(Virtuelles) Quiz 1 für Numerische Mathematik für LAK

1. Das Gebiet $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}^1$ sei mit einem Gitter $\{x_i\}_{i=0}^N \subset \bar{\Omega}$ diskretisiert, wobei die Gitterpunkte so definiert sind: $x_i = ih$, $0 \le i \le N$, $h = 1/N$. Für eine Funktion $u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^1)$ seien die Werte $\{u(x_i)\}_{i=0}^N$ gegeben. Schreiben Sie Approximationen für (a) $u'(x_i)$, (b) $u''(x_i)$ und (c) $\int_\Omega u(x)dx$. (Die Approximationen sollen zu (a), (b) beziehungsweise (c) konvergieren wenn $h \to 0$.)

2. Zum Entrauschen einer Funktion $v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^1)$ soll das folgende Funktional für fixiertes $\mu > 0$ minimiert werden:

$$\hat{J}(u) = \int_\Omega |u(x) - v(x)|^2 dx + \mu \int_\Omega \sqrt{|u'(x)|^2 + \varepsilon^2} dx$$

   Gegeben seien die Werte $v_i = v(x_i)$, $0 \le i \le N$, auf dem oben definierten Gitter $\{x_i\}_{i=0}^N$. Das minimierende u soll durch die Werte $u_i \approx u(x_i)$, $0 \le i \le N$, approximiert werden. Schreiben Sie eine Approximation $\hat{J}_h : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^1$ des Funktionals $\hat{J}$ bezüglich der Werte $\{v_i\}_{i=0}^N$ und $\{u_i\}_{i=0}^N$. (Wenn gilt $u_i = u(x_i)$, $0 \le i \le N$, soll die Approximation $\hat{J}_h$ zu $\hat{J}$ konvergieren wenn $h \to 0$.)

(Virtuelles) Quiz 2 für Numerische Mathematik für LAK

1. Das Gebiet $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}^1$ sei mit einem Gitter $\{x_i\}_{i=0}^N \subset \bar{\Omega}$ diskretisiert, wobei die Gitterpunkte so definiert sind: $x_i = ih$, $0 \le i \le N$, $h = 1/N$. Für eine Funktion $u \in C^3(\bar{\Omega}) \backslash C^4(\bar{\Omega})$ seien die Werte $\{u(x_i)\}_{i=0}^N$ gegeben. Zeigen Sie:

$$\max_{1 \le i \le N-1} \left| u''(x_i) - \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} \right| = \mathcal{O}(h).$$

2. Gegeben seien die Werte $u(x_i)$, $0 \le i \le N$, auf dem oben definierten Gitter $\{x_i\}_{i=0}^N$. Unter welchen Bedingungen der Funktion u gilt die Konvergenz:

$$h \sum_{i=0}^N u(x_i) \xrightarrow{h \to 0} \int_\Omega u(x) dx.$$

   Erklären Sie.

(Virtuelles) Quiz 3 für Numerische Mathematik für LAK

1. Die Nullstelle einer unbekannten Funktion f soll gefunden werden, und man hat Zugang zu den Werten von f nur durch ein Computerprogramm. Das Computerprogramm berechnet $f(x) = \arctan[4(x - \hat{x})]$, $\hat{x} = 1 + 2^{24}$, in doppelter Genauigkeit (*double precision*). Ein iteratives Verfahren wird zur Bestimmung der Nullstelle verwendet, und man speichert die Approximation $x_k \approx \hat{x}$ in der $k$ten Iteration mit einfacher Genauigkeit (*single precision*). Finden Sie die kleinsten Toleranzen ε, δ und η, die für die Abbruchskriterien

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon |x_k|, \quad |x_k - x_{k-1}| < \delta, \quad |f(x_k)| < \eta$$

   zuverlässig verwendet werden können. Welches Abbruchskriterium verlangt kein Vorwissen von der Funktion?

