Lernfragen für Angewandte Numerik
Sommersemester 2010

1. Für $\Omega = (0,1)$ definiere das folgende Funktional auf einer Menge von hinreichend glatten Funktionen u:
$$J(u) = \int_\Omega [|u - v|^2 + \mu |u'|^2] dx$$
Die notwendige Optimalitätsbedingung ist:
$$\begin{cases} -\mu u'' + u &= v, \quad \Omega \\ u' &= 0, \quad \partial\Omega \end{cases}$$
Approximiere das obige Funktional mit:
$$J_h(\boldsymbol{u}) = h \sum_{i=0}^{N} (u_i - v_i)^2 + \mu h \sum_{i=1}^{N} ([u_i - u_{i-1}]/h)^2$$
wobei $\boldsymbol{u} = \langle u_0, \ldots, u_N \rangle^{\mathrm{T}}$, $u_i \approx u(x_i)$, $\boldsymbol{v} = \langle v_0, \ldots, v_N \rangle^{\mathrm{T}}$, $v_i \approx v(x_i)$, $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$, $h = 1/N$. Zeige dass das für J_h minimierende $\boldsymbol{u}$ notwendigerweise erfüllen muss:
$$0 = \nabla_{\boldsymbol{u}} J_h(\boldsymbol{u}) = 2h \left[\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} - \frac{\mu}{h^2} D^{\mathrm{T}} D \boldsymbol{u} \right]$$
für die $N \times (N+1)$ Matrix
$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Zeige für eine hinreichend glatte Funktion $u(x)$, es gilt:
$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

3. Für $\Omega = (0,1)$ und $p \in [1,2]$ definiere das folgende Funktional auf einer Menge von hinreichend glatten Funktionen u, die $u|_{\partial\Omega} = 0$ erfüllen müssen:
$$J(u) = \int_\Omega [|u - v|^2 + \mu |u'|^p] dx$$
Leite die folgende Optimalitätsbedingung her:
$$\begin{cases} -\mu(|u'|^{p-2} u')' + u &= v, \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \partial\Omega \end{cases}$$
unter der Annahme, dass $u \in C^2(\bar{\Omega})$ und $v \in C^0(\bar{\Omega})$ gelten. Schreibe eine Diskretisierung für das Randwertproblems. Hinweis: Berechne die Richtungsableitung an der Stelle der gesuchten Funktion u und in die Richtung einer beliebigen Störung $\bar{u}$ (die auch $\bar{u}|_{\partial\Omega} = 0$ erfüllen muss),
$$\frac{\delta J}{\delta u}(u; \bar{u}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(u + \epsilon \bar{u}) - J(u)}{\epsilon}$$
und schreibe das Ergebnis um,
$$0 = \frac{\delta J}{\delta u}(u; \bar{u}) = \int_\Omega [\quad \ldots \quad] \bar{u} dx + [\quad \ldots \quad] \bar{u}|_{\partial\Omega}$$
sodass die Störung $\bar{u}$ strategisch ausgewählt werden kann, um eine punktweise Bedingung (Differentialgleichung) für u zu bekommen. Schreibe eine Diskretisierung durch eine Approximation der Ableitung u' oder durch eine Approximation der Integrale in J.

4. (Für dieses Beispiel wird das IBM-Gleitkommazahlmodell der Vorlesung gemeint.) Schreibe die binäre Darstellungen der Zahlen: $0.1|_{\text{hex}}$ und $0.\mathrm{B}|_{\text{hex}}$. Schreibe die binäre Darstellung der Zahl $0.7|_{\text{dez}}$. Schreibe die *single precision* Darstellung der Zahl $0.7|_{\text{dez}}$. Bestimme den relativen Fehler in der *single precision* Darstellung für die Zahl $x = 2^4 + 2^{-16}$ und für die Zahl $y = 2^4 + 2^{-18}$.

5. Die Gleitkommazahl der Vorlesung und des Lehrbuchs ist eine IBM Gleitkommazahl. Für weitere Details siehe `http://en.wikipedia.org/wiki/IBM_Floating_Point_Architecture`.

