$ ausreichend glatte Funktion f ist die *Sturm-Liouville Reihe* für f gegeben durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)$$

wobei die Koeffizienten $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ durch Orthogonalität erfüllen

$$\int_a^b \rho(x) u_m(x) f(x) dx = a_m \int_a^b \rho(x) u_m^2(x) dx, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Bemerkung: Die Konvergenz der Sturm-Liouville Reihe bleibt noch zu zeigen.

Def: Eine Funktion f ist quadrat integrierbar bezüglich eines Gewichts $\rho(x) > 0$ auf einem Intervall I wenn

$$\int_I \rho(x) f^2(x) dx < \infty.$$

Singuläre Sturm-Liouville Systeme

Bemerkung: Mit der Schwarz Ungleichung folgt

$$\left[\int_I \rho(x)f(x)g(x)dx\right]^2 \leq \left[\int_I \rho(x)f^2(x)dx\right]\left[\int_I \rho(x)g^2(x)dx\right] < \infty$$

wenn f und g quadrat integrierbar bezüglich des Gewichts $\rho(x) > 0$ auf I sind.

Satz: Für eine singuläre Sturm-Liouville DG

$$[p(x)u'(x)]' + [\lambda\rho(x) - q(x)]u(x) = 0, \quad x \in [a, b]$$

seien Randbedingungen so eingeführt, dass zwei Eigenfunktionen u, v unterschiedlicher Eigenwerte erfüllen müssen,

$$\lim_{\epsilon_a,\epsilon_b\to 0} p(x)[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)]_{a+\epsilon_a}^{b-\epsilon_b} = 0.$$

Wenn u, v quadrat integrierbar bezüglich des auf $[a, b]$ positiven Gewichts $\rho(x)$ sind, sind u, v orthogonal bezüglich des Gewichts auf dem Intervall I.

Beweis: Mit der Notation $[Lu](x) = [p(x)u'(x)]' - q(x)u(x)$ gilt

$$\begin{aligned} u(x)[Lv](x) - v(x)[Lu](x) &= u(x)[p(x)v'(x)]' - v(x)[p(x)u'(x)]' \\ &= \{p(x)[u(x)v'(x) - v(x)u'(x)]\}', \quad a < x < b. \end{aligned}$$

Singuläre Sturm-Liouville Systeme

Da u, v quadrat integrierbar bezüglich des Gewichts $\rho(x) > 0$ auf I sind, existiert das Integral $\int_a^b \rho(x)u(x)v(x)dx$ wegen der Schwarz Ungleichung. Mit $Lu + \lambda\rho u = Lv + \mu\rho v = 0$ für $a < x < b$ folgt

$$\begin{aligned}
&(\lambda - \mu) \int_a^b \rho(x)u(x)v(x)dx \\
&= (\lambda - \mu) \lim_{\epsilon_a,\epsilon_b \to 0} \int_{a+\epsilon_b}^{b-\epsilon_b} \rho(x)u(x)v(x)dx \\
&= \lim_{\epsilon_a,\epsilon_b \to 0} \int_{a+\epsilon_b}^{b-\epsilon_b} \{u(x)[Lv](x) - v(x)[Lu](x)\}dx \\
&= \lim_{\epsilon_a,\epsilon_b \to 0} \{p(x)[u(x)v'(x) - v(x)u'(x)]\}_{a+\epsilon_b}^{b-\epsilon_b} = 0.
\end{aligned}$$

■

- Für die Legendre DG
$$[(1 - x^2)u'(x)]' + \lambda u(x) = 0, \quad x \in [-1, 1]$$
mit den Randbedingungen
$$\lim_{x \to -1} |u(x)| < \infty, \quad \lim_{x \to +1} |u(x)| < \infty$$
sind die Legendre Polynome $P_n(x)$ Eigenfunktionen mit entsprechenden Eigenwerten $\lambda_n = n(n+1)$. Diese sind orthogonal bezüglich des Gewichts $\rho(x) = 1$ auf $[-1, 1]$:
$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)dx =$$
$$\{(1 - x^2)[P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)]\}_{-1}^{+1} = 0.$$