2. Angenommen gilt $\lim_{x\to x_0} |F(x)/G(x)| < \infty$. Zeigen Sie, es gibt $K, \delta > 0$ sodass $|F(x)| \leq K|G(x)|$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(Virtuelles) Quiz 4 für Numerische Mathematik für LAK

1. Gegeben seien die Koeffizienten $\{a_k\}_{k=0}^n$ eines Polynoms $n$ten Grades:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Schreiben Sie einen Pseudo-Code, der das Polynom möglichst unempfindlich zu Rundungsfehlern auswertet.

2. Die folgende Matrix sei gegeben:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{p+1,1} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-q,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-p} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Bemerken Sie:

$$a_{i,j} = 0 \text{ wenn } p < i - j \text{ oder } j - i > q.$$

Die *Bandbreite* von A is $p + q + 1$, die kleinste Anzahl der benachbarten Diagonalen, zu denen die nicht trivialen Elemente eingeschränkt sind.

(a) Schreiben Sie einen Pseudo-Code zur Implementierung des Gauß Algorithmus für A mit möglichst wenig arithmetischen Operationen.

(b) Um Speicherplatz zu reduzieren, wird A als Liste der Diagonalen gespeichert:

$$B = \begin{bmatrix} a_{p+1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,n-p} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{1,q+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} & \cdots & \cdots & a_{n-q,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(p+q+1)}$$

Bemerken Sie: Die nicht trivialen Elemente von $A = \{a_{i,j}\}$ lassen sich bezüglich der Elemente von $B = \{b_{k,l}\}$ so darstellen:

$$b_{k,l} = a_{p+k-l+1,k} \quad a_{i,j} = b_{j,p+j-i+1}$$

Schreiben Sie den Pseudo-Code vom Teil (a) bezüglich der Elemente von B um.

(Virtuelles) Quiz 5 für Numerische Mathematik für LAK

1. Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine Bandmatrix mit Bandbreite $p+q+1$, wobei p die linke und q die rechte Halbbandbreiten sind, d.h. die Anzahl der streng unteren Diagonalen ist p, und die Anzahl der streng oberen Diagonalen ist q. Für $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ soll eine Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ durch Gaußshe Elimination berechnet werden, und zwar mit möglichst wenig arithmetischen Operationen. Leite eine Funktion $G(n, p, q)$ her, wobei die Größenordnung der Anzahl der Operationen für die Lösung durch $\mathcal{O}(G(n, p, q))$ gegeben ist.

   Hinweis: Für eine obere Schranke kann man im obigen Code die Schleifengrenzen `min(n,k+p)` und `min(n,k+q)`

   ```
   for k=1,...,n-1                          % Pivot-Index
       ...
       for i=k+1,...,min(n,k+p)             % Bis zur linken Grenze
           ...
           for j=k+1,...,min(n,k+q)         % Bis zur rechten Grenze
   ```

   mit `k+p` beziehungsweise `k+q` ersetzen. Für eine untere Schranke kann man die Schleifegrenze `n-1` für das Pivot-Index mit `min(n-p,n-q)` = `n - max(p,q)` ersetzen, und dann gelten `min(n,k+p)` = `k+p` und `min(n,k+q)` = `k+q`.

2. Für die obige Bandmatrix A soll die LU-Zerlegung berechnet werden. Zeigen Sie, L hat die linke Halbbandbreite p und die rechte Halbbandbreite 0, und U hat die linke Halbbandbreite 0 und die rechte Halbbandbreite q.

(Virtuelles) Quiz 6 für Numerische Mathematik für LAK

1. Verwenden Sie Gaußsche Elimination mit einer geeigneten Pivot-Suche, um für die Matrizen
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
   Permutationsmatrizen P_1 und P_2, untere Dreiecksmatrizen L_1 und L_2 und obere Dreiecksmatrizen U_1 und U_2 zu bestimmen, sodass $P_1 A_1 = L_1 U_1$ und $P_2 A_2 = L_2 U_2$ gelten.

2. Die Vektoren $\boldsymbol{u}_k \in \mathbb{R}^N$ sollen durch die Lösung des folgenden Systems bestimmt werden:
$$(I + \Delta t A)\boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{u}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
   wobei für $\Delta x, \Delta t, d, f, c > 0$,
$$\mathbb{R}^N \ni A = \frac{d}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{f}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix} + cI$$
   Leiten Sie eine Bedingung für die Parameter $d, f, c, \Delta t, \Delta x$ her, sodass keine Pivot-Suche verwendet werden muss. Schätzen Sie die Eigenwerte der Matrix $(I + \Delta t A)$ und anschliessend der Matrix $(I + \Delta t A)^{-1}$ ab.

(Virtuelles) Quiz 7 für Numerische Mathematik für LAK

1. Für eine gegebene symmetrische Matrix A leiten Sie die Iterationsmatrizen T_{GS} für Gauß-Seidel und T_{SGS} für Symmetrisch Gauß-Seidel her. Seien B_{GS} und B_{SGS} die approximierten Inversen für A, die erfüllen $T_{\mathrm{GS}} = I - B_{\mathrm{GS}}A$ und $T_{\mathrm{SGS}} = I - B_{\mathrm{SGS}}A$. Zeigen Sie, B_{SGS} ist symmetrisch während B_{GS} im allgemeinen nicht symmetrisch ist.

2. Die Vektoren $\boldsymbol{u}_k \in \mathbb{R}^N$ sollen durch die Lösung des folgenden Systems bestimmt werden:

$$(I + \Delta t A)\boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{u}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

wobei für $d, f, c > 0$,

$$\mathbb{R}^N \ni A = \frac{d}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{f}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ -1 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix} + cI$$

Leiten Sie eine Bedingung für die Parameter $d, f, c, \Delta t, \Delta x$ her, sodass die Iterierten der Jacobi-Methode zur Lösung des Systems $(I + \Delta t A)\boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{u}_k$ immer konvergieren.

(Virtuelles) Quiz 8 für Numerische Mathematik für LAK

1. Schreiben Sie einen Pseudo-Code mit möglichst wenig arithmetischen Operationen zur Implementierung des Verfahrens der Konjugierten Gradienten.

2. Sei C^{-2} eine approximierte Inverse der Matrix A, sodass die Konditionierung der Matrix $C^{-1}A(C^{-1})^{\mathrm{T}}$ besser ist als die von A. Bemerken Sie, dass die Lösung $\boldsymbol{x}$ des Systems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ auch das System $C^{-1}A(C^{-1})^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}) = C^{-1}\boldsymbol{b}$ löst. Schreiben Sie den obigen Pseudo-Code für das System $C^{-1}A(C^{-1})(C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}) = C^{-1}\boldsymbol{b}$ um, und zwar wieder mit möglichst wenig arithmetischen Operationen. (So wird das Verfahren der Konjugierten Gradienten mit *Präkonditionierung* durchgeführt.)

(Virtuelles) Quiz 9 für Numerische Mathematik für LAK

1. Wir definieren:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad b = \frac{2-\varepsilon}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Zeigen Sie, es gelten $\kappa_2(A) = (2-\varepsilon)/\varepsilon$ und

$$\underbrace{\frac{\|x - \tilde{x}\|_2}{\|x\|_2}}_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty} = \kappa_2(A) \underbrace{\frac{\|b - A\tilde{x}\|_2}{\|b\|_2}}_{\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0}$$

2. Seien $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ die Eigenwerte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sei q eine Abschätzung von λ_k, die erfüllt
$$|q - \lambda_k| < |q - \lambda_i|, \quad i \neq k$$
und die Werte $\{q - \lambda_i\}_{i=1}^n$ haben unterschiedliche Beträge. Zeigen Sie dass die Vektoriteration auf $(A - qI)^{-1}$ effizient durchgeführt werden kann, um λ_k zu bestimmen. (Dieser Algorithmus heisst *Inverse Vektoriteration.*)

(Virtuelles) Quiz 10 für Numerische Mathematik für LAK

1. Rechnungen für vernüllende Transformationen.

   (a) Für den Householder Algorithmus,

   ```
   v = x/norm(x,inf)
   r = sign(v(1))*norm(v,2)
   u = v + r*e1                        % e1 = <1,0,...,0>^T
   t = r*u(1)
   s = r*norm(x,inf)
   P = I - u*u^T / t
   ```

   gilt `P*x = -s*e1`. Zeigen Sie, `t = norm(u,2)^2 / 2`.

