Übungsblatt 9 für Einführung in Numerische Mathematik
Sommersemester 2012

1. Für

$$J_h(\boldsymbol{u}) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N}(u_i - v_i)^2 + \mu h \sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)^2 + \epsilon^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{h}\nabla J_h(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}+\frac{\mu}{h^2}D(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}-\frac{\mu}{h^2}D(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{G}_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{u}) = (1-\alpha)\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u})$$

zeige für $\alpha \in (0,1)$, es gilt $\boldsymbol{G}_{\mathrm{A}}(D) \subset D$ für $D = B_\infty(\boldsymbol{v}, \frac{2\mu}{h})$ und

$$\|\boldsymbol{G}_{\mathrm{A}}'(\boldsymbol{u})\|_\infty \leq 1 - \alpha + \frac{4\alpha\mu}{\epsilon h^2}, \quad \forall \boldsymbol{u} \in D$$

2. Für $\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{u}) = \left[I + \frac{\mu}{h^2}D(\boldsymbol{u})\right]^{-1}\boldsymbol{v}$ zeige es gilt $\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(D) \subset D$ für $D = B_2(0, \|\boldsymbol{v}\|_2)$ und $\|\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}'(\boldsymbol{u})\|_2 \leq \frac{16\mu}{(\epsilon^3 h^4)}\|\boldsymbol{v}\|_2^2$, $\forall \boldsymbol{u} \in D$.

3. Für $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \nabla J_h(\boldsymbol{u})/h$ zeige $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u})$ ist SPD $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

4. Für $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \nabla J_h(\boldsymbol{u})/h$ zeige $\boldsymbol{G}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u})'\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ erfüllt die folgenden Bedingungen: $\exists D \subset\subset \mathbb{R}^N \ni \boldsymbol{G}_{\mathrm{N}}(D) \subset D$ und $\boldsymbol{G}_{\mathrm{N}} \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R}^{N+1})$, und $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}^\star) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{G}_{\mathrm{N}}'(\boldsymbol{u}^\star) = 0$.

5. Bonus! Erkläre warum die implizite Fixpunkt Iteration für dieses Beispiel bei weitem am besten funktioniert – möglicherweise durch eine Verbesserung der obigen Abschätzung.

6. Schreibe *als eine Gruppe* einen Code zur Minimierung von J_h, wobei die Methoden *Abstieg*, *Implizite Fixpunkt* oder *Newton* ausgewählt werden können. Die Einteilung wird während der Vorlesung gemeinsam ausgemacht.