Singuläre Sturm-Liouville Systeme

- Die Bessel Funktion $J_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, erster Gattung erfüllt
$$[xu'(x)]' + [x - n^2/x]u(x) = 0$$
und daher erfüllt $J_n(\kappa r)$,
$$D_r[rD_rJ_n(\kappa r)] + (\kappa^2 r - n^2/r)J_n(\kappa r) =$$
$$\kappa\{[xJ_n'(x)]' + [x - n^2/x]J_n(x)\}_{x=\kappa r} = 0.$$
- Für die Bessel DG,
$$[ru'(r)]' + [\kappa^2 r - n^2/r]u(x) = 0, \quad 0 < r \leq a$$
mit den Randbedingungen
$$\lim_{r\to 0} |u(r)| < \infty, \quad u(a) = 0$$
ist $J_n(\kappa_j r)$ eine Eigenfunktion mit Eigenwert κ_j^2, wobei $\kappa_j a$ die $j$te Nullstelle der Bessel Funktion $J_n(x)$ ist.

  Da $J_n(x)$ unendlich viele Nullstellen hat, gibt es unendlich viele Eigenfunktionen.

  Diese sind orthogonal bezüglich des Gewichts $\rho(r) = r$ auf dem Intervall $I = (0, a]$:
$$(\kappa_i^2 - \kappa_j^2) \int_0^a rJ_n(\kappa_i r)J_n(\kappa_j r)dr =$$
$$\{r[J_n(\kappa_i r)J_n'(\kappa_j r)\kappa_j - J_n(\kappa_j r)J_n'(\kappa_i r)\kappa_i]\}_0^a = 0.$$

Singuläre Sturm-Liouville Systeme

- Die Hermite DG
$$u''(x) - 2xu'(x) + \lambda u(x) = 0, \quad -\infty < x < +\infty$$
lässt sich mit $y = \mathrm{e}^{-x^2/2}u(x)$ so transformieren,
$$y''(x) + [\lambda - (x^2 - 1)]y(x) = 0, \quad -\infty < x < +\infty$$
Mit den Randbedigungen
$$\lim_{x\to-\infty} |y(x)| = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} |y(x)| = 0$$
ist $y_n(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}H_n(x)$ eine Eigenfunktion mit Eigenwert $\lambda_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $H_n(x)$ das Hermite Polynom ist.

  Diese Eigenfunktionen sind quadrat integrierbar bezüglich des Gewichts $\rho = 1$ auf $I = (-\infty, \infty)$,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_n^2(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} H_n^2(x)dx < \infty$$
Eine Orthogonalitätsbedingung für die Hermite Polynome lässt sich so herleiten, $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \neq n$,
$$2(m-n)\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx =$$
$$2(m-n)\int_{-\infty}^{+\infty} y_n(x)y_m(x)dx =$$
$$[y_m(x)y_n'(x) - y_m'(x)y_n(x)]_{-\infty}^{+\infty} \to 0.$$

Prüfer Substitution

- Für die DG auf $I = [a, b]$,
$$[P(x)u'(x)]' + Q(x)u(x) = 0, \quad x \in I$$
seien $P \in \mathcal{C}^1(I)$ und $Q \in \mathcal{C}(I)$ mit $P(x) > 0$.
- Wie oft schwingt eine Lösung, d.h. wie viele Nullstellen hat eine Lösung in I?
- Basierend auf die Poincaré Phasenebene ist die folgende Substitution nützlich.

Def: Für die obige DG sei die *Prüfer Substitution* definiert durch $r(x)$ und $\theta(x)$ wobei
$$P(x)u'(x) = r(x)\cos\theta(x), \quad u(x) = r(x)\sin\theta(x)$$
Es gelten
$$r^2(x) = u^2(x) + [P(x)u'(x)]^2, \quad \tan\theta(x) = u(x)/[P(x)u'(x)]$$
und $r(x)$ ist die *Amplitudenvariable* und $\theta(x)$ ist die *Phasenvariable*.

Bemerkung: Hier besteht der Phasenraum aus $\langle \text{Fluss}, \text{Zustand} \rangle$ anstatt $\langle \text{Position}, \text{Geschwindigkeit} \rangle$.

Prüfer Substitution

- Für nicht triviale Lösungen $u(x)$ gilt immer $r(x) > 0$. Sonst bedeutet $u(x) = u'(x) = 0$ durch Eindeutigkeit, dass $u(x) = 0$.
- Durch $\cot\theta(x) = P(x)u'(x)/u(x)$ und die DG
$$-\frac{\theta'(x)}{\sin^2\theta(x)} = \frac{[P(x)u'(x)]'}{u(x)} - \frac{P(x)u'(x)^2}{u(x)^2} = -Q(x) - \frac{1}{P(x)}\cot^2\theta(x)$$
ergibt sich
$$\theta'(x) = Q(x)\sin^2\theta(x) + (1/P(x))\cos^2\theta(x) \qquad (\star)$$
- Durch $r^2(x) = [P(x)u'(x)]^2 + u^2(x)$ und die DG ergibt sich
$$r(x)r'(x) = -\underbrace{[P(x)u'(x)][Q(x)u(x)]}_{=Q(x)r^2(x)\cos\theta(x)\sin\theta(x)} + u(x)[P(x)u'(x)]/P(x)$$
oder $$r'(x) = \tfrac{1}{2}[1/P(x) - Q(x)]r(x)\sin[2\theta(x)] \qquad (\dagger)$$
- Die DG $(\star)$ erfüllt eine Lipschitz Bedingung,
$$\sup_{x\in[a,b]} \partial_\theta[Q(x)\sin^2\theta + (1/P(x))\cos^2\theta] \leq$$
$$2[\sup_{x\in[a,b]}|Q(x)| + \sup_{x\in[a,b]} 1/|P(x)|] = L$$
also sind Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems $(\star)$ mit $\theta(a) = \gamma \in \mathbb{R}$ garantiert.
- Die Lösung von $(\dagger)$ lässt sich von der Lösung von $(\star)$ direct bestimmen.

Prüfer Substitution

Def: Das System ($\star$) und ($\dagger$) ist das *Prüfer System*, das zur DG $[P(x)u'(x)]' + Q(x)u(x) = 0$ äquivalent ist.

- Die Nullstellen x_n der Lösung $u(x_n) = 0$ sind genau wo $\sin\theta(x_n) = 0$ gilt.
- Hier gilt auch $\cos^2\theta(x_n) = 1$ und nach ($\star$) folgt $\theta'(x_n) > 0$.
- D.h. eine Lösungskurve läuft durch die waagerechte Achse nur gegenuhrzeigersinn.
- Für die DG auf $I = [a, b]$ mit $P(x) \geq \tilde{P}(x) > 0$, $\tilde{P} \in \mathcal{C}^1(I)$, $\tilde{Q}(x) \geq Q(x)$ und $\tilde{Q} \in \mathcal{C}(I)$,
$$[\tilde{P}(x)\tilde{u}'(x)]' + \tilde{Q}(x)\tilde{u}(x) = 0, \quad x \in I$$
folgt $\tilde{\theta}(x) \geq \theta(x)$ für $x \in I$ aus $\tilde{\theta}(a) \geq \theta(a)$ und dem Satz 29.
- Die Funktion $\sigma(x) = \tilde{\theta}(x) - \theta(x) \geq 0$ erfüllt $\sigma'(x) \geq -L\sigma(x)$ oder $0 \leq \sigma(x)\mathrm{e}^{Lx} \leq \sigma(b)\mathrm{e}^{Lb}$. Aus $\sigma(b) = 0$ folgt $\tilde{\theta}(x) = \theta(x)$, $x \in [a, b]$, und folglich sind $\tilde{r}(x)$ und $r(x)$ sowie $\tilde{u}(x)$ und $u(x)$ linear abhängig. Nimm an, $\tilde{\theta}(b) > \theta(b)$.

Sturm Vergleichssatz

- Wenn $\sin\theta(a) = 0$ gilt, folgt $\theta(x) > \theta(a) = n\pi$ für $x > a$. Insbesondere gilt $\theta(b) = m\pi$, $m > n$, wenn $\sin\theta(b) = 0$.
- Angenommen gilt $n\pi = \theta(a) \leq \tilde{\theta}(a) \leq \theta(b) = m\pi$. Sonst ersetze $\tilde{\theta}(x)$ mit $\tilde{\theta}(x) - (m-n)\pi$.
- Wenn $n\pi = \theta(a) \leq \tilde{\theta}(a) \leq \theta(b) = m\pi < \tilde{\theta}(b)$, $m > n$, gibt es ein $c \in (a, b)$ wobei $\sin\tilde{\theta}(c) = 0$.

Satz (Sturm Vergleichssatz): Seien $u(x)$ und $\tilde{u}(x)$ linear unabhängige Lösungen der DG'en $[P(x)u'(x)]' + Q(x)u(x) = 0$ bzw. $[\tilde{P}(x)\tilde{u}'(x)]' + \tilde{Q}(x)\tilde{u}(x) = 0$ mit $P(x) \geq \tilde{P}(x) > 0$ und $\tilde{Q}(x) \geq Q(x)$. Dann zwischen zwei Nullstellen für $u(x)$ gibt es mindestens eine Nullstelle für $\tilde{u}(x)$.

- Locker formuliert: Wenn P fällt und Q steigt, werden Nullstellen gestaucht.
- Falls $Q(x) > 0$ in $[P(x)u'(x)]' + Q(x)u(x) = 0$,
  - $u'(\hat{x}) = 0$ genau dann wenn $\cos\theta(\hat{x}) = 0$.
  - Wenn $\theta(\hat{x}) = (n + \frac{1}{2})\pi$, folgt $\theta'(\hat{x}) = Q(x) > 0$ aus $(\star)$.
  - Es gibt genau ein Max oder Min zwischen zwei Nullstellen von u.

Sturm Oszillationssatz

- Wie hängen die Nullstellen einer Eigenfunktion des regulären Sturm-Liouville Systems von λ ab?
$$[p(x)u'(x)]' + [\lambda\rho(x) - q(x)]u(x) = 0, \quad x \in [a,b]$$
$$\alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0, \quad \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0$$
- Die Nullstellen erfüllen
$$u(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\theta(x_n)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta(x_n) = n\pi, n \in \mathbb{N}_0.$$
- Das Prüfer System ist
$$\theta'(x) = [\lambda\rho(x) - q(x)]\sin^2\theta(x) + (1/p(x))\cos^2\theta(x) \quad (\star)$$
$$r'(x) = \tfrac{1}{2}[1/p(x) - \lambda\rho(x) + q(x)]r(x)\sin[2\theta(x)] \quad (\dagger)$$
- Bezeichne mit $\theta(x;\lambda)$ die Phasenvariable in Abhängigkeit von x und λ.

Satz (Sturm Oszillationssatz): Eine Lösung $\theta(x;\lambda)$ von $(\star)$ mit $\theta(a;\lambda) = \gamma \in [0,\pi)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist eine stetige und streng steigend Funktion von λ für fixiertes $x \in (a,b]$. Weiters gelten
$$\theta(x;\lambda) \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ und } \theta(x;\lambda) \overset{\lambda\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ für } x \in (a,b].$$
Wenn für $x_n > a$ gilt $\theta(x_n,\lambda) = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt $\theta(x,\lambda) > n\pi$ für $x > x_n$.

Folge der Eigenfunktionen

- Die getrennten Randbedingungen,
$$\alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0, \quad \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0$$
werden zuerst bezüglich der Prüfer Substitution umformuliert,
$$p(x)u'(x) = r(x)\cos\theta(x), \quad u(x) = r(x)\sin\theta(x)$$
$$r^2(x) = u^2(x) + [p(x)u'(x)]^2, \quad \tan\theta(x) = u(x)/[p(x)u'(x)]$$
- Seien

$$\gamma = \min\{\tilde{\gamma} \in [0,\pi) : p(a)\tan(\tilde{\gamma}) = -\alpha'/\alpha\}, \alpha \neq 0; \quad \gamma = \pi/2, \alpha = 0$$
$$\delta = \min\{\tilde{\delta} \in (0,\pi] : p(b)\tan(\tilde{\delta}) = -\beta'/\beta\}, \beta \neq 0; \quad \delta = \pi/2, \beta = 0$$

- $(u(x), \lambda)$ ist ein Eigenfunktion/Eigenwert Paar des regulären Sturm-Liouville Systems genau dann wenn die Lösung des Prüfer Systems erfüllt
$$\theta(a,\lambda) = \gamma, \quad \theta(b,\lambda) = \delta + n\pi, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$
- Sei $\theta(a,\lambda) = \gamma$ die Anfangsbedingung für θ. Laut dem Sturm Oszillationssatz gibt es ein kleines λ_0, wobei $\theta(b,\lambda_0) = \delta$ gilt. Während λ größer wird, wird das nächste λ_n erreicht, $n = 1, 2, \ldots$, wobei $\theta(b,\lambda_n) = \delta + n\pi$ gilt.

Folge der Eigenfunktionen

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit
$$\theta(b, \lambda_n) = \delta + n\pi, \quad u_n(x) = r_n(x) \sin[\theta(x, \lambda_n)]$$
ist $(u_n(x), \lambda_n)$ ein Eigenfunktion/Eigenwert Paar des regulären Sturm-Liouville Systems
$$[p(x)u'(x)]' + [\lambda\rho(x) - q(x)]u(x) = 0, \quad x \in [a, b]$$
$$\alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0, \quad \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0.$$
- Mit dem Sturm Oszillationssatz folgt aus $\theta(a, \lambda_n) = \gamma \in [0, \pi)$ und $\theta(b, \lambda_n) = \delta + n\pi \in (n\pi, (n+1)\pi]$, die Eigenfunktion $u_n(x)$ hat genau n Nullstellen in (a, b).
- Wenn $u(x)$ und $\tilde{u}_n(x)$ beide Eigenfunktionen sind, folgt aus
$$\alpha u_n(a) + \alpha' u_n'(a) = 0 = \alpha \tilde{u}(a) + \alpha' \tilde{u}'(a)$$
$\langle u(a), u'(a) \rangle$ und $\langle \tilde{u}(a), \tilde{u}'(a) \rangle$ sind linear abhängig. Mit dem Satz 38 sind $u(x)$ und $\tilde{u}(x)$ linear abhängig.

Satz: Ein reguläres Sturm-Liouville System hat eine unendliche Folge von reelen Eigenwerten $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$ mit $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Die zu λ_n entsprechende Eigenfunktion $u_n(x)$ hat genau n Nullstellen in (a, b), und sie ist bis auf ein mehrfach eindeutig.

Inhomogene Randwertprobleme

- Zu lösen ist das Randwertproblem,
  $$[Lu](x) = u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = r(x), \quad x \in [a,b]$$
  $$Au = \alpha u(a) + \alpha' u'(a) = \alpha_0, \quad Bu = \beta u(b) + \beta' u'(b) = \beta_0.$$
  wobei $p, q, r \in \mathcal{C}([a,b])$ und $\alpha, \alpha', \alpha_0, \beta, \beta', \beta_0 \in \mathbb{R}$.
- Für $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$ sei $U(x)$ die Lösung für
  $$LU = 0, \quad U(a) = \alpha', \quad U'(a) = -\alpha$$
  $V(x)$ die Lösung für
  $$LV = 0, \quad V(b) = \beta', \quad V'(b) = -\beta$$
  und $R(x)$ die Lösung für
  $$LR = r, \quad R(a) = 0, \quad R'(a) = 0.$$
- Für $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ erfüllt $u = \gamma U + \delta V + R$,
  $$Lu = r, \quad Au = \delta[\alpha V(a) + \alpha' V'(a)] = \delta AV$$
  $$Bu = \gamma[\beta U(a) + \beta' U'(a)] + BR = \gamma BU + BR$$
- Wenn U und V linear unabhängig sind, folgt
  $W(U, V; x) \neq 0$, $x \in [a,b]$, und daher
  $$AV = \alpha V(a) + \alpha' V'(a) = -U'(a)V(a) + U(a)V'(a) \neq 0$$
  $$BU = \beta U(b) + \beta' U'(b) = -V'(b)U(b) + V(b)U'(b) \neq 0.$$

Greensche Funktionen für Randwertprobleme

- Es folgt, für gegebene Au und Bu ist das System
$$Au = \delta AV, \quad Bu = \gamma BU + BR$$
für δ und γ eindeutig lösbar.
- Wenn U und V linear abhängig sind, folgt $W(U, V; x) = 0$, $x \in [a, b]$, und daher für $c \in \mathbb{R}$
$$AV = cAU = c[\alpha\alpha' + \alpha'(-\alpha)] = 0$$
$$cBU = BV = \beta\beta' + \beta'(-\beta) = 0.$$

Satz: Entweder existiert eine Lösung für
$$Lu = r, \quad Au = \alpha_0, \quad Bu = \beta_0$$
für beliebige $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, oder für
$$Lu = 0, \quad Au = 0, \quad Bu = 0$$
existiert eine Eigenfunktion mit Eigenwert 0.

Def: Wenn im ersten Fall des Satzes die Lösung des Problems $Lu = r$, $Au = 0$, $Bu = 0$ so dargestellt werden kann,
$$u(x) = \int_a^b G(t, \xi) r(\xi) d\xi$$
ist $G(x, \xi)$ eine *Greensche Funktion* zu diesem Randwertproblem.

Greensche Funktionen für Randwertprobleme

Satz: Seien L, A, B, U, V mit $p, q, r \in \mathcal{C}([a,b])$ und $\alpha, \alpha', \alpha_0, \beta, \beta', \beta_0 \in \mathbb{R}$ wie oben gegeben. Wenn $W(x) = W(U, V; x) \neq 0$, $x \in [a,b]$, ist

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi) r(\xi) d\xi$$

eine Lösung des Problems

$$Lu = r, \quad Au = 0, \quad Bu = 0$$

wobei

$$G(x,\xi) = \begin{cases} U(x)V(\xi)/W(\xi), & a \leq x \leq \xi \\ U(\xi)V(x)/W(\xi), & \xi \leq x \leq b. \end{cases}$$

Beweis: Die DG $Lu = r$ folgt genau so wie für den Satz 53. Die Randbedingungen folgen aus

$$AG(\cdot,\xi) = AU[V(\xi)/W(\xi)] = 0, \quad \xi \in (a,b)$$
$$BG(\cdot,\xi) = BV[U(\xi)/W(\xi)] = 0, \quad \xi \in (a,b)$$

■

Bemerkung: Mit $[\mathcal{G}r](x) = \int_a^b G(x,\xi) r(\xi) d\xi$ folgt $L\mathcal{G}r = r$ $\forall r \in \mathcal{C}([a,b])$, d.h. $\mathcal{G}$ ist eine *rechte Inverse* von L auf $\mathcal{C}([a,b])$. $\mathcal{G}Lu = u$ gilt $\forall u \in \{w \in \mathcal{C}^2 : Aw = Bw = 0\}$.

Approximation im quadratischen Mittel

Def: Seien $f, \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ quadrat integrierbar über $[a, b]$ bezüglich eines auf $[a, b]$ positiven Gewichts $\rho(x)$. Die Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert im quadratischen Mittel bezüglich des Gewichts ρ wenn

$$\int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 \rho(x) dx \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Satz: Seien $f, \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ quadrat integrierbar über $[a, b]$ bezüglich eines auf $[a, b]$ positiven Gewichts $\rho(x)$, wobei die Funktionen der Folge $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ orthogonal bezüglich des Gewichts ρ sind. Dann wird

$$E(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \int_a^b [f(x) - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \phi_k(x)]^2 \rho(x) dx$$

mit $\{c_k\}_{k=1}^{n}$ minimiert, wobei

$$c_k \int_a^b \phi_k^2(x) \rho(x) dx = \int_a^b f(x) \phi_k(x) \rho(x) dx$$

Beweis: Das Ergebnis folgt aus

$$E(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx + \sum_{k=1}^{n} [(\gamma_k - c_k)^2 - c_k^2] \int_a^b \phi_k^2(x) \rho(x) dx \quad \blacksquare$$

Approximation im quadratischen Mittel

Korollar: Wenn die Folge $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ auch orthonormal ist,

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)\rho(x)dx = \delta_{ij}$$

wird $E(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ mit $\{c_k\}_{k=1}^{n}$ minimiert, wobei

$$c_k = \int_a^b f(x)\phi_k(x)\rho(x)dx \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x)\rho(x)dx.$$

Da n beliebig ist, folgt die *Bessel Ungleichung*,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x)\rho(x)dx$$

d.h. wenn f bezüglich des Gewichts ρ quadrat integrierbar ist, gilt $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$.

Def: Die Koeffizienten $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ sind die *Fourier Koeffizienten* von $f(x)$ bezüglich der Folge $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Vollständigkeit einer Folge

Def: Sei$\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen, die auf $[a, b]$ orthogonal und quadrat integrierbar bezüglich eines auf $[a, b]$ positiven Gewichts $\rho(x)$ sind. Die Folge ist *vollständig*, wenn für eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{C}([a, b])$, $\exists\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ wobei

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(x) - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \phi_k(x)]^2 \rho(x) dx = 0.$$

Bemerkung: Für jede Funktion $f(x)$, die auf $[a, b]$ (Riemann) quadrat integrierbar bezüglich eines auf $[a, b]$ positiven Gewichts $\rho(x)$ ist, gibt es für beliebige $\epsilon > 0$ eine Funktion $\phi \in \mathcal{C}([a, b])$ wobei

$$\int_a^b [f(x) - \phi(x)]^2 \rho(x) dx < \epsilon.$$

Daher kann Stetigkeit mit (Riemann) quadrat Integrierbarkeit bezüglich des Gewichts in der Definition der Vollständigkeit ersetzt werden.

Vollständigkeit einer Folge

Satz: Sei $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen, die auf $[a, b]$ orthogonal und quadrat integrierbar bezüglich eines auf $[a, b]$ positiven Gewichts $\rho(x)$ sind. Seien $\{c_k(f)\}_{k=1}^{\infty}$ die Fourier Koeffizienten einer Funktion $f(x)$ bezüglich der Folge $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Die Folge ist *vollständig*, genau dann wenn

$$\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f) \int_a^b \phi_k^2(x)\rho(x)dx, \quad \forall f \in \mathcal{C}([a, b]).$$

Beweis: Das Ergebnis folgt mit der Bessel Ungleichung aus

$$\int_a^b [f(x) - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \phi_k(x)]^2 \rho(x)dx =$$

$$\left[\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2(f) \int_a^b \phi_k^2(x)\rho(x)dx\right]_{\geq 0}$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^{n} [\gamma_k - c_k(f)]^2 \int_a^b \phi_k^2(x)\rho(x)dx\right]_{\geq 0} \quad \blacksquare$$

Vollständigkeit einer Folge

Korollar: Wenn die Folge $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ auch orthonormal ist, ist sie vollständig genau dann wenn die *Parseval Gleichung* gilt

$$\int_a^b f^2(x)\rho(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f), \quad \forall f \in \mathcal{C}([a,b]).$$

Korollar: Die Funktionen $\{\cos(kx), \sin(kx)\}_{k=0}^{\infty}$ bilden eine vollständige orthogonale Folge im Intervall $[-\pi, \pi]$.

Korollar: Die Funktionen $\{\cos(k\pi(x-a)/(b-a))\}_{k=0}^{\infty}$ bilden eine vollständige orthogonale Folge im Intervall $[a, b]$.

Satz: Mit $P_k(x)$ ein Polynom $k$ten Grades sei $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ eine Folge von Polynomen, die auf dem Intervall $[a, b]$ orthogonal bezüglich eines auf $[a, b]$ positiven Gewichts $\rho(x) \in \mathcal{C}([a, b])$ sind,

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)\rho(x)dx = 0, \quad m \neq n$$

Dann ist die Folge vollständig auf $[a, b]$.

Vollständigkeit der Eigenfunktionen

Satz: Die Eigenfunktionen $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ eines regulären Sturm-Liouville Systems

$$[p(x)u'(x)]' + [\lambda\rho(x) - q(x)]u(x) = 0, \quad x \in [a, b]$$
$$\alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0, \quad \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0$$

sind orthogonal und vollständig auf $[a, b]$ bezüglich des Gewichts $\rho(x)$.

Def: Ein Hilbertraum ist ein vollständiger Skalarproduktraum.

Def: Eine orthonormale Folge in einem Hilbertraum ist eine orthonormale Basis genau dann wenn sie vollständig ist.

Bemerkung: Sei $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen, die auf $[a, b]$ quadrat integrierbar, orthonormal und vollständig sind. Der Funktionenraum

$$H = \left\{ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \phi_k(x) : \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty \right\}$$

ist der Hilbertraum $L^2([a, b])$ der Lebesgue quadrat integrierbaren Funktionen.