   Die IEEE *single precision* Gleitkommazahl hat das Format:

$$| \underbrace{\sigma}_{\text{V}} \underbrace{e_7 e_6 \cdots e_1 \mid e_0}_{\text{E}} \underbrace{m_1 m_2 \cdots m_7 \mid m_8 m_9 m_{10} \cdots m_{15} \mid m_{16} m_{17} m_{18} \cdots m_{23}}_{\text{M}} |$$

$$(-1)^\sigma \left(1 + \sum_{k=1}^{23} m_k 2^{-k}\right) 2^{-127+\sum_{l=0}^{7} e_l 2^l}$$

   wobei $m_0 = 1$ implizit gilt, ausser gilt $e_l = 0$, $l = 0, \ldots, 7$. Für weitere Details und die Sonderfälle siehe `http://en.wikipedia.org/wiki/Single_precision_floating-point_format`.

   Für die IEEE *single precision* Gleitkommazahl bestimme:

   a. den größten relativen Fehler der Darstellung,
   b. die kleinste darstellbare (positive) Zahl, und
   c. die größte darstellbare (positive) Zahl.

   Führe folgende Rechnung in der IBM und in der IEEE Darstellungsform aus:

$$(2.15 \times 10^{12}) - (1.25 \times 10^{-5})$$

   Wiederhole das letzte Beispiel mit dem IEEE Gleitkommazahlmodell.

   Für Details über *double precision* siehe

   `http://en.wikipedia.org/wiki/IBM_Floating_Point_Architecture`

   für die IBM Darstellungsform und

   `http://en.wikipedia.org/wiki/Double_precision_floating-point_format`

   für die IEEE Darstellungsform.

6. Die Funktion $f(x)$ ist steigend und hat die Nullstelle $x_0 = 2^7 + 2^{6-p}$, $p = 23$. Finde x_1 und x_2, die $x_0 \in (x_1, x_2)$ erfüllen, und die in IBM *single precision* Genauigkeit am nächsten zu x_0 liegen. Bestimme die kleinsten δ, η, ϵ sodass die folgenden Abbruchskriterien funktionieren können:

$$|x_{k+1} - x_k| \le \delta, \quad |x_{k+1} - x_k| \le \eta |x_k|, \quad |f(x_k)| \le \epsilon$$

   wobei die Folge $\{x_k\}$ mit einem Verfahren berechnet wird, die zur Approximation einer Nullstelle geeignet ist.

7. Gib ein Beispiel einer Rechnung eines Skalarproduktes, in der Verlust von signifanten Ziffern stattfindet.

8. Gib ein explizites Beispiel von einem Abbruchsfehler und ein explizites Beispiel von einem Rundungsfehler.

9. Bestimme die Konvergenzgeschwindigkeit von $\{\alpha_n = (n+3)/n^3\}$, und beweise das Ergebnis.

10. Zeige für den folgenden Algorithmus der Gaußschen Elimination,

```
for k=1,2,...,n-1
    for i=k+1,...,n
        A_ik = A_ik / A_kk
        for j=k+1,...,n+1
            A_ij = A_ij - A_ik * A_kj
        end
    end
end
```

es gibt $\mathcal{O}(n^3)$ Multiplikationen (und Subtraktionen). Bemerke, es gibt aber nur $\mathcal{O}(n^2)$ Divisionen. Zeige für die Rückwärts-Substitution,

```
x_n = A_n,n+1 / A_nn
for i=n-1,...,1
    sum = 0
    for j=i+1,...,n
        sum = sum + A_ij * x_j
    end
    x_i = [A_i,n+1 - sum] / A_ii
end
```

es gibt $\mathcal{O}(n^2)$ Multiplikationen (und Subtraktionen). Bemerke, es gibt aber nur $\mathcal{O}(n)$ Divisionen. Zeige für die Vorwärts-Substitution,

```
x_1 = A_1,n+1 / A_11
for i=2,...,n
    sum = 0
    for j=1,...,i-1
        sum = sum + A_ij * x_j
    end
    x_i = [A_i,n+1 - sum] / A_ii
end
```

es gibt $\mathcal{O}(n^2)$ Multiplikationen (und Subtraktionen). Bemerke, es gibt aber nur $\mathcal{O}(n)$ Divisionen.

11. Schätze die Anzahl der Operationen ab, die notwendig wären, um die klassische Formel für ein Determinante zu implementieren.

12. Wie viele Operationen kostet die Matrix-Multiplikation AB, wobei $A \in \boldsymbol{R}^{l\times m}$ und $B \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$? Wie viele Operationen kostet die Zerlegung $A = LU$ (nicht die Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$), wenn $A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ voll besetzt ist? Wie viele Operationen kostet die Zerlegung $A = LU$ wenn $A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ die Bandbreite m hat?

13. Sei $\{A^{(k)}\}$ die Folge von Matrizen, die durch Gaußsche Elimination berechnet werden, d.h. $A^{(1)} = A$, $A^{(2)} = M^{(1)}A^{(1)}$, …, $A^{(k+1)} = M^{(k)}A^{(k)}$, wobei jede Matrix $M^{(k)}$ durch die Multiplikatoren gegeben ist:

$$M^{(1)} = \left[\begin{array}{r|c} 1 & 0 \\ \hline -m_{21} & \\ \vdots & I_{n-1} \\ -m_{n1} & \end{array}\right] \quad M^{(2)} = \left[\begin{array}{cr|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & -m_{32} & \\ \vdots & \vdots & I_{n-2} \\ 0 & -m_{n2} & \end{array}\right] \quad \cdots$$

Hier ist I_k die k-dimensionale Einheitsmatrix. Zeige:

$$M^{(1)-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & 0 & \\ \hline m_{21} & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ m_{n1} & & & \end{array}\right] \quad M^{(2)-1} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & & 0 & \\ 0 & 1 & & & \\ \hline 0 & m_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{n-2} & \\ 0 & m_{n2} & & & \end{array}\right] \quad \cdots$$

und deswegen für $U = A^{(n)} = M^{(n-1)} \cdots M^{(1)} A$ gilt $LU = A$ für eine Oberedreicksmatrix U und eine Unteredreiecksmatrix $L = M^{(1)-1} \cdots M^{(n-1)-1}$.

14. Zeige für das lineare System

$$\begin{bmatrix} 0.003000 & 59.14 \\ 5.291 & -6.130 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59.17 \\ 46.78 \end{bmatrix}$$

wenn die Zeilen getauscht werden, bekommt man mit 4-Ziffer Arithmetik die Lösung: $x_1 = 10.00$, $x_2 = 1.001$.

15. Gib ein Beispiel eines lösbaren linearen Gleichungssystems an, für das eine *pivoting* Strategie notwendig ist; ansonsten funktioniert Gaußsche Elimination nicht. Für dieses Beispiel schreibe die Zerlegung $PA = LU$, wobei P eine Permuationsmatrix ist, und L und U sind wie im letzten Beispiel.

16. Konstruiere ein Beispiel in dem eine totale Pivotsuche vorteilhaft wäre.

17. Die Matrix A heisst *banded* wenn die *Bandbreite*

$$\begin{aligned} \text{Bandbreite}(A) &= \max\{i - j : a_{ij} \neq 0, 1 \leq j < i \leq N\} \\ &+ \max\{j - i : a_{ij} \neq 0, 1 \leq i < j \leq N\} + 1 \end{aligned}$$

wesentlich kleiner als ihr Maximum ist. Ein *banded* Speicherformat für $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$ ist:

$$A_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,1+m} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2,2+m} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots & a_{3,3+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \cdots & a_{m+1,m+1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m+1,m+1+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-m,N-2m} & \cdots & \cdots & a_{N-m,N-m} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{N-m,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-2,N-m-2} & a_{N-2,N-m-1} & \vdots & a_{N-2,N-2} & a_{N-2,N-1} & a_{N-2,N} & \vdots & 0 \\ a_{N-1,N-m-1} & a_{N-1,N-m} & \vdots & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} & \vdots & \vdots & 0 \\ a_{N,N-m} & a_{N,N-m+1} & \vdots & a_{NN} & 0 & \vdots & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

wobei $\text{Bandbreite}(A) = 2m + 1$. Schreibe den Gauß-Elimination Algorithmus bezüglich A_{b} so um, dass Operationen minimiert werden.

18. Gib ein (anwendungsorientiertes) Beispiel einer Matrix an, die streng diagonal dominant ist. Zeige dass sie streng diagonal dominant ist. Welches Verfahren ist geeignet, um Systeme mit dieser Matrix zu lösen?

19. Gib ein (anwendungsorientiertes) Beispiel einer Matrix an, die symmetrisch positiv definit ist. Zeige dass sie symmetrisch positiv definit ist. Welches Verfahren ist geeignet, um Systeme mit dieser Matrix zu lösen?

20. Zeige dass die Matrix in Formel (19) vom Skriptum `http://math.uni-graz.at/keeling/mip-probs.pdf` SPD ist.

21. Zeige dass die ℓ_1−Norm und die ℓ_2-Norm in $\boldsymbol{R}^n$ äquivalent sind.

22. Zeige dass eine *induzierte Matrixnorm* eine echte Matrixnorm ist.

23. Zeige dass die Frobenius-Matrixnorm eine echte Matrixnorm ist. Zeige dass sie mit der ℓ_2−Vektornorm kompatibel ist.

24. Mit der Äquivalenz von Normen beweise dass $\lim_{k\to\infty} x_k = x \in \boldsymbol{R}^n$ gilt genau dann wenn $\lim_{k\to\infty}(x_k)_i = x_i$ gilt.

25. Gegeben sei eine Diskretisierung $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{h^2}+1 & -\frac{\mu}{h^2} & & & 0 \\ -\frac{\mu}{h^2} & \frac{2\mu}{h^2}+1 & -\frac{\mu}{h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{\mu}{h^2} & \frac{2\mu}{h^2}+1 & -\frac{\mu}{h^2} \\ 0 & & & -\frac{\mu}{h^2} & \frac{\mu}{h^2}+1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{bmatrix}$$

$u_i \approx u(x_i)$, $v_i \approx v(x_i)$, $x_i = i/N$, $i = 0, 1, \dots, N$, zum Problem

$$\begin{cases} -\mu u''(x) + u(x) &= v(x), \quad x \in (0,1) \\ u'(x) &= 0, \qquad x \in \{0,1\} \end{cases}$$

Sei T_J die Iterationsmatrix für die Jacobi Methode. Zeige dass $\rho(T_\text{J}) < 1$ gilt.

26. Erkläre den Einfluss von p (besonders $p = 1$ und $p = 2$) in der Schätzung der Parameter $q = \langle q_1, \dots, q_m\rangle$ durch Minimierung von $E(q) = \sum_{i=1}^n |f(x_i;q) - f_i|^p$ für gegebene Daten $\{(x_i, f_i)\}_{i=1}^n$ und ein empirisches Modell $f(x;q)$.

27. Zeige dass die Frobenius-Matrixnorm mit der ℓ_2-Vektornorm kompatibel ist.

28. Zeige, dass der Spektralradius einer Matrix nie größer als der Wert einer induzierten Norm dieser Matrix ist.

29. Gib ein Beispiel einer Matrix A an, für die die Folge $x_{k+1} = Ax_k$ konvergiert. Gib ein Beispiel einer Matrix B an, für die die Folge $y_{k+1} = By_k$ nicht konvergiert. Welche Eigenschaft von A garantiert Konvergenz, und welche Eigenschaft von B verhindert Konvergenz?

30. Finde die Iterationsmatrix T_SGS für das symmetrische Gauß-Seidel Verfahren.

31. Seien B_J, B_GS und B_SGS die approximierten Inversen für die Jacobi, Gauß-Seidel und Symmetrisch Gauß-Seidel Methoden beziehungsweise. Leite diese explizit her, und zeige dass B_J und B_SGS symmetrisch sind während B_GS nicht symmetrisch ist.

32. Für das Beispiel,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-\epsilon \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = Ax,$$

skizziere die Menge von $\tilde{x} \in \boldsymbol{R}^2$ die erfüllen:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_2}{\|x\|_2} = \kappa(A) \frac{\|b - A\tilde{x}\|_2}{\|b\|_2}$$

für die Werte $\epsilon = 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$.

33. Konstruiere ein lineares System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ und ein $\tilde{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{x}$, wobei Gleichheit in der obigen Fehlerabschätzung gilt.

34. Bestimme eine Matrix für die (a) Jacobi, (b) Gauß-Seidel und (c) symmetrisch Gauß-Seidel Verfahren, die einen Spektralradius kleiner als 1 haben muss, um Konvergenz der Iterationen zu garantieren.

35. Gib ein (anwendungsorientiertes) Beispiel einer Matrix an, für die die SOR-Methode für jedes $\omega \in (0, 2)$ konvergiert. Zeige dass die Konvergenz garantiert ist.

36. Gib ein Beispiel einer extrem großen Matrix A an, und berechne eine beschränkte Menge in der sich die Eigenwerte von A befinden, (notwendigerweise) ohne die Eigenwerte explizit auszurechnen.

37. Berechne die Konditionszahlen $\kappa_1(A)$, $\kappa_2(A)$, und $\kappa_\infty(A)$ für die Matrix,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sei $\tilde{b} = \langle 7/2, 5/2 \rangle^{\mathrm{T}} \approx b$ mit Messfehler gegeben, wobei $b = Ax$ und x unbekannt sind, aber die Normen sind so geschätzt worden: $\|b\|_2 \geq 3$, $\|x\|_2 \leq 2$. Wie weit weg von der genauen Lösung x könnte $\tilde{x} = \langle 3/2, 1/2 \rangle^{\mathrm{T}}$ liegen?

38. Gib ein Beispiel einer Matrix A an, für die die Vektoriteration zum Spektralradius von A konvergiert. Welche Eigenschaften von A garantieren diese Konvergenz?

39. Zeige dass Vektoriteration angewendet auf $(A - qI)^{-1}$ liefert $\mu = (\lambda_k - q)^{-1}$ wobei $|\lambda_k - q| < |\lambda_i - q|$, $i \neq k$.

40. Zeige, es gilt $\theta = \frac{1}{2}\|u\|_2^2$ im Householder Algorithmus. Gib ein explizites Beispiel an, in dem mit $\tau = -\mathrm{sign}(v_1)\|v\|_2$ ein großer Verlust von Ziffern stattfindet.

41. Zeige für den QR-Algorithmus, $A_k = Q_k R_k$, $A_{k+1} = R_k Q_k$, $A_1 = A$, dass jede Matrix A_k zu A ähnlich ist.

42. Für einen gegebenen Vektor $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, $n > m > 1$, kontruiere eine Matrix H, wobei $\boldsymbol{y} = H\boldsymbol{x}$ erfüllt $y_i = 0$, $i = m, \ldots, n$.

43. Für einen gegebenen Vektor $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, $n > m > 1$, mit $x_i = 0$, $i = m + 1, \ldots, n$, kontruiere eine Matrix R, wobei $\boldsymbol{y} = H\boldsymbol{x}$ erfüllt $y_i = 0$, $i = m, \ldots, n$.

44. Zeige für den QR-Algorithmus, $A_k = Q_k R_k$, $A_{k+1} = R_k Q_k$, $A_1 = A$, wenn A_k tridiagonal ist, ist A_{k+1} auch tridiagonal.

45. Für $A \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$ und $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ soll $\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2$ minimiert werden. Die notwendige Optimalitätsbedingung ist durch die normalen Gleichungen $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ gegeben. Leite diese her.

46. Seien $A \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$, $P \in O(m)$ und $q \in O(n)$. Zeige dass A und PAQ die selben Singulärwerte haben.

47. Seien die Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ gegeben. Zeige dass die Gerade $y = a^*x + b^*$, die die Summe der quadrierten Abstände zu den Daten minimimert, durch $a^* = (\overline{xy} - \overline{x}\overline{y})/(\overline{x^2} - \overline{x}^2)$ und $b^* = \overline{y} - a^*\overline{x}$ gegeben ist.

48. Seien die Daten $\{(-1,1),(0,0),(1,1)\}$ gegeben. Finde die quadratische Funktion, die die Summe der quadrierten Abstände zu den Daten minimimert. Wiederhole die Rechnung für die Daten $\{(-2,0),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,0)\}$.

49. Sei $A \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$, $m, n > 1$, eine Matrix mit nur einem positiven Singulärwert. Für $b \in \boldsymbol{R}^m$ schreibe die Lösung $x = \text{argmin}||Ax - b||_{\ell_2}^2$ mit minimaler ℓ_2-Norm.

50. Im Algorithmus zur Berechung der Singulärwerte der Matrix $A \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, sei B eine obere bidiagonale Matrix, wobei $\left[\begin{array}{c} B \\ 0 \end{array}\right] = PAQ$, $P \in O(m)$, $Q \in O(n)$ und setzt $B_1 = B$. Sei $B_l^{\mathrm{T}} B_l = Q_l B_l$ eine QR-Zerlegung. Zeige dass jede Matrix B_l eine obere bidiagonale Matrix ist.

51. Die 3 Eckpunkte eines Dreiecks $\{(1,1,0),(2,1,0),(1,1,1)\} = \{x_i\}_{i=1}^3$ sollen zu den 3 Eckpunkten des Dreiecks $\{(5,1,5),(7,8,9),(6,5,10)\} = \{y_i\}_{i=1}^3$ durch eine affine Transformation abgebildet werden. Definiere die Matrizen $X = [x_1, x_2, x_3]$, $\overline{x} = (x_1 + x_2 + x_3)/3$, $\overline{X} = [\overline{x}, \overline{x}, \overline{x}]$, $Y = [y_1, y_2, y_3]$, $\overline{y} = (y_1 + y_2 + y_3)/3$ und $\overline{Y} = [\overline{y}, \overline{y}, \overline{y}]$. Für die affine Transformation $y = \overline{y} + A * (x - \overline{x})$ bestimme die Matrix A sodass $\|A * (X - \overline{X}) - (Y - \overline{Y})\|_{\ell_2}^2 = \min$. Hinweis: Mit der Singulärwertzerlegung $(X - \overline{X}) = USV^{\mathrm{T}}$ berechne $A = (Y - \overline{Y})VS^+U^{\mathrm{T}}$.

52. Mit Hilfe der Lagranschen Polynome schreibe ein Polynom $P(x)$ dritten Grades, das erfüllt: $P(-4) = 23$, $P(-2) = 101$, $P(1) = 73$, $P(5) = 11$.

53. Mit Hilfe der dividierten Differenzen schreibe ein Polynom $P(x)$ dritten Grades, das erfüllt: $P(-4) = 23$, $P(-2) = 101$, $P(1) = 73$, $P(5) = 11$.

54. Zeige dass die Hermiteschen Funktionen H_{nj} und $\hat{H}_{nj}$ erfüllen: $H_{nj}(x_i) = \delta_{ij}$, $H'_{nj}(x_i) = 0$, erfüllen: $\hat{H}_{nj}(x_i) = 0$ und $H'_{nj}(x_i) = \delta_{ij}$. Zeige dass die Hermitesche interpolierende Funktion $H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n f_j H_{nj}(x) + g_j \hat{H}_{nj}(x)$ erfüllt: $H_{2n+1}(x_i) = f_i$, $H'_{2n+1}(x_i) = g_i$.

55. Die (unbekannte) Funktion $f(x) = x^2/(1 + 20x^2)$ soll von einer verfügbaren Abtastung geschätzt werden. In den folgenden seien $n = 10$ und $m = 100$.

    (a) Bestimme ein Polynom P $n$ten Grades, das erfüllt

    $$P(x_k) = f(x_k), \qquad x_k = -1 + 2k/n, \quad k = 0, \ldots, n$$

    unter der Annahme dass die Werte $f(x_k)$ in den gleichmäßig verteilten Stutzstellen x_k verfügbar sind.

    (b) Bestimme ein Polynom Q $n$ten Grades, das erfüllt

    $$Q(t_j) = f(t_j), \qquad t_j = \cos((j + 1/2) * \pi/(n + 1)), \quad j = 0, \ldots, n$$

    unter der Annahme dass die Werte $f(t_j)$ in den Nullstellen t_j des Tchebyshev'chen Polynoms $T_n(t) = \cos(n \cos^{-1}(t))$ verfügbar sind.

    (c) Bestimme ein Polynom R $n$ten Grades, das das Funktional minimiert:

    $$\sum_{i=0}^{m} |R(y_i) - f(y_i)|^2, \qquad y_i = -1 + 2i/m, \quad i = 0, \ldots, m$$

    unter der Annahme dass die Werte $f(y_i)$ in den gleichmäßig verteilten Stutzstellen y_i verfügbar sind.

Stelle P, Q, R und f gemeinsam grafisch dar.

56. Seien die Daten $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^2 = \{(-1,1),(0,0),(1,1)\}$ gegeben. Verwende Neville's Algorithmus, um $P_{012}(x)$ in $x = 0.5$ auszuwerten. Berechne das Polynom $P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$, das erfüllt $P_2(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, 2$.

