Lernfragen für Numerik für LAK
Wintersemester 2009/10

1. Zeige für eine hinreichend glatte Funktion $u(x)$, es gilt:

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

2. Gib ein explizites Beispiel von einem Abbruchsfehler und ein explizites Beispiel von einem Rundungsfehler.

3. Gib ein physikalisches Beispiel einer Funktion $f(x)$, die erfüllt $f(a) < y < f(b)$, $a < b$, obwohl es kein $x \in (a, b)$ gibt, in dem gilt $f(x) = y$.

4. Finde die binäre Darstellung von der dezimalen Zahl $x = 1/10$. Finde die *single precision* Darstellung von dieser Zahl.

5. Die Funktion $f(x)$ ist steigend und hat die Nullstelle $x_0 = 2^7 + 2^{6-p}$, $p = 23$. Finde x_1 und x_2, die $x_0 \in (x_1, x_2)$ erfüllen, und die in *single precision* Genauigkeit am nächsten zu x_0 liegen. Betimme die kleinsten δ, η, ϵ sodass die folgenden Abbruchskriterien funktionieren können:

$$|x_{k+1} - x_k| \le \delta, \quad |x_{k+1} - x_k| \le \eta |x_k|, \quad |f(x_k)| \le \epsilon$$

   wobei die Folge $\{x_k\}$ mit einem Verfahren berechnet wird, die zur Approximation einer Nullstelle geeignet ist.

6. Gib ein Beispiel einer Rechnung eines Skalarproduktes, in der Verlust von signifanten Ziffern stattfindet.

7. Bestimme die Konvergenzgeschwindigkeit von $\{\alpha_n = (n+3)/n^3\}$, und beweise das Ergebnis.

8. Zeige für den folgenden Algorithmus der Gaußschen Elimination,

```
for k=1,2,...,n-1
    for i=k+1,...,n
        A_ik = A_ik / A_kk
        for j=k+1,...,n+1
            A_ij = A_ij - A_ik * A_kj
        end
    end
end
```

   es gibt $\mathcal{O}(n^3)$ Multiplikationen (und Subtraktionen). Bemerke, es gibt aber nur $\mathcal{O}(n^2)$ Divisionen. Zeige für die Rücksubstitution,

```
x_n = A_n,n+1 / A_nn
for i=n-1,...,1
    sum = 0
    for j=i+1,...,n
        sum = sum + A_ij * x_j
    end
    x_i = [A_i,n+1 - sum] / A_ii
end
```

   es gibt $\mathcal{O}(n^2)$ Multiplikationen (und Subtraktionen). Bemerke, es gibt aber nur $\mathcal{O}(n)$ Divisionen.

9. Sei $\{A^{(k)}\}$ die Folge von Matrizen, die durch Gaußsche Elimination berechnet werden, d.h. $A^{(1)} = A$, $A^{(2)} = M^{(1)}A^{(1)}$, …, $A^{(k+1)} = M^{(k)}A^{(k)}$, wobei jede Matrix $M^{(k)}$ durch die Multiplikatoren gegeben ist:

$$M^{(1)} = \left[\begin{array}{r|c} 1 & 0 \\ \hline -m_{21} & \\ \vdots & I_{n-1} \\ -m_{n1} & \end{array}\right] \quad M^{(2)} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & -m_{32} & \\ \vdots & \vdots & I_{n-2} \\ 0 & -m_{n2} & \end{array}\right] \quad \cdots$$

Hier ist I_k die k-dimensionale Einheitsmatrix. Zeige:

$$M^{(1)-1} = \left[\begin{array}{r|c} 1 & 0 \\ \hline m_{21} & \\ \vdots & I_{n-1} \\ m_{n1} & \end{array}\right] \quad M^{(2)-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & m_{32} & \\ \vdots & \vdots & I_{n-2} \\ 0 & m_{n2} & \end{array}\right] \quad \cdots$$

und deswegen für $U = A^{(n)} = M^{(n-1)} \cdots M^{(1)}A$ gilt $LU = A$ für eine Oberedreicksmatrix U und eine Unteredreiecksmatrix $L = M^{(1)-1} \cdots M^{(n-1)-1}$.

