

Quantitative Systemwissenschaften 2 - Prüfung am 29. Juni 2006

1. Für die Differentialgleichung, $x' = f(x)$, $f(x) = (1+x)x(1-x)$, stellen Sie die Potential-Landschaft grafisch dar, und zeigen Sie die asymptotisch stabilen Gleichgewichte und die nicht stabilen Gleichgewichte.
2. Geben Sie ein Beispiel einer Differentialgleichung mit einer periodischen Lösung. Ändern Sie Ihr Beispiel, um die Periodizität zu stören.
3. Anhand der 3 Bedingungen für Chaos erklären Sie warum das System mit einem Eisenkugel-Pendel, das sich über ein ebenes Feld mit 4 gleichstarken Magneten bewegt, chaotisch ist.
4. Seien V , A und B Zeit-unabhängige $n \times n$ Matrizen und \bar{S} und \bar{Z} Zeit-abhängige n Vektoren. Für das Differentialgleichungssystem, $V\bar{S}' = A\bar{S}' + B\bar{Z}$ leiten Sie die folgende allgemeine Lösung her $\bar{S}(t) = \exp[V^{-1}At]\bar{S}(0) + \int_0^t \exp[V^{-1}A(t-s)]V^{-1}B\bar{Z}(s)ds$.
5. Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ein beliebiges Teilgebiet eines Gebiets in dem Konvektion und Diffusion eines Schadstoffs mit der Konzentration S stattfindet. Sei \mathbf{F} der vektorielle Fluss im Gebiet und D die Diffusionskonstante des Schadstoffs. Anhand der folgenden Gleichung,

$$\partial_t \int_{\Omega} S dx + \int_{\partial\Omega} S[\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}] d\sigma = \int_{\partial\Omega} D[\nabla S \cdot \mathbf{n}] d\sigma$$

erklären Sie warum der zweite Term die Rolle von Konvektion spielt während der dritte Term die Rolle von Diffusion spielt. Verwenden Sie den Gaußschen Satz, um eine partielle Differentialgleichung von der obigen Integralgleichung herzuleiten.

6. In einem Wetter-Modell seien die folgenden Zeit-unabhängige Wahrscheinlichkeiten gegeben: Wenn heute Sonne, dann 50% Sonne morgen und 50% Wolken morgen. Wenn heute Wolken, dann 50% Sonne morgen, 25% Wolken morgen und 25% Regen morgen. Wenn heute Regen, dann 50% Wolken morgen und 50% Regen morgen. Leiten Sie die Langzeit-Statistik her, d.h. finden Sie (x, y, z) wobei $x\%$ der Tage sonnig sind, $y\%$ der Tage wolzig sind und $z\%$ der Tage regnerisch sind.

Geben Sie die Anzahl der Beispiele an, die Sie an der Tafel gelöst haben, und für jedes gelöste Beispiel geben Sie ein Stichwort, um das Beispiel zu identifizieren: