Übungen für Partielle Differentialgleichungen
Sommersemester 2011

1. Sei $\Omega = (0,1)^n$.

   a. Zeige dass Ω der Klasse C^1 nicht gehört.

   b. Durch eine explizite Rechnung zeige für $u \in C^1(\bar{\Omega})$

   $$\int_\Omega u_{x_i} d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} u\nu^i dS(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, \ldots, n$$

   (*Gelöst teilweise von Herrn Kerschberger und teilweise von Herrn Keeling.*)

2. Wenn eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^n$ durch eine ausreichend glatte Parameterisierung $\{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{u} \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}\}$ gegeben ist, ist das Integral einer ausreichend glatten Funktion f über S so gegeben:

   $$\int_S f(\boldsymbol{x}) dS(\boldsymbol{x}) = \int_D f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}))\sqrt{\det\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{u}}\right]} d\boldsymbol{u}$$

   Für den bestimmten Fall, $S = \partial B(0,r) \subset \mathbb{R}^3$, leite die folgende Formel her:

   $$\int_S f(\boldsymbol{x}) dS(\boldsymbol{x}) = r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(r\cos(\theta)\sin(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\phi)) \sin(\phi) d\phi d\theta$$

   (*Gelöst von Herrn Wunderer*.)

3. Mit dem Gauß-Green Satz:

   a. Beweise den Divergenz-Satz:

   $$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F} d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nu} dS(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{F} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$$

   (*Gelöst von Frau Neumayr*.)

   b. Verwende den Divergenz-Satz, um zu zeigen

   $$\int_\Omega \Delta u d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS(\boldsymbol{x}) \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega})$$

   (*Gelöst von Frau Neumayr*.)

   c. Verwende den Divergenz-Satz, um zu zeigen

   $$\int_\Omega v\Delta u d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} dS(\boldsymbol{x}) \quad \forall u, v \in C^1(\bar{\Omega})$$

   (*Gelöst von Herrn Sonnberger*.)

   d. Verwende dieses Ergebnis, um zu zeigen

   $$\int_\Omega [v\Delta u - u\Delta v] d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \left[v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right] dS(\boldsymbol{x}) \quad \forall u, v \in C^1(\bar{\Omega})$$

   (*Gelöst von Herrn Sonnberger*.)

4. (Mittelwertsatz für Integrale) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Domäne. Angenommen sind $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar, f ist beschränkt und g ist nicht negativ. Zeige, $\exists \lambda \in [\inf_\Omega f, \sup_\Omega f]$ sodass

$$\int_\Omega f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \lambda \int_\Omega g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

Zeige anschliessend (mit dem Zwischenwertsatz), wenn $f \in C(\Omega)$ und Ω zusammenhängend ist, $\exists \boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ wobei $\lambda = f(\boldsymbol{x}_0)$. Hinweis: Für eine Domäne Ω gilt

$$\int_\Omega u(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \leq \int_\Omega v(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \quad \forall u, v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ Riemann integrierbar mit } u(\boldsymbol{x}) \leq v(\boldsymbol{x}).$$

(*Gelöst von Herrn Kratochwill.*)

5. Zeige, wenn $f \in C(\mathbb{R}^n)$ erfüllt

$$\int_\Omega f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0, \quad \forall \Omega \text{ eine Domäne}$$

dann gilt $f = 0$. Insbesondere, wenn für $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ und für jedes fixiertes $t > 0$ gilt

$$\int_\Omega [\partial_t u(\boldsymbol{x}, t) + \nabla \cdot (u(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{b})]d\boldsymbol{x} = 0, \quad \forall \Omega \text{ eine Domäne}$$

dann gilt

$$\partial_t u(\boldsymbol{x}, t) + \nabla \cdot (u(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{b}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

(*Gelöst von Herrn Achtert.*)

6. Für eine Funktion $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ zeige:

$$\partial_t \int_\Omega u(\boldsymbol{x}, t)d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \partial_t u(\boldsymbol{x}, t)d\boldsymbol{x}, \quad \forall \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n \quad \forall t > 0$$

(*Gelöst von Herrn Aivaliotis.*)

7. Für das Anfangswertproblem mit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \partial_t u + \boldsymbol{b} \cdot \nabla u + cu &= f, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u &= u_0, \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

leite eine explizite Lösungsformel her.

(*Gelöst von Herrn Kerschberger.*)

8. Definiere

$$\eta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} C \exp\left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2 - 1}\right], & |\boldsymbol{x}| < 1 \\ 0, & |\boldsymbol{x}| \geq 1 \end{cases} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 1$$

   a. Für $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ definiere $v_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \eta(\boldsymbol{x}/\epsilon)/\epsilon^n$ und zeige,

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_\epsilon(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})d\boldsymbol{x} = 1$$

   b. Für $(\tilde{\boldsymbol{x}}, 0) = \boldsymbol{x} =\in \mathbb{R}^n$ und $(\check{\boldsymbol{x}}, 0) = \hat{\boldsymbol{x}} =\in \mathbb{R}^n$ definiere $w_\epsilon(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \eta(\tilde{\boldsymbol{x}}/\epsilon)/\epsilon^{n-1}$ und zeige,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} w_\epsilon(\tilde{\boldsymbol{x}} - \check{\boldsymbol{x}})d\boldsymbol{x} = 1$$

   (*Gelöst von Frau Neumayr.*)

c. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine Fläche, die durch eine ausreichend glatte Parameterisierung $\{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{u} \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}\}$ gegeben ist. Die inverse von $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ sei mit $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ bezeichnet, d.h. für jeden Punkt $\boldsymbol{u} \in D$ gibt es genau einen entsprechenden Punkt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) \in S$, und für jeden Punkt $\boldsymbol{x} \in S$ gibt es genau einen entsprechenden Punkt $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in D$. Für $\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}} \in S$ und

$$u_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \frac{\eta\left(\dfrac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}})}{\epsilon}\right)}{\epsilon^{n-1}\sqrt{\det\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\right)}}$$

zeige für $\forall\epsilon$ klein genug,

$$\int_S u_\epsilon(\boldsymbol{x})dS(\boldsymbol{x}) = 1$$

(*Gelöst von Herrn Keeling*.)

9. Definiere $v_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \eta(\boldsymbol{x}/\epsilon)/\epsilon^n$. Zeige, wenn $g \in C(\mathbb{R}^n)$ erfüllt

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x}) v_\epsilon(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}) d\boldsymbol{x} = 0, \quad \forall \epsilon > 0$$

dann gilt $g(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$. Hinweis: Man kann den obigen Mittelwertsatz verwenden. Insbesondere, wenn für $T > 0$, $f \in C(\mathbb{R}^n)$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_\Omega [T\Delta u(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})] v_\epsilon(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}) d\boldsymbol{x} = 0, \quad \forall \hat{\boldsymbol{x}} \in \Omega, \quad \forall B(\hat{\boldsymbol{x}}, \epsilon) \subset \Omega$$

dann gilt $-T\Delta u = f$ in Ω.

(*Gelöst von Herrn Sonnberger*.)

10. Für $\partial\Omega$ ausreichend glatt, $T > 0$ und $f \in C(\bar{\Omega})$ definiere das Funktional

$$J(u) = \int_\Omega T\left[\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - 1\right] d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f u d\boldsymbol{x}$$

und leite die Optimalitätsbedingung in Form eines Randwertproblems her.

(*Gelöst von Herrn Kerschberger*.)

11. Für $\partial\Omega$ ausreichend glatt, $p, q \geq 1$, $\mu > 0$ und $\tilde{u} \in C(\bar{\Omega})$ definiere das Funktion

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u - \tilde{u}|^p d\boldsymbol{x} + \frac{\mu}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q d\boldsymbol{x}$$

und leite die Optimalitätsbedingung in Form eines Randwertproblems her. Bestimme die Werte von p und q, für welche die hergeleitete partielle Differentialgleichung linear, semi-linear oder quasi-linear ist.

(*Gelöst von Herrn Achtert*.)

12. Berechne die Lösung des Randwertproblems explizit für ein fixiertes $y \in \Omega = (0, 1)$,

$$\left\{\begin{array}{rcll} -u_\epsilon''(x) & = & \delta_\epsilon(x - y), & x \in \Omega \\ u_\epsilon(x) & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right. \quad \text{wobei} \quad \delta_\epsilon(x) = \left\{\begin{array}{rl} 1/(2\epsilon), & |x| \leq \epsilon \\ 0, & \text{sonst} \end{array}\right.$$

Zeige die folgenden:

$$\lim_{\epsilon \to 0} u_\epsilon(x) = u_0(x) = \left\{\begin{array}{ll} (1 - y)x, & x \in [0, y] \\ y(1 - x), & x \in [y, 1] \end{array}\right. \qquad \int_\Omega u_0' v' dx = v(y), \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

(*Gelöst von Herrn Kratochwill*.)

13. Zeige,

$$g(x,y) = \begin{cases} (1-y)x, & 0 \le x \le y \\ (1-x)y, & y \le x \le 1 \end{cases}$$

ist die Greensche Funktion für das Poissonsche Problem in 1D:

$$\begin{cases} -u''(x) &= f(x), \quad x \in \Omega = (0,1) \\ u(x) &= 0, \qquad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

wobei $f \in C(\bar{\Omega})$ gilt, d.h. die Lösung $u(x)$ ist gegeben durch:

$$u(x) = \int_0^1 g(x,y) f(y) dy.$$

(*Gelöst von Frau Neumayr*.)

14. Zeige für $f \in C_0(\mathbb{R})$ und $\Phi(x) = -\frac{1}{2}|x|$ die Funktion,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y) f(y) dy$$

erfüllt $-u''(x) = f(x), x \in \mathbb{R}$.

(*Gelöst von Herrn Aivaliotis*.)

15. Für die Poissonsche Gleichung mit Neumann Randbedingungen:

$$\begin{cases} -u''(x) &= f(x), \quad x \in \Omega = (0,1) \\ u'(x) &= 0, \qquad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

zeige, die Mittelwertbedingung auf f, $\int_0^1 f(x)dx = 0$, ist notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung. Weiters beweise, die Mittelwertbedingung auf u, $\int_0^1 u(x)dx = 0$, garantiert die Eindeutigkeit einer Lösung.

(*Gelöst von Herrn Wunderer*.)

16. Sei Φ die Fundamentallösung der Gleichung $-\Delta\Phi(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Sei $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) - \phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$ durch $\phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$ definiert, wobei für eine Domäne $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} \Delta_{\boldsymbol{y}}\phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) &= 0, \qquad \boldsymbol{y} \in \Omega \\ \phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) &= \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{y} \in \partial\Omega \end{cases}$$

Beweise, $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \Omega$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$. Hinweise: Nimm $u(\boldsymbol{z}) = G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ und $v(\boldsymbol{z}) = G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ und setze u und v in die Greensche Formel,

$$\int_{D_\epsilon(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} [u\Delta v - v\Delta u] d\boldsymbol{z} = \int_{\partial D_\epsilon(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} \left[u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right] dS(\boldsymbol{z})$$

für $D_\epsilon(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Omega \backslash [B(\boldsymbol{x},\epsilon) \cup B(\boldsymbol{y},\epsilon)]$. Mit $\epsilon \to 0$, $u(\boldsymbol{y}) = v(\boldsymbol{x})$.

(*Gelöst von Herrn Wunderer*.)

17. Für eine Domäne $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beweise, wenn $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch ist, dann gilt

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \fint_{B(x,r)} u(y) dy \quad \forall B(\boldsymbol{x},r) \subset \Omega.$$

(Hinweis: Definiere $\phi(r)$ als der Mittelwert von u über $\partial B(x,r)$, stelle $\phi'(r)$ bezüglich Δu dar, und zeige dadurch, dass $\phi'(r) = 0$ gilt. Dann ist $\phi(r) = \lim_{t\to 0} \phi(t)$.) Beweise, wenn $u \in C^2(\Omega)$ erfüllt

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y)$$

für jede Kugel $B(x,r) \subset \Omega$, dann ist u harmonisch in Ω. (Hinweis: Wenn u nicht harmonisch ist, dann erfüllt die obige ϕ-Funktion $\phi'(r) \neq 0$ für irgendeine Kugel, ein Widerspruch.)

(*Gelöst von Herrn Aivaliotis.*)

18. Eine Funktion v wird *subharmonisch* in Ω genannt, wenn:

$$-\Delta v \leq 0 \qquad \text{in } \Omega.$$

   (a) Beweise die folgende Ungleichung, wenn v subharmonisch ist:

$$v(x) \leq \fint_{B(x,r)} v(y)dy \qquad \forall B(x,r) \subset \Omega.$$

   (b) Beweise, es gilt daher $\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v$.

   (c) Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte und konvexe Funktion. Nimm an, dass u harmonisch ist, und dass $v = \phi(u)$ gilt. Beweise, dass v subharmonisch ist.

   (d) Beweise, dass $v = |\nabla u|^2$ subharmonisch ist, wenn u harmonisch ist.

   (*Gelöst von Herrn Sonnberger.*)

19. Beweise, dass:

$$\max_{\boldsymbol{x}\in B(0,1)} |u(\boldsymbol{x})| \leq \max_{\boldsymbol{x}\in\partial B(0,1)} |g(\boldsymbol{x})| + \frac{1}{2n} \max_{\boldsymbol{x}\in B(0,1)} |f(\boldsymbol{x})|$$

   wenn u eine glatte Lösung des folgenden Problems ist:

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \boldsymbol{x} \in B(0,1) \\ u = g, & \boldsymbol{x} \in \partial B(0,1). \end{cases}$$

   Hinweise:

   (a) Nimm an, dass $\Delta u \geq f$, und beweise, dass:

$$\max_{\boldsymbol{x}\in B(0,1)} u(\boldsymbol{x}) \leq \max_{\boldsymbol{x}\in\partial B(0,1)} g^+(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2n} \max_{\boldsymbol{x}\in B(0,1)} |f^-(\boldsymbol{x})|$$

   wobei $g^+(\boldsymbol{x}) = \max\{0, g(\boldsymbol{x})\}$ und $f^-(\boldsymbol{x}) = -\min\{0, f(\boldsymbol{x})\}$. Dann folgt das Resultat, wenn diese Ungleichung mit u und $-u$ angewendet wird.

   (b) Um die Ungleichung zu beweisen, definiere:

$$v(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{y}\in\partial B(0,1)} g^+(\boldsymbol{y}) + h(\boldsymbol{x}) \max_{\boldsymbol{y}\in B(0,1)} |f^-(\boldsymbol{y})|$$

   für irgendein $h(\boldsymbol{x})$, so dass $v \geq u$ auf $\partial B(0,1)$ und $\Delta v \leq -\max|f^-| \leq \Delta u$ auf $B(0,1)$.

   (*Gelöst von Herrn Kerschberger.*)

20. Zeige:

$$K(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = \frac{2x_n/[n\alpha(n)]}{[|\tilde{\boldsymbol{x}} - \tilde{\boldsymbol{y}}|^2 + x_n^2]^{n/2}}, \qquad \begin{array}{l} \forall \boldsymbol{x} = (\tilde{\boldsymbol{x}}, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ \\ \forall \tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^{n-1} \end{array} \qquad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}) d\tilde{\boldsymbol{y}} = 1.$$

   (*Gelöst von Herrn Rouschal.*)

21. Betrachte den folgenden Satz. Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ eine Domäne. Nimm an, dass $c \geq 0$ eine glatte Funktion ist, und definiere $u^+ = \max(u, 0)$ und $u^- = \min(u, 0)$. Dann:

$$\Delta u \geq cu \quad \Rightarrow \quad \max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}} u(\boldsymbol{x}) \leq \max_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} u^+(\boldsymbol{x}), \quad \text{und} \quad \Delta u \leq cu \quad \Rightarrow \quad \min_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}} u(\boldsymbol{x}) \geq \min_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} u^-(\boldsymbol{x}).$$

   Insbesondere wenn $\Delta u = cu$, dann folgt

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}} |u(\boldsymbol{x})| = \max_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} |u(\boldsymbol{x})|.$$

   Nun finde ein Gegenbeispiel, um zu zeigen, dieses Resultat gilt nicht gilt wenn $c < 0$.

22. Mit der Greenschen Funktion für eine Kugel $B^n(0,r)$,

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) - \Phi(|\boldsymbol{x}|(\boldsymbol{y}-\check{\boldsymbol{x}})) \quad \check{\boldsymbol{x}} = r\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|^2$$

und

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{\partial}{\partial\nu}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \nabla_{\boldsymbol{y}}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cdot\frac{\boldsymbol{y}}{r} = \frac{1}{n\alpha(n)r}\frac{r^2-|\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n}$$

beweise den Satz: Mit $f \in C_0^2(B^n(0,r))$ und $g \in C(B^n(0,r))$

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{B^n(0,r)} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} + \int_{\partial B^n(0,r)} K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

erfüllt:

(a) $u \in C^2(B(0,r))$

(b) $-\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in B(0,r)$

(c) $\lim\limits_{B(0,r)\ni\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0} u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}^0)$, $\forall \boldsymbol{x}^0 \in \partial B(0,r)$

23. Beweise die Drehungsinvarianz des Laplace-Operators im $\mathbb{R}^n$,

$$\Delta_{\boldsymbol{y}}u(y) = \Delta_{\boldsymbol{x}}u(Ax), \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A^{\mathrm{T}}A = I.$$

24. Sei

$$g(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos k\phi + b_k\sin k\phi]$$

die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion g am Kreis $K_\rho = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = \rho\}$ im Randwertproblem:

$$\begin{cases} \Delta u &= 0, & \text{innerhalb von } K_\rho \\ u &= g, & \text{auf } K_\rho. \end{cases}$$

(a) Mittels Separations-Ansatz $u(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$ in Polarkoordinaten bestimme eine Lösung. Hinweise:

   i. In Polarkoordinaten (r,ϕ),

   $$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}.$$

   ii. Die Lösungen $r^{-k}, k > 0$ und $\ln r$ (für $\lambda = 0$) der Gleichung

   $$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$$

   werden wegen der Forderung $\lim_{r\to 0} R(r) < \infty$ ausgeschlossen.

(b) Als Anwendung erstelle eine Graphik der Lösung für $g(\phi) = \sin(3\phi)$. Vergleiche das Ergebnis mit dem von der Lösungsformel im letzten Beispiel.

25. Mit

$$\Phi(\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left(-\dfrac{|\boldsymbol{x}|^2}{4t}\right)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \\ 0, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases}$$

und

$$E(\boldsymbol{x},t;r) = \{(\boldsymbol{y},s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \leq t, \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-s) \geq r^{-n}\}$$

zeige,

$$\int\int_{E(0,0;r)} \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{r^n s^2} d\boldsymbol{y} ds = 4$$

Hinweise: Verwende Polarkoordinaten und die Transformation $\tau = \log[1/(-4\pi t)]$. Dann verwende die folgenden:

$$\int_0^\infty \tau^{\lambda+1} e^{-\lambda\tau} d\tau = \frac{\Gamma(\lambda+2)}{\lambda^{2+\lambda}}, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \alpha(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

26. Beweise den Satz: Für $\Sigma_T = \{(\boldsymbol{x},t) \in \partial\Omega_T : t \neq 0\}$, $g \in C(\Sigma_T)$ und $f \in C(\Omega_T)$ $\exists$ höchstens eine Lösung $u \in \mathcal{C}^{(2,1)}(\bar{\Omega}_T)$ des End- und Randwertproblems,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u - \Delta u &=& f, \quad \Omega_T \\ u &=& g, \quad \Sigma_T \end{array} \right.$$

27. Zeige, die Funktion

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 + \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)\right], \quad \text{wobei} \quad \text{erf}\,(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^s e^{-t^2}dt \quad \text{(error function)}$$

ist die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \qquad u(x,0) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{array} \right.$$

Vergleiche das Ergebnis mit dem von der Lösungsformel,

$$u(\boldsymbol{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)u_0(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t - \Delta u &=& 0, \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &=& u_0, \quad \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{array} \right.$$

28. Definiere $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$ und $\Gamma_T = \bar{\Omega}_T - \Omega_T$. Eine Funktion v wird eine *Sublösung* in Ω_T genannt, wenn:

$$v_t - \Delta v \leq 0 \qquad \text{in } \Omega_T.$$

(a) Beweise, dass die folgende Ungleichung gilt, wenn v eine Sublösung ist:

$$v(x,t) \leq \frac{1}{4r^n}\int\int_{E(x,t;r)} v(y,s)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}dyds \qquad \forall E(x,t;r) \subset \Omega_T$$

wobei $E(x,t;r)$ oben definiert ist.

(b) Beweise, dass daher $\max_{\bar{\Omega}_T} v = \max_{\Gamma_T} v$.

(c) Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte und konvexe Funktion. Nimm an, dass $u_t = \Delta u$ gilt, und dass $v = \phi(u)$ gilt. Beweise, dass v eine Sublösung ist.

(d) Beweise, dass $v = |\nabla u|^2 + u_t^2$ eine Sublösung ist, wenn $u_t = \Delta u$ gilt.

29. Beweise den Satz: Für $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ und $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$,

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy$$

erfüllt:

(a) $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^1 \times [0,\infty))$

(b) $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^1 \times (0,\infty)$

(c) $\lim\limits_{(x,t)\to(x^0,0^+)} u(x,t) = u_0(x^0)$, $\lim\limits_{(x,t)\to(x^0,0^+)} u_t(x,t) = u_1(x^0)$, $\forall x^0 \in \mathbb{R}^1$

30. Definere die Anfangsbedingungen,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \qquad g(x) = f'(x) = \delta(x+1) - \delta(x-1)$$

berechne die Lösung der Anfangswertprobleme,

$$\begin{cases} u_{tt} &= u_{xx}, & \mathbb{R}^1 \times (0, \infty) \\ u &= u_0, & \mathbb{R}^1 \times \{t = 0\} \\ u_t &= u_1, & \mathbb{R}^1 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

für (a) $u_0 = f$, $u_1 = 0$, (b) $u_0 = 0$, $u_1 = f$ und (c) $u_0 = f$, $u_1 = g$, und stelle diese grafisch dar.

31. Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0 & \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u &= u_0 & \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ u_t &= u_1 & \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Nimm an, dass u_0 und u_1 kompakte Träger haben. Definiere die kinetische Energie:

$$k(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t) dx$$

und die potentielle Energie:

$$p(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(x,t) dx$$

und beweise:

(a) $k(t) + p(t)$ ist konstant in t, und
(b) $k(t) = p(t)$ wenn die Zeit t groß genug ist.

32. Sei u die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0 & \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ u &= g & \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \\ u_t &= h & \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Nimm an, dass g und h glatt sind und kompakte Träger haben. Beweise, es existiert eine Konstante C sodass:

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{t} \qquad x \in \mathbb{R}^3, t > 0.$$

33. Betrachte die Transformation von Koordinaten (x, y) in Koordinaten (ξ, η):

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(a) Berechne die Transformation von Koordinaten (ξ, η) in Koordinaten (x, y).
(b) In einer (x, y)-Koordinatenebene skizziere das (ξ, η)-Koordinatensystem falls $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$, und $d = 1$ gelten. Im (x, y)-Koordinatensystem finde die Fläche des Gebiets, das durch $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\eta = 0$, und $\eta = 1$ beschränkt wird, und setze diese Fläche in Beziehung zu $\det(A)$.
(c) Leite eine Bedingung auf A her, damit das (ξ, η)-Koordinatensystem orthogonal ist, und setze diese Bedingung in Beziehung zu $\nabla\xi$ und $\nabla\eta$.

34. Leite ein orthogonales Koordinatensystem (ξ, η, ζ) her, das orthogonal zur Fläche $z = x^2 + y^2$ an $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist. Für einen allgemeinen Punkt auf der Fläche $z = x^2 + y^2$, leite ein Koordinatensystem (ξ, η, ζ) her, in dem die ξ Richtung orthogonal zur Fläche ist.

35. Betrachte die PDG:
$$u_t + v_x = 0, \quad v_t + u_x = 0.$$

   (a) Drücke die PDG in der folgenden Form aus:
$$LU = \sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha D^\alpha U = B.$$

   (b) Berechne das charakteristische Symbol:
$$\Lambda(\nabla\varphi) = \sum_{|\alpha| = m} A_\alpha (\nabla\varphi)^\alpha.$$

   (c) Berechne die charakteristische Form:
$$Q(\nabla\varphi) = \det(\Lambda(\nabla\varphi)).$$

   (d) Finde die Charakteristiken der PDG an einem allgemeinen Punkt (x_0, t_0), d.h. die Lösungen des folgenden Systems:
$$Q(\nabla\varphi) = 0, \quad \varphi(x_0, t_0) = 0.$$

36. Finde eine Lösung der skalaren Erhaltungsgleichung (Burgerschen Gleichung):
$$u_t + uu_x = 0, \quad x \in \boldsymbol{R}, t > 0; \qquad u(x,0) = \begin{cases} +s, & x \le 0 \\ -s, & x > 0 \end{cases}$$

   für die zwei Fälle, $s = \pm 1$.

37. Nimm an, dass u das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung erfüllt:
$$\begin{cases} u_t &= \mu u_{xx}, \quad x \in \boldsymbol{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

   (a) Zeige, dass $v = -2\mu u_x / u$ die folgende viskose Burgersche Gleichung erfüllt:
$$v_t + vv_x = \mu v_{xx}, \qquad x \in \boldsymbol{R}, \quad t > 0.$$

   Bemerkung: Das ist vielleicht der einzige bekannte Fall, in dem eine Lösung einer nichtlinearen PDG von einer Lösung einer linearen PDG bestimmt wird.

   (b) Mit diesem Resultat und der allgemeinen Lösungsform der Wärmeleitungsgleichung:
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}\right] f(y)dy$$

   zeige, dass die Lösung des Anfangswertproblems für die viskose Burgersche Gleichung:
$$\begin{cases} v_t + vv_x &= \mu v_{xx}, \qquad x \in \boldsymbol{R}, \quad t > 0 \\ v(x,0) &= \kappa \cdot \mathrm{sgn}(x), \quad x \in \boldsymbol{R} \end{cases}$$

   wie folgt ist:
$$v(x,t) = \kappa \cdot \frac{1 - h(x,t)}{1 + h(x,t)} \quad \text{mit} \quad h(x,t) = e^{\kappa x/\mu} \frac{1 - \mathrm{erf}\left(\dfrac{\kappa t + x}{\sqrt{4\mu t}}\right)}{1 - \mathrm{erf}\left(\dfrac{\kappa t - x}{\sqrt{4\mu t}}\right)}.$$

(c) Mit diesem Resultat, bestätige die unteren Lösungen mit verschwindender Viskosität, die dem Limes $\mu \to 0$ entsprechen. Falls $\kappa = -1$, tritt die Druckwellenlösung auf:

$$\lim_{\substack{\mu \to 0 \\ \kappa = -1}} v(x,t) = -\mathrm{sgn}(x).$$

Falls $\kappa = +1$, tritt die Verdünnungswellenlösung auf:

$$\lim_{\substack{\mu \to 0 \\ \kappa = +1}} v(x,t) = \begin{cases} -1, & x \le -t \\ x/t, & |x| \le t \\ +1, & t \le x. \end{cases}$$

38. (Inverses Problem der Elektrokardiographie) Sei $\Omega = \{(r,\theta) : 0 < \rho \le r \le R, 0 \le \theta \le 2\pi\}$ ein Ring mit innerem Radius ρ und äußerem Radius R. Seien Γ_1 der innere Rand von Ω an $r = \rho$ und Γ_2 der äußere Rand von Ω an $r = R$. Nun betrachten wir das Problem:

$$\begin{cases} \Delta\phi &= 0, & \Omega \\ \phi &= u, & \Gamma_1 \\ \partial_n\phi &= 0, & \Gamma_2 \end{cases}$$

und wir definieren die Abbildung A durch $[Au](\theta) = \phi(R,\theta)$. (D.h. elektrische Potentialwerte der Herzoberfläche werden zu elektrischen Potentialwerten der Körperoberfläche abgebildet.)

(a) Nimm an, dass die Funktion:

$$u(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta] \in L^2(\Gamma_1), \text{ d.h.} \qquad a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k^2 + b_k^2] < \infty$$

gegeben wird, und leite eine unendliche Summe für $v = Au$ her. Zeige, dass die Koeffizienten von v quadratsummierbar sind.

(b) Nimm an, dass die Funktion:

$$v(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta] \in L^2(\Gamma_2), \text{ d.h.} \qquad \alpha_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k^2 + \beta_k^2] < \infty$$

gegeben wird, und leite eine unendliche Summe für u in $Au = v$ her. Zeige, dass die Koeffizienten von u nicht notwendigerweise quadrat summierbar sind.

(c) Konstruiere ein Beispiel, in dem $v_k \to 0$ auf Γ_2, während die entsprechenden $u_k \not\to 0$ auf Γ_1.

(d) Erkläre warum das Problem schlecht gestellt ist, ein $u \in L^2(\Gamma_1)$ zu finden, das für gegebenes $v \in L^2(\Gamma_2)$ die Gleichung $Au = v$ erfüllt.

(e) Leite eine unendliche Summe für das Minimum $u^\star$ des Funktionals her:

$$J(u) = \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_2} |Au - v|^2 d\theta + \xi_0 a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k [a_k^2 + b_k^2]$$

und finde eine Bedingung an die Koeffizienten $\{\xi_k\}$, damit die durch $Bv = u^\star$ definierte Abbildung B stetig von $L^2(\Gamma_2)$ in $L^2(\Gamma_1)$ ist.