57. Für gegebene Knoten $\{(x_i\}_{i=0}^N$ seien $L_{N,i}(x)$ die Lagrange interpolierenden Polynome, die erfüllen $L_{N,i}(x_j) = \delta_{ij}$, $0 \le i, j \le N$. Definiere $H_{N,i}(x) = [1 - 2(x - x_i)L'_{N,i}(x_i)]L^2_{N,i}(x)$ und $\hat{H}_{N,i}(x) = (x - x_i)L^2_{N,i}(x)$. Zeige $H_{N,i}(x_j) = \delta_{ij}$, $H'_{N,i}(x_j) = 0$, $\hat{H}_{N,i}(x_j) = 0$ und $\hat{H}'_{N,i}(x_j) = \delta_{ij}$. Zeige, $H_{2N+1}(x) = \sum_{i=0}^N [f_i H_{N,i}(x) + \hat{f}_i \hat{H}_{N,i}(x)]$ erfüllt $H_{2N+1}(x_j) = f_j$ und $H'_{2N+1}(x_j) = \hat{f}_j$.

58. Gegeben seien Knoten $\{x_i\}_{i=0}^n$. Konstruiere Funktionen $\{\phi_i\}$ und $\{\psi_i\}$, die in jedem Teilintervall $\{[x_i, x_{i+1}]\}_{i=0}^{n-1}$ kubisch sind und erfüllen: $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $\phi'_i(x_j) = 0$, $\psi_i(x_j) = 0$ und $\psi'_i(x_j) = \delta_{ij}$. Zeige dass die Hermitesche interpolierende Funktion $H(x) = \sum_{j=0}^n f_j\phi_j(x) + \hat{f}_j\psi_j(x)$ erfüllt: $H(x_i) = f_i$, $H'(x_i) = \hat{f}_i$.

59. Definiere die kanonische spline Funktion nullten Grades: $\pi_0(x) = 1$, $0 \le x \le 1$, $\pi_0(x) = 0$, sonst. Konstruiere die kanonische spline Funktion $\pi_1(x)$ ersten Grades durch die Faltung

$$\pi_{k+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi_0(x - y)\pi_k(y)dy$$

für $k = 0$. Konstruiere die kanonische spline Funktion $\pi_2(x)$ zweiten Grades durch die obige Faltung für $k = 1$.

60. Die Funktion $u(x)$ soll mit den Werten $\{u(x_i) : i = 0, \ldots, N\}$, $x_i = ih$, $h = 1/N$, durch die Spline-Basis $\{s_i(x) : i = 0, \ldots, N\}$, $s_i(x) = \pi_1(x/h - i + 1)$, stückweise linear interpoliert werden:

$$u(x) \approx \sum_{i=0}^N a_i s_i(x)$$

Bestimme die Koeffizienten $\{a_i : i = 0, \ldots, N\}$.

61. Gegeben seien Daten $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^N$. Seien $\{s_i\}_{i=-3}^{N-1}$ die kubischen Spline Funktionen, $s_i \in C^2(\boldsymbol{R})$, $s_i(x_j) = 0$, $j < i + 1$, $s_i(x_{i+1}) \ne 0$, $s_i(x_{i+2}) = 1$, $s_i(x_{i+3}) \ne 0$, $s_i(x_j) = 0$, $j > i + 3$. Die Koeffizienten $\{\alpha_i\}_{i=-3}^N$ sollen bestimmt werden, sodass die Spline Funktion $S(x) = \sum_{i=-3}^{N-1} \alpha_i s_i(x)$ erfüllt $f_j = S(x_j)$, $j = -1, \ldots, N + 1$, wobei $f - 1 = 2f_0 - f_1$ und $f_{N+1} = 2f_N - f_{N-1}$. Zeige dass die Matrix des zu lösenden Systems tridiagonal ist.

62. Gib ein physikalisches Beispiel einer Funktion $f(x)$, die erfüllt $f(a) < y < f(b)$, $a < b$, obwohl es kein $x \in (a, b)$ gibt, in dem gilt $f(x) = y$.

63. Sei f eine Funktion, die erfüllt $f \in C[a, b]$, $f(a) * f(b) < 0$ und $f(p) = 0$ für $p \in (a, b)$. Zeