Übungen für Partielle Differentialgleichungen
Wintersemester 2007/08

1. Leite eine bekannte partielle Differentialgleichung von physikalischen Prinzipien her.

2. Berechne die variationelle Ableitung des folgenden Funktionals,

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u(\boldsymbol{x}) - \tilde{u}(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} + \frac{\mu}{q}\int_\Omega |\nabla u(\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x}, \quad \Omega \subset \boldsymbol{R}^n$$

und schreibe die Optimalitätsbedingungen als ein Randwertproblem. Finde die Werte von p und q, für welche die partielle Differentialgleichung der Optimalitätsbedingungen linear, semi-linear oder quasi-linear ist.

Für den Fall dass $p = q = 2$ und $n = 1$ gelten,

(a) schreibe die Frechetsche Ableitung von $J : H^1(\Omega) \to \boldsymbol{R}$, und beweise dass sie die Frechetsche Ableitung ist, und

(b) beweise für $\tilde{u} \in C^0(\bar{\Omega})$ und $u \in C^2(\bar{\Omega})$, dass das für J minimierende u notwendigerweise das folgende Randwertproblem löst:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\mu\Delta u + u &=& \tilde{u}, & \Omega \\ \partial u/\partial n &=& 0, & \partial\Omega \end{array} \right.$$

3. Beweise die Leibnizsche Formel:

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v$$

wobei $u, v : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ ausreichend glatt sind, $D^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n} u$, $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$, $\binom{\alpha}{\beta} = \alpha!/[\beta!(\alpha-\beta)!]$ und $\beta \leq \alpha$ bedeutet $\beta_i \leq \alpha_i$.

4. Zeige für $f \in C_c^0(\boldsymbol{R})$, dass $\Phi(x) = -\frac{1}{2}|x|$ die Fundamenatallösung für die 1D Poissonsche Gleichung ist, d.h.

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y) f(y) dy$$

erfüllt $-u''(x) = f(x)$ in $\boldsymbol{R}$.

5. Für $c \in \boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$ leite eine Formel der Lösung $u(\boldsymbol{x}, t)$ des folgenden Problems her:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t + \boldsymbol{b}\cdot\nabla u + cu &=& f(\boldsymbol{x}, t), & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n, \quad t > 0 \\ u(\boldsymbol{x}, 0) &=& g(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n. \end{array} \right.$$

6. Zeige, dass die schwache Ableitung der Funktion $u(x) = |x|$, $x \in \boldsymbol{R}$, durch $u'(x) = \mathrm{sgn}(x)$ gegeben ist, wobei

$$\mathrm{sgn}(x) = \left\{ \begin{array}{rl} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ +1, & x > 0. \end{array} \right.$$

7. Für eine offene Menge $U \subset \boldsymbol{R}^n$ beweise, wenn $u \in C^2(U)$ harmonisch ist, dann gilt

$$u(x) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = ⨍_{B(x,r)} u(y) dy$$

für jede Kugel $B(x,r) \subset U$. (Hinweis: Definiere $\phi(r)$ als der Mittelwert von u über $\partial B(x,r)$, stelle $\phi'(r)$ bezüglich Δu dar, und zeige dadurch, dass $\phi'(r) = 0$ gilt. Dann ist $\phi(r) = \lim_{t\to 0}\phi(t)$.) Beweise, wenn $u \in C^2(U)$ erfüllt

$$u(x) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y)$$

für jede Kugel $B(x,r) \subset U$, dann ist u harmonisch in U. (Hinweis: Wenn u nicht harmonisch ist, dann erfüllt die obige ϕ-Funktion $\phi'(r) \neq 0$ für irgendeine Kugel, ein Widerspruch.)

8. Zeige,

$$G(x,y) = \begin{cases} (1-y)x, & 0 \le x \le y \\ (1-x)y, & y \le x \le 1 \end{cases}$$

ist die Greensche Funktion für das Poissonsche Problem in 1D:

$$\begin{cases} -u''(x) &=& f(x), & x \in (0,1) \\ u(x) &=& 0, & x \in \partial(0,1) \end{cases}$$

wobei $f \in C^0([0,1])$ gilt, d.h. die Lösung $u(x)$ ist gegeben durch:

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)dy.$$

9. Für die Poissonsche Gleichung mit Neumann Randbedingungen:

$$-u''(x) = f(x), \qquad x \in (0,1), \qquad u'(0) = u'(1) = 0.$$

zeige, daß die Mittelwertbedingung an f, $\int_0^1 f(x)dx = 0$, notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung ist. Weiters beweise, dass die Mittelwertbedingung an u, $\int_0^1 u(x)dx = 0$, die Eindeutigkeit einer Lösung garantiert.

10. Mit dem Satz von Gauß,

$$\int_U \nabla \cdot F(y)dy = \int_{\partial U} F(y)\cdot \hat{n}(y)dS(y)$$

bestätige die Greenschen Formeln:

$$\int_U v(y)\nabla^2 u(y)dy + \int_U \nabla v(y)\cdot\nabla u(y)dy = \int_{\partial U} v(y)\frac{\partial u}{\partial n}(y)dS(y)$$

$$\int_U [u(y)\nabla^2 v(y) - v(y)\nabla^2 u(y)]dy = \int_{\partial U}[u(y)\frac{\partial v}{\partial n}(y) - v(y)\frac{\partial u}{\partial n}(y)]dS(y)$$

11. Sei

$$g(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi]$$

die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion g am $\partial B(0,\rho) \subset \boldsymbol{R}^2$ in der Laplace-Gleichung:

$$\begin{cases} \Delta u &=& 0, & B(0,\rho) \\ u &=& g, & \partial B(0,\rho). \end{cases}$$

(a) Mittels Separations-Ansatz $u(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$ in Polarkoordinaten bestimme eine (formale) Lösung. Hinweise:

i. In Polarkoordinaten (r, ϕ),

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\phi\phi}.$$

ii. Die Lösungen $r^{-k}, k > 0$ und $\ln r$ (für $\lambda = 0$) der Gleichung

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$$

werden wegen der Forderung $\lim_{r \to 0} R(r) < \infty$ ausgeschlossen.

(b) Als Anwendung erstelle eine Graphik der Lösung für $g(\phi) = \sin(3\phi)$.

12. Eine Funktion v wird *subharmonisch* in U genannt, wenn:

$$-\Delta v \leq 0 \qquad \text{in } U.$$

(a) Beweise die folgende Ungleichung, wenn v subharmonisch ist:

$$v(x) \leq \fint_{B(x,r)} v(y) dy \qquad \forall B(x, r) \subset U.$$

(b) Beweise, dass daher $\max_{\bar{U}} v = \max_{\partial U} v$.

(c) Sei $\phi : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ eine glatte und konvexe Funktion. Nimm an, dass u harmonisch ist, und dass $v = \phi(u)$ gilt. Beweise, dass v subharmonisch ist.

(d) Beweise, dass $v = |\nabla u|^2$ subharmonisch ist, wenn u harmonisch ist.

13. Beweise, dass:

$$\max_{\boldsymbol{x} \in B(0,1)} |u(\boldsymbol{x})| \leq \max_{\boldsymbol{x} \in \partial B(0,1)} |g(\boldsymbol{x})| + \frac{1}{2n} \max_{\boldsymbol{x} \in B(0,1)} |f(\boldsymbol{x})|$$

wenn u eine glatte Lösung des folgenden Problems ist:

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \boldsymbol{x} \in B(0,1) \\ u = g, & \boldsymbol{x} \in \partial B(0,1). \end{cases}$$

Hinweise:

(a) Nimm an, dass $\Delta u \geq f$, und beweise, dass:

$$\max_{\boldsymbol{x} \in B(0,1)} u(\boldsymbol{x}) \leq \max_{\boldsymbol{x} \in \partial B(0,1)} g^+(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2n} \max_{\boldsymbol{x} \in B(0,1)} |f^-(\boldsymbol{x})|$$

wobei $g^+(\boldsymbol{x}) = \max\{0, g(\boldsymbol{x})\}$ und $f^-(\boldsymbol{x}) = -\min\{0, f(\boldsymbol{x})\}$. Dann folgt das Resultat, wenn diese Ungleichung mit u und $-u$ angewendet wird.

(b) Um die Ungleichung zu beweisen, definiere:

$$v(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{y} \in \partial B(0,1)} g^+(\boldsymbol{y}) + h(\boldsymbol{x}) \max_{\boldsymbol{y} \in B(0,1)} |f^-(\boldsymbol{y})|$$

für irgendein $h(\boldsymbol{x})$, so dass $v \geq u$ auf $\partial B(0,1)$ und $\Delta v \leq -\max |f^-| \leq \Delta u$ auf $B(0,1)$.

14. Zeige dass die Funktion

$$K(x, y) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^n}$$

erfüllt:

$$\int_{\partial \boldsymbol{R}^n_+} K(x, y) dy = 1.$$

15. Sei f eine glatte Funktion mit einem kompakten Träger in $\boldsymbol{R}^n_+$ und g eine glatte Funktion mit einem kompakten Träger in $\partial \boldsymbol{R}^n_+ = \boldsymbol{R}^{n-1}$. Mit der Fundamentallösung der Laplaceschen Gleichung $\Phi(x)$, der obigen Funktion $K(x,y)$ und der Greenschen Funktion $G(x,y) = [\Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x})]$, $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$, beweise dass

$$u(x) = \int_{\boldsymbol{R}^n_+} G(x,y) f(y) dy + \int_{\partial \boldsymbol{R}^n_+} K(x,y) g(y) dS(y)$$

erfüllt $\lim_{\boldsymbol{R}^n_+ \ni x \to x^0} u(x) = g(x^0)$, $\forall x^0 \in \partial \boldsymbol{R}^n_+$.

16. Zeige dass die Fundamentallösung der Wärmegleichung erfüllt:

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(x,t) dx = 1, \quad \forall t > 0.$$

17. Sei f eine glatte Funktion mit einem kompakten Träger in $\boldsymbol{R}^n \times [0, \infty)$ und g eine glatte Funktion mit einem kompakten Träger in $\boldsymbol{R}^n$. Mit der Fundamentallösung der Wärmegleichung $\Phi(x,t)$, beweise dass

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(x-y, t-s) f(y,s) dy ds + \int_{\boldsymbol{R}^n} \Phi(x-y, t) g(y) dy$$

erfüllt $\lim_{\boldsymbol{R}^n \ni x \to x^0, 0<t \to 0} u(x,t) = g(x^0)$, $\forall x^0 \in \boldsymbol{R}^n_+$.

18. Berechne das Integral über die Wärmekügel $E(1)$,

$$\int \int_{E(1)} \frac{|\boldsymbol{x}|^2}{t^2} d\boldsymbol{x} dt = 4$$

wobei $E(r) = E(0,0;r)$, $E(\boldsymbol{x}, t; r) = \{(\boldsymbol{y}, s) : \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t-s) \geq r^{-n}\}$.
Hinweise: Verwende Polarkoordinaten und die Transformation $\tau = \log[1/(-4\pi t)]$. Dann verwende die folgenden:

$$\int_0^\infty \tau^{\lambda+1} e^{-\lambda \tau} d\tau = \frac{\Gamma(\lambda+2)}{\lambda^{2+\lambda}}, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \alpha(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

19. Nimm an, $n = 1$ und $u(x,t) = v(x^2/t)$.

    (a) Zeige, $u_t = u_{xx}$ gilt, genau dann wenn

    $$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0, \quad z > 0$$

    gilt.

    (b) Zeige, die allgemeine Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung ist:

    $$v(z) = c \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + d.$$

    (c) Leite $v(x^2/t)$ nach x ab, und wähle die Konstante c aus, so dass die Fundamentallösung der Wärmegleichung für $n = 1$ sich ergibt.

20. Zeige, die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \boldsymbol{R}, t > 0; \qquad u(x,0) = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{sgn}(x)]$$

ist gegeben durch:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)\right].$$

21. Mit dem Separations-Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ bestimme eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems,

$$\begin{cases} u_t &= \Delta u, & (0,\ell)\times(0,\infty) \\ u &= 0, & \partial(0,\ell)\times(0,\infty) \\ u &= g, & (0,\ell)\times\{t=0\} \end{cases}$$

wobei $g \in L^2(0,\ell)$. Als Anwendung erstelle eine Graphik der Lösung für $g(x) = \operatorname{sgn}(x - \ell/2)$.

22. Seien $u_1, u_2 \in C^2(\bar{U}_T)$ Lösungen des Randwertproblems:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u, & U_T \\ u &= g, & \partial U \times [0,T]. \end{aligned}$$

Beweise wenn $u_1(x,T) = u_2(x,T)$, $x \in U$ gilt, dann gilt $u_1 \equiv u_2$ in U_T.

23. Seien $g \in C^2(\boldsymbol{R})$ und $h \in C^1(\boldsymbol{R})$ und definiere $u(x,t)$ durch d'Alembert's Formel:

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy.$$

Beweise: $u \in C^2(\boldsymbol{R}\times[0,\infty))$, $u_{tt} - u_{xx} = 0$ in $\boldsymbol{R}\times(0,\infty)$ und

$$\lim_{(x,t)\to(x^0,0),t>0} u(x,t) = g(x^0), \qquad \lim_{(x,t)\to(x^0,0),t>0} u_t(x,t) = h(x^0), \quad \forall x^0 \in \boldsymbol{R}.$$

24. Alternative Herleitung der d'Alembertschen Formel.

(a) Zeige, die allgemeine Lösung der PDG $u_{xy} = 0$ ist

$$u(x,y) = F(x) + G(y)$$

für beliebige Funktionen F und G.

(b) Mit der Transformation der Variablen $\xi = x + t$ und $\eta = x - t$ zeige, $u_{tt} = u_{xx}$ gilt genau dann wenn $u_{\xi\eta} = 0$ gilt.

(c) Verwende diese Ergebnisse, um die d'Alembertsche Formel herzuleiten.

25. Sei $u \in C^2(\boldsymbol{R}\times[0,\infty))$ eine Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in \boldsymbol{R}, t > 0 \\ u = g, u_t = h, & x \in \boldsymbol{R}, t = 0 \end{cases}$$

wobei g und h glatte Funktionen mit kompakten Träger in $\boldsymbol{R}$ sind. Die kinetische Energie $k(t)$ und die potentielle Energie $p(t)$ sind:

$$k(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t)dx, \quad p(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t)dx.$$

Zeige,

(a) $k(t) + p(t)$ ist konstant in t,

(b) $k(t) = p(t)$ für alle t groß genug.

26. Sei u eine Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in \boldsymbol{R}^3, t > 0 \\ u = g, u_t = h, & x \in \boldsymbol{R}^3, t = 0 \end{cases}$$

wobei g und h glatte Funktionen mit kompakten Träger in $\boldsymbol{R}^3$ sind. Zeige, u erfüllt:

$$|u(x,t)| \le C/t, \quad x \in \boldsymbol{R}^3, t > 0$$

für eine Konstante C.

27. Berechne die Lösung der Wellengleichung:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in \boldsymbol{R}, \quad t > 0; \qquad u_t(x,0) = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

28. Bestimme die Charakteristiken für die partielle Differentialgleichung $au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y = 0$ für die drei Fälle:

    (a) $b^2 - 4ac > 0$, z.B. $u_{xx} - u_{yy} = 0$,

    (b) $b^2 - 4ac = 0$, z.B. $u_x - u_{yy} = 0$, und

    (c) $b^2 - 4ac < 0$, z.B. $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

29. Vergleich von Wellengleichungen.

    (a) Schreibe die Wellengleichung $p_{tt} = c^2 p_{xx}$ mit $\boldsymbol{u} = \langle p_x, p_t \rangle^{\mathrm{T}}$ in erste Ordnung $\boldsymbol{u}_t + A\boldsymbol{u}_x = 0$ um.

    (b) Berechne die Charakteristiken für $\boldsymbol{u}_t + A\boldsymbol{u}_x = 0$.

    (c) Löse das Anfangswertproblem mit Charakteristiken:

    $$\boldsymbol{u}_t + A\boldsymbol{u}_x = 0, \qquad u_1(x,0) = g'(x), \quad u_2(x,0) = h(x).$$

    (d) Vergleiche das Ergebnis mit der d'Alembertschen Formel für die Lösung des Anfangswertproblems,

    $$p_{tt} = c^2 p_{xx}, \qquad p(x,0) = g(x), \quad p_t(x,0) = h(x).$$

30. Ein Modell für die nicht viscöse quasi-1D Düsenströmung eines idealen Gases ist $\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{Q} = 0$ wobei

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E+p) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 \\ v(E+p) \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho e \\ p &= \rho \mathcal{R} T \\ e &= c_v T \end{aligned}$$

ρ	Dichte	v	Geschwindigkeit
E	totale Energie	p	Druck
e	innere Energie	T	Temperatur
c_v	spezifische Wärme	$\mathcal{R}$	Gas-Konstante
	(konstantes Volumen)	A	Schnittflächeninhalt der Düse

Für die folgende Vereinfachung berechne die Charakteristiken:

$$v_t + (v^2)_x + cv^2 = 0, \quad c > 0, \qquad v(x,0) = x$$

und löse das Anfangswertproblem.

31. Nimm an, dass die potentielle Energie in einem Schwerkraftfeld ungefähr durch $\phi(x) = mgx$ gegeben ist, d.h. die Schwerkraft $F(x) = -\phi'(x) = -mg$ ist ungefähr konstant hinunter in der x-Richtung. Für eine gegebene Masse $m > 0$ die Hamiltonsche Funktion ist $H(p,x) = \frac{1}{2m}|p|^2 + \phi(x)$ (und die Lagrangesche Funktion ist $L(q,x) = \frac{m}{2}|q|^2 - \phi(x)$). Verwende die Hamiltonschen Differentialgleichungen, um das Anfangswertproblem zu lösen:

$$u_t + H(u_x, x) = 0, \quad u(x,0) = \mu|x|, \quad \mu \in \boldsymbol{R}.$$

32. Wenn für $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, $t > 0$,

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \inf_{\boldsymbol{w} \in C^1([0,t])} \left\{ \int_0^t L(\dot{\boldsymbol{w}}(s)) ds + g(y) \;\mid\; \boldsymbol{w}(0) = \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{x} \right\}$$

beweise dass u die Hopf-Lax Formel erfüllt:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \min_{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}}{t} \right) + g(\boldsymbol{y}) \right\}$$

33. Für den Fall dass $g = 0$ im vorletzten Beispiel berechne die Hopf-Lax Lösung des Anfangwertsproblems. Zeige dass diese Lösung für jedes $t > 0$ halbkonkav ist.

34. Für beliebige $u_{\mathrm{l}}, u_{\mathrm{r}} \in \boldsymbol{R}$ gib die Entropie-Lösung des Riemannschen Problems an,

$$\begin{cases} u_t + (u^4)_x = 0, \quad x \in \boldsymbol{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_{\mathrm{l}}, \quad x < 0, \qquad u(x,0) = u_{\mathrm{r}}, \quad x > 0 \end{cases}$$

und zeige dass die Entropie-Bedingung erfüllt ist.

35. Zeige dass $\phi_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$ und $\chi(x) = |x|$ in $W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega = (-1, 1)$, für $1 \le p \le \infty$ liegen. Zeige dass $\|\chi - \phi_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ für $1 \le p < \infty$, aber nicht für $p = \infty$.

36. Zeige dass $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$ ein Hilbert-Raum ist.

37. Nimm an, dass $U \subset \boldsymbol{R}^n$ beschränkt ist und $U \subset \cup_{n=1}^N V_n$. Zeige, es existieren Funktionen $\zeta_n \in C^\infty(\boldsymbol{R^n})$, die erfüllen: $0 \le \zeta_n \le 1$, Träger$(\zeta_n) \subset V_n$, $\sum_{n=1}^N \zeta_n = 1$ in U. Die Funktionen $\{\zeta_n\}_{n=1}^N$ bilden eine *Teilung der Eins.*

38. Gib ein Beispiel einer offenen Menge $U \in \boldsymbol{R}^n$ und eine Funktion $u \in W^{1,\infty}(U)$, wobei u keine Lipschitz stetige Funktion in U ist. (Hinweis: Sei U eine Kugel in $\boldsymbol{R}^2$ mit einem Schlitz entfernt.)

39. Sei $U \subset \boldsymbol{R}^n$ eine beschränkte Menge mit $\partial U \in C^1$. Zeige, eine *typische* Funktion $u \in L^p(U)$, $(1 \le p < \infty)$ hat keine Spur auf ∂U. Das heisst, es gibt keinen linearen, stetigen Operator $T : L^p(U) \to L^p(\partial U)$, der erfüllt $Tu = u|_{\partial U}$ wenn $u \in C(\bar{U}) \cap L^p(U)$.

40. Sei $\Omega = (0, 1)^n$. Zeige, dass die Einbettungen (2)-(6) auf Seite 97 in Adams auch für $1 \le q < p < \infty$ gelten. (Siehe Bemerkung (6) auf Seite 99.) Verwende die kompakten Einbettungen auf Seite 144 in Adams, um zu zeigen, $W^{l,p}(\Omega)$ ist in $W^{k,p}(\Omega)$ für jede $l > k$ kompakt eingebettet.

41. Sei $U \subset \boldsymbol{R}^n$ eine offene, zusammenhängende, beschränkte Menge mit $\partial U \in C^1$. Sei $\Gamma \subset \partial U$ eine Menge mit einem positiven $(n-1)$-dimensionalen Maß, $\mu_{n-1}(\Gamma) > 0$. Zeige, es existiert eine Konstant c unabhängig von u, wobei

$$c \int_U u^2 dx \le \int_U |Du|^2 dx, \quad \forall u \in H^1_\Gamma(U) = \{u \in H^1(U) : Tu = 0 \text{ auf } \Gamma\}.$$

Deswegen ist $B(u, v) = \int_U Du \cdot Dv dx$ *koerziv* auf $H^1_\Gamma(U)$.

42. Definiere $\Omega = (0, 1)$ und $\delta_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$, $x_0 \in \Omega$. Stelle das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u &= \delta_{x_0}, \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \partial\Omega \end{cases}$$

in eine schwache Form um,

$$\text{Finde } u \in H \text{ sodass } B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H$$

für einen geeigneten Hilbertraum H. Zeige, es existiert genau eine Lösung $u \in H$.