10. Gib ein Beispiel eines lösbaren linearen Gleichungssystems an, für das eine *pivoting* Strategie notwendig ist; ansonsten funktioniert Gaußsche Elimination nicht. Für dieses Beispiel schreibe die Zerlegung $PA = LU$, wobei P eine Permuationsmatrix ist, und L und U sind wie im letzten Beispiel.

11. Gib ein (anwendungsorientiertes) Beispiel einer Matrix an, die streng diagonal dominant ist. Zeige dass sie streng diagonal dominant ist. Welches Verfahren ist geeignet, um Systeme mit dieser Matrix zu lösen?

12. Gib ein (anwendungsorientiertes) Beispiel einer Matrix an, die symmetrisch positiv definit ist. Zeige dass sie symmetrisch positiv definit ist. Welches Verfahren ist geeignet, um Systeme mit dieser Matrix zu lösen?

13. Erkläre den Einfluss von p (besonders $p = 1$ und $p = 2$) in der Schätzung der Parameter $q = \langle q_1, \ldots, q_m \rangle$ durch Minimierung von $E(q) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i; q) - f_i|^p$ für gegebene Daten $\{(x_i, f_i)\}_{i=1}^{n}$ und ein empirisches Modell $f(x; q)$.

14. Zeige dass die Frobenius-Matrixnorm ist mit der ℓ_2-Vektornorm kompatibel.

15. Zeige, dass der Spektralradius einer Matrix nie größer als der Wert einer induzierten Norm dieser Matrix ist.

16. Gib ein Beispiel einer Matrix A an, für die die Folge $x_{k+1} = Ax_k$ konvergiert. Gib ein Beispiel einer Matrix B an, für die die Folge $y_{k+1} = By_k$ nicht konvergiert. Welche Eigenschaft von A garantiert Konvergenz, und welche Eigenschaft von B verhindert Konvergenz?

17. Bestimme eine Matrix für die (a) Jacobi, (b) Gauß-Seidel und (c) symmetrisch Gauß-Seidel Verfahren, die einen Spektralradius kleiner als 1 haben muss, um Konvergenz der Iterationen zu garantieren.

18. Gib ein (anwendungsorientiertes) Beispiel einer Matrix an, für die die SOR-Methode für jedes $\omega \in (0, 2)$ konvergiert. Zeige dass die Konvergenz garantiert ist.

19. Gib ein Beispiel einer extrem großen Matrix A an, und berechne eine beschränkte Menge in der sich die Eigenwerte von A befinden, (notwendigerweise) ohne die Eigenwerte explizit auszurechnen.

20. Berechne die Konditionszahlen $\kappa_1(A)$, $\kappa_2(A)$, und $\kappa_\infty(A)$ für die Matrix,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sei $\tilde{b} = \langle 7/2, 5/2 \rangle^{\mathrm{T}} \approx b$ mit Messfehler gegeben, wobei $b = Ax$ und x unbekannt sind, aber die Normen sind so geschätzt worden: $\|b\|_2 \geq 3$, $\|x\|_2 \leq 2$. Wie weit weg von der genauen Lösung x könnte $\tilde{x} = \langle 3/2, 1/2 \rangle^{\mathrm{T}}$ liegen?

21. Gib ein Beispiel einer Matrix A an, für die die Vektoriteration zum Spektralradius von A konvergiert. Welche Eigenschaften von A garantieren diese Konvergenz?

22. Seien die Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ gegeben. Zeige dass die Gerade $y = a^*x + b^*$, die die Summe der quadrierten Abstände zu den Daten minimimert, durch $a^* = (\overline{xy} - \overline{x}\overline{y})/(\overline{x^2} - \overline{x}^2)$ und $b^* = \overline{y} - a^*\overline{x}$ gegeben ist.

23. Seien die Daten $\{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$ gegeben. Finde die quadratische Funktion, die die Summe der quadrierten Abstände zu den Daten minimimert. Wiederhole die Rechnung für die Daten $\{(-2, 0), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 0)\}$.

24. Sei $A \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$, $m, n > 1$, eine Matrix mit nur einem positiven Singulärwert. Für $b \in \boldsymbol{R}^m$ schreibe die Lösung $x = \operatorname{argmin}||Ax - b||_{\ell_2}^2$ mit minimaler ℓ_2-Norm.