   (b) Für die orthogonale Givens Transformation

$$G = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & 1 & & & & & & \\
& & & c & \cdots & s & & & \\
& & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\
& & & -s & \cdots & c & & & \\
& & & & & & 1 & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & 1
\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{bmatrix} \vdots \\ \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ \\ \vdots \end{bmatrix}$$

   sollen durch das Produkt Gx nur die Elemente a und $b \neq 0$ in x geändert werden, wobei b vernüllt wird. Zeigen Sie, die Parameter c und s erfüllen:

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

   und werden für $r > 0$ so eindeutig bestimmt:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad c = a/r, \quad s = b/r.$$

2. Sei $A = QR$ die QR-Zerlegung für eine tridiagonale symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, $\tilde{A} = RQ$ ist auch eine tridiagonale symmetrische Matrix. Hinweise: Das Produkt Q^{T} der Givens Transformationen ist eine untere Hessenberg Matrix mit genau 4 Diagonalen. Deswegen ist die orthogonale Matrix Q eine obere Hessenberg Matrix mit genau 4 Diagonalen. Die obere Dreiecksmatrix R hat genau 3 Diagonale. Folglich ist $\tilde{A}$ eine obere Hessenberg Matrix. Aber $\tilde{A}$ ist auch symmetrisch wegen der Form $\tilde{A} = RQ = Q^{\mathrm{T}}AQ$. Deswegen ist die obere Hessenberg Matrix $\tilde{A}$ notwendigerweise tridiagonal.

(Virtuelles) Quiz 11 für Numerische Mathematik für LAK

1. Für gegebene Daten $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^N$ seien die dividierten Differenzen definiert durch:

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f_i, & 0 \le i \le N \\ f[x_i, \ldots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}, & 0 \le i, i+k \le N \end{aligned}$$

   und das interpolierende Polynom

$$Q_N(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{N} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{l=0}^{k-1} (x - x_l)$$

   das erfüllt $Q_N(x_i) = f_i$, $i = 0, \ldots, N$. Sie das Lagrange interpolierende Polynom definiert durch:

$$P_N(x) = \sum_{i=0}^{N} f_i \ell_i(x), \quad \ell_i(x) = \prod_{i \neq j = 0}^{N} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

   das auch erfüllt $P_N(x_i) = f_i$, $i = 0, \ldots, N$. Zeigen Sie explizit, es gilt $Q_1(x) = P_1(x)$. Zeigen Sie im allgemeinen, es gilt $Q_N(x) = P_N(x)$. (Hinweis: $R_N(x) = Q_N(x) - P_N(x)$ ist ein Polynom Nten Grades mit $N + 1$ Nullstellen.)

2. Definiere die stückweise konstante Spline-Funktion

$$\pi_0(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   Berechne die lineare Spline-Funktion $\pi_1(x)$ durch die Faltung

$$\pi_{k+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi_0(x - y) \pi_k(y) dy$$

   Die Funktion $u(x)$ soll mit den Werten $\{u(x_i) : i = 0, \ldots, N\}$, $x_i = ih$, $h = 1/N$, durch die Spline-Basis $\{s_i(x) : i = 0, \ldots, N\}$, $s_i(x) = \pi_1(x/h - i + 1)$, stückweise linear interpoliert werden:

$$u(x) \approx \sum_{i=0}^{N} a_i s_i(x)$$

   Bestimme die Koeffizienten $\{a_i : i = 0, \ldots, N\}$.

(Virtuelles) Quiz 12 für Numerische Mathematik für LAK

1. Sei f eine glatte Funktion mit einer Nullstelle mit Multiplizität $m > 1$. Zeige dass das modifizierte Newtonsche Verfahren, $x_{k+1} = g_m(x_k)$, $g_m(x) = x - mf(x)/f'(x)$, mit Konvergenz-Ordnung 2 konvergiert. (Hinweis: Man kann die Gleichung $g_m(x)f'(x) = xf'(x) - mf(x)$ m-Mal ableiten und im Fixpunkt auswerten.)

2. Für die Funktion $g(x) = xe^{1-x}$,

   (a) finden Sie eine Umgebung $D = B(1, \epsilon)$, wobei $g(D) \subset D$ gilt, und

   (b) leiten Sie eine Schranke $|g'(x)| \le \gamma < 1$, $\forall x \in D$, her.

Erklären die Konsequenzen dieser Eigenschaften für die Fixpunkt-Iteration $x_{k+1} = g(x_k)$ mit $x_0 \in D$.

(Virtuelles) Quiz 13 für Numerische Mathematik für LAK

1. Als Vereinfachung der Diskretisierung des Funktionals vom ersten Quiz,

$$J_h(u_0,\ldots,u_N) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N}[u_i - v_i]^2 + \mu h \sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)^2 + \varepsilon^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \begin{array}{c} \mu > 0, \quad \varepsilon \in (0,1) \\ h = 1/N \end{array}$$

suchen wir ein Minimum der Funktion

$$J(x,y) = \tfrac{1}{2}(x-x_0)^2 + \tfrac{1}{2}(y-y_0)^2 + \sqrt{(x-y)^2 + \varepsilon^2}$$

durch eine Nullstelle des Gradienten $G(x,y) = \nabla J(x,y) = \langle J_x, J_y \rangle^{\mathrm{T}}$, d.h. $J_x = \frac{\partial J}{\partial x}$ und $J_y = \frac{\partial J}{\partial y}$. Schreiben Sie die folgende Newton Iteration mit expliziten Details:

$$\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_k) \cdot (\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k) = -G(\boldsymbol{x}_k), \qquad \boldsymbol{x} = \langle x, y \rangle^{\mathrm{T}}, \quad \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix}$$

wobei $J_{xx} = \frac{\partial^2 J}{\partial x^2}$, $J_{yy} = \frac{\partial^2 J}{\partial y^2}$, $J_{xy} = \frac{\partial^2 J}{\partial x \partial y}$ und $J_{yx} = \frac{\partial^2 J}{\partial y \partial x}$.

2. Für die Fixpunkt-Iteration des Abstiegverfahrens,

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \alpha \nabla J(\boldsymbol{x}_k) = \mathcal{G}_\alpha(\boldsymbol{x}_k), \quad k = 1,2 \quad \alpha \in (0,1)$$

   (a) zeigen Sie für $D = B_\infty(\boldsymbol{x}_0, 1)$ es gilt $\mathcal{G}_\alpha(D) \subset D$, und

   (b) zeigen Sie es gilt $\|\partial \mathcal{G}_\alpha / \partial \boldsymbol{x}\|_\infty \leq 1 - \alpha + 2\alpha/\epsilon$, $\forall \boldsymbol{x} \in D$.

   Erklären die Konsequenzen dieser Eigenschaften für die Fixpunkt-Iteration $\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathcal{G}_\alpha(\boldsymbol{x}_k)$ mit $\boldsymbol{x}_1 \in D$.

(Virtuelles) Quiz 14 für Numerische Mathematik für LAK

1. Gegeben seien Werte $f(x_i)$, $x_i = ih$, $i = 0,\ldots,N$, $h = 1/N$, für eine Funktion $f \in C^6(0,1)$. Finden Sie Koeffizienten $\{a_k : k = -2,-1,0,+1,+2\}$ sodass die folgende gilt:

$$f''''(x_i) = a_{-2}f(x_{i-2}) + a_{-1}f(x_{i-1}) + a_0 f(x_i) + a_1 f(x_{i+1}) + a_2 f(x_{i+2}) + \mathcal{O}(h^2)$$

2. Zeigen Sie für die zusammengesetzte Trapez-Regel,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b)\right] + \mathcal{O}(h^2)$$

   wobei $x_i = a + ih$, $i = 0,\ldots,N$, $h = (b-a)/N$.