Übungsblatt 1 für Einführung in Numerische Mathematik
Sommersemester 2012

1. Eine Funktion $u \in C^3([-1,1])$ sei gegeben.

   (a) Gib ein Beispiel einer Funktion u an, wobei $u \in C^3([-1,1])$ aber $u^{(4)}(0)$ nicht existiert. (Gelöst von Herrn Seifert.)

   (b) Wenn $u^{(4)}$ in $[-1,1]$ nicht existiert, zeige für ein fixiertes x, die Funktion

   $$F(h) = u''(x) - \frac{1}{h^2}[u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)]$$

   erfüllt $F(h) = o(h)$. (Gelöst von Frau Lepuschnitz und ergänzt von Herrn Pieber.)

2. Die Nullstelle einer unbekannten Funktion f soll gefunden werden, und man hat Zugang zu den Werten von f nur durch ein Computerprogramm. Das Computerprogramm berechnet $f(x) = \arctan[4(x - \hat{x})]$, $\hat{x} = 1 + 2^{24}$, in doppelter Genauigkeit. Ein iteratives Verfahren wird zur Bestimmung der Nullstelle verwendet, und man speichert die Approximation $x_k \approx \hat{x}$ in der $k$ten Iteration mit einfacher Genauigkeit.

   (a) Finde das engste Intervall $[x_1, x_2]$ mit $\hat{x} \in [x_1, x_2]$, wobei x_1 und x_2 mit einfacher Genauigkeit speicherbar sind. (Gelöst von Herrn Holler.)

   (b) Finde die kleinsten Toleranzen ε, δ und η, die für die Abbruchskriterien

   $$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon |x_k|, \quad |x_k - x_{k-1}| < \delta, \quad |f(x_k)| < \eta$$

   zuverlässig verwendet werden können. Welches Abbruchskriterium verlangt kein Vorwissen der Funktion? (Gelöst von Herrn Pieber.)

3. Für $N > 2$ seien die gegebenen verrauschten Daten $\boldsymbol{v} = \{v_i\}_{i=0}^N$ durch die folgenden MATLAB Befehle gegeben

```
ustar = [zeros(round(N/2),1);ones(N+1-round(N/2),1)];
v = ustar + 0.1*randn(N+1,1);
```

   wobei $\boldsymbol{u}^\star$ eine zu rekonstruierende Treppenfunktion ist. Für

   $$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$$

   $\mu > 0$ und $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^N$ schreibe einen MATLAB Code zur Lösung des linearen Gleichungssystems (mit `backslash` "\")

   $$\left[\frac{\mu}{h^2} D + I\right] \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$$

   und stelle die Ergebnisse $\{\boldsymbol{u}^\star, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\}$ auf dem Gitter

```
x = linspace(0,1,N+1);
```

   (d.h. $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$, $h = 1/N$) grafisch dar. Finde ein bestes μ, wobei die Lösung $\boldsymbol{u}$ die ideale Treppenfunktion $\boldsymbol{u}^\star$ am besten entrauscht. Finde den größten Wert von μ, wobei das System noch zuverlässig mit `backslash` gelöst werden kann, und anhand der grafisch dargestellten Ergebnisse $\{\boldsymbol{u}^\star, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\}$ formuliere eine Beziehung zwischen $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{u}$. (Gelöst von allen.)

4. Für eine gegebene Funktion v sei $J(u)$ für ausreichend glatte Funktionen u so definiert:

$$J(u) = \int_0^1 |u(x) - v(x)|^2 dx + \mu \int_0^1 \sqrt{|u'(x)|^2 + \varepsilon^2} dx$$

Seien nur die Werte $v_i = v(x_i)$ auf einem Gitter $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$, $h = 1/N$, gegeben. Sei eine Funktion u ähnlich mit Werten $u_i \approx u(x_i)$ approximiert.

(a) Mit $\boldsymbol{v} = \{v_i\}_{i=0}^N$ und $\boldsymbol{u} = \{u_i\}_{i=0}^N$ schreibe eine Approximation $J_h(\boldsymbol{u})$ für $J(u)$. (Gelöst von Frau Knittelfelder.)

(b) Gib Bedingungen der Approximationen an, wobei für ein fixiertes u gilt

$$J_h(\{u(x_i)\}_{i=0}^N) \xrightarrow{h \to 0} J(u).$$

(Gelöst von Frau Hraßnig.)

(c) Berechne $\nabla_{\boldsymbol{u}} J_h(\boldsymbol{u})$ und leite eine Optimalitätsbedingung zur Minimierung von $J_h(\boldsymbol{u})$ her. (Gelöst von Frau Wegger.)