25. Die 3 Eckpunkte eines Dreiecks $\{(1, 1, 0), (2, 1, 0), (1, 1, 1)\} = \{x_i\}_{i=1}^3$ sollen zu den 3 Eckpunkten des Dreiecks $\{(5, 1, 5), (7, 8, 9), (6, 5, 10)\} = \{y_i\}_{i=1}^3$ durch eine affine Transformation abgebildet werden. Definiere die Matrizen $X = [x_1, x_2, x_3]$, $\overline{x} = (x_1 + x_2 + x_3)/3$, $\overline{X} = [\overline{x}, \overline{x}, \overline{x}]$, $Y = [y_1, y_2, y_3]$, $\overline{y} = (y_1+y_2+y_3)/3$ und $\overline{Y} = [\overline{y}, \overline{y}, \overline{y}]$. Für die affine Transformation $y = \overline{y} + A*(x - \overline{x})$ bestimme die Matrix A sodass $\|A*(X - \overline{X}) - (Y - \overline{Y})\|_{\ell_2}^2 = \min$. Hinweis: Mit der Singulärwertzerlegung $(X - \overline{X}) = U * S * V^{\mathrm{T}}$ berechne $A = (Y - \overline{Y}) * V * S^+ * U^{\mathrm{T}}$.

26. Mit Hilfe der Lagranschen Polynome schreibe ein Polynom $P(x)$ dritten Grades, das erfüllt: $P(-4) = 23$, $P(-2) = 101$, $P(1) = 73$, $P(5) = 11$.

27. Mit Hilfe der dividierten Differenzen schreibe ein Polynom $P(x)$ dritten Grades, das erfüllt: $P(-4) = 23$, $P(-2) = 101$, $P(1) = 73$, $P(5) = 11$.

28. Zeige dass die Hermiteschen Funktionen H_{nj} und $\hat{H}_{nj}$ erfüllen: $H_{nj}(x_i) = \delta_{ij}$, $H'_{nj}(x_i) = 0$, erfüllen: $\hat{H}_{nj}(x_i) = 0$ und $H'_{nj}(x_i) = \delta_{ij}$. Zeige dass die Hermitesche interpolierende Funktion $H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n f_j H_{nj}(x) + g_j \hat{H}_{nj}(x)$ erfüllt: $H_{2n+1}(x_i) = f_i$, $H'_{2n+1}(x_i) = g_i$.

29. Gegeben seien Knoten $\{x_i\}_{i=0}^n$. Konstruiere Funktionen $\{\phi_i\}$ und $\{\psi_i\}$, die in jedem Teilintervall $\{[x_i, x_{i+1}]\}_{i=0}^{n-1}$ kubisch sind und erfüllen: $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $\phi'_i(x_j) = 0$, $\psi_i(x_j) = 0$ und $\psi'_i(x_j) = \delta_{ij}$. Zeige dass die Hermitesche interpolierende Funktion $H(x) = \sum_{j=0}^n f_j\phi_j(x) + g_j\psi_j(x)$ erfüllt: $H(x_i) = f_i$, $H'(x_i) = g_i$.

30. Definiere die kanonische spline Funktion nullten Grades: $\sigma_0(x) = 1$, $0 \leq x \leq 1$, $\sigma_0(x) = 0$, sonst; $\tilde{\sigma} = \sigma$. Konstruiere die kanonische spline Funktion $\sigma_1(x) = \tilde{\sigma}_1(x)/\max\tilde{\sigma}_1$ ersten Grades durch die Faltung

$$\tilde{\sigma}_{k+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\sigma}_0(x - y)\tilde{\sigma}_k(y)dy$$

für $k = 0$. Konstruiere die kanonische spline Funktion $\sigma_2(x) = \tilde{\sigma}_2(x)/\max\tilde{\sigma}_2$ zweiten Grades durch die obige Faltung für $k = 1$.

31. Sei f eine Funktion, die erfüllt $f \in C[a, b]$, $f(a) * f(b) < 0$ und $f(p) = 0$ für $p \in (a, b)$. Zeige dass die Iterierten $\{p_n\}$ des Bisektionsverfahren erfüllen: $|p_n - p| \leq (b - a)/2^n$.

32. Gib ein Beispiel einer Funktion f an, die $f(a)*f(b) < 0$ erfüllt, aber das Bisektionsverfahren findet keine Nullstelle für diese Funktion.

33. Gib ein Beispiel einer Funktion $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ an, für die die Iteration $x_{k+1} = g(x_k)$ nicht konvergiert. Gib ein Beispiel einer Funktion $g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ an, für die die Iteration $x_{k+1} = g(x_k)$ nicht konvergiert.

34. Sei g eine Funktion die erfüllt $g \in C^1[a,b]$, $g([a,b]) \subset [a,b]$, $\exists k$ sodass $|g'(x)| \leq k < 1$, $\forall x \in [a,b]$. Definiere die Iterierten $p_{n+1} = g(p_n)$. Zeige dass die Iterierten erfüllen: $|p_n - p| \leq |p_0 - p_1| k^n/(1-k)$, wobei $p = g(p)$.

35. Verwende das Bisektionsverfahren für die Funktion $f(x) = e^{-x} - x$ und die Fixpunktiteration für die Funktion $g(x) = e^{-x}$, um die einzige Nullstelle von f zu finden. Vergleiche die Schnelligkeit der zwei Verfahren.

36. Erkläre warum das Newtonsche Verfahren garantiert ist, lokal zu konvergieren.

37. Erkläre warum die Konvergenzgeschwindigkeit des Newtonschen Verfahrens quadratisch ist.

38. Sei f eine glatte Funktion mit einer Nullstelle mit Multiplizität $m > 1$. Zeige dass das modifizierte Newtonsche Verfahren, $x_{k+1} = g_m(x_k)$, $g_m(x) = x - mf(x)/f'(x)$, mit Konvergenz-Ordnung 2 konvergiert.

39. Definiere $J : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ durch $J(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0\|^2 + P_\epsilon(\boldsymbol{u})$ für $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{R}^2$ und $\epsilon > 0$, wobei $P_\epsilon(\boldsymbol{u}) = \sqrt{u_1^2 + \epsilon^2} + \sqrt{u_2^2 + \epsilon^2}$ und $\boldsymbol{u} = \langle u_1, u_2 \rangle^{\mathrm{T}}$. Definiere $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ durch $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_0 - \langle u_1/\sqrt{u_1^2 + \epsilon^2}, u_2/\sqrt{u_2^2 + \epsilon^2} \rangle^{\mathrm{T}}$. Zeige dass ein Fixpunkt für $\boldsymbol{G}$ ein kritischer Punkt für J ist.

40. Sei $\boldsymbol{G}$ durch das letzte Beispiel definiert. Für $D = B_\infty(\boldsymbol{u}_0, 1) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^2 : \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0\|_\infty < 1\}$ zeige es gilt $\boldsymbol{G}(D) \subset D$.

41. Definiere $J : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ durch $J(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0\|^2 + \mu P_\epsilon(\boldsymbol{u})$ für $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{R}^2$ und $\epsilon > 0$, wobei $P_\epsilon(\boldsymbol{u}) = \sqrt{|u_1 - u_2|^2 + \epsilon^2}$ und $\boldsymbol{u} = \langle u_1, u_2 \rangle^{\mathrm{T}}$. Definiere $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ durch $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_0 - \mu \langle 1, -1 \rangle^{\mathrm{T}} (u_1 - u_2)/\sqrt{|u_1 - u_2|^2 + \epsilon^2}$. Zeige dass ein Fixpunkt für $\boldsymbol{G}$ ein kritischer Punkt für J ist.

42. Sei $\boldsymbol{G}$ durch das letzte Beispiel definiert. Für $D = B_2(\boldsymbol{u}_0, 1) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^2 : \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0\|_2 < 1\}$ zeige es gilt $\boldsymbol{G}(D) \subset D$. Zeige für $\mu < \epsilon/2$, dass der Spektralradius von $\boldsymbol{G}'$ kleiner als 1 ist.

43. Für die obige Funktion $J(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0\|^2 + \mu\sqrt{|u_1 - u_2|^2 + \epsilon^2}$ leite J' her, um das Abstiegsverfahren $\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}_{k-1})$ zur Minimierung von J explizit zu schreiben. Schreibe einen Pseudo-Code zur Implementierung dieses Verfahrens. Skizziere die Niveau-Kurven von J für $\mu = 1$, $\epsilon = 10^{-2}$ und $\boldsymbol{u}_0 = \langle 1, 1 \rangle^{\mathrm{T}}$.

44. Für die obige Funktion $J(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0\|^2 + \mu\sqrt{|u_1 - u_2|^2 + \epsilon^2}$ leite J' und J'' her, um das Newtonsche Verfahren $\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}_{k-1})$ zur Minimierung von J explizit zu schreiben. Schreibe einen Pseudo-Code zur Implementierung dieses Verfahrens.

45. Welche Eigenschaft von $\boldsymbol{N}$ im letzten Beispiel garantiert quadratische Konvergenz?

46. Zeige, Vorwärts- und Rückwärts-Differenzen bilden eine $\mathcal{O}(h)$-Approximation der ersten Ableitung, während Zentrierte Differenzen eine $\mathcal{O}(h^2)$-Approximation bildet.

47. Verwende Lagrangsche Polynome und die Werte $\{f(x_0), f(x_0 + h), f(x_0 + 2h)\}$, um eine $\mathcal{O}(h^2)$-Approximation zur ersten Ableitung $f'(x_0)$ herzuleiten.

48. Verwende die Werte $\{f(x_0-2h), f(x_0-h), f(x_0), f(x_0+h), f(x_0+2h)\}$, um eine $\mathcal{O}(h^4)$-Approximation zur zweiten Ableitung $f''(x_0)$ herzuleiten.

49. Welche Approximationen sind geeignet für Richardson Extrapolation? Gib ein explizites Beispiel an, und wende Richardson Extrapolation an.

50. Was ist der wichtigste Unterschied zwischen einer Newton-Cotes und einer Gauß-Newton Integrationsformel? Mit welcher Formel werden die Gewichte $\{\alpha_i\}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_i \alpha_i f_i$$

in den beiden Fällen bestimmt?

51. Zeige dass die Mittelpunktregel erfüllt:

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = 2hf(x_0) + \mathcal{O}(h^3).$$

Zeige den Genauigkeitsgrad der Mittelpunktregel.

52. Zeige dass die Trapezregel erfüllt:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = \frac{f(x_0)+f(x_0+h)}{2}h + \mathcal{O}(h^3).$$

Zeige den Genauigkeitsgrad der Trapezregel.

53. Zeige dass die Simpson-Regel erfüllt:

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_0+h) + f(x_0+2h)] + \mathcal{O}(h^5).$$

Zeige den Genauigkeitsgrad der Simpson-Regel.

54. Die letzten 3 Beispiele demonstieren ein allgemeines Resultat über die Parität der Anzahl der verwendeten Funktionswerte in einer Newton-Cotes Formel. Welches Resultat ist das?

55. Leite die zusammengesetzte Trapez-Formel her:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j) + f(b)\right] + \mathcal{O}(h^2)$$

wobei $x_j = a + jh$, $h = (b-a)/m$.

56. Leite die zusammengesetzte Mittelpunkt-Formel her:

$$\int_a^b f(x)dx = 2h\sum_{j=0}^{m} f(x_{2j}) + \mathcal{O}(h^2)$$

wobei $x_j = a + (j+1)h$, $h = (b-a)/(2m+2)$.

57. Verwende Romberg Integration für ein einfaches Beispiel, um die Konvergenz der letzten 2 zusammengesetzten Regeln zu beschleunigen.

58. Wie werden die Legendre und die Tchebyschev Polynome definiert?

59. Was ist der Genauigkeitsgrad einer Gauß-Legendre Integrationsformel?

60. Gib ein explizites Verfahren zur Lösung eines Anfangwertsproblems an. Gib ein implizites Verfahren zur Lösung eines Anfangwertsproblems an.

61. Schreibe das Vorwärts-Euler Verfahren zur Lösung des Anfangwertsproblems, $y' = \mu y$, $y(0) = y_0$, und zeige für dieses triviale Beispiel dass das Verfahren zur exakten Lösung konvergiert.

62. Schreibe ein lineares System $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, sodass $\boldsymbol{u} = \{u_i\}$ und $\boldsymbol{f} = \{f_i\}$ erfüllen:

$$u_i \approx u(x_i), \quad f_i \approx f(x_i), \quad x_i = ih, \quad h = 1/N, \quad i = 0, \dots, N$$

und die Funktionen u und f erfüllen das folgende Randwertproblem:

$$\begin{cases} -\mu u'' + u &= f, \quad 0 < x < 1 \\ u' &= 0, \quad x = 0, 1 \end{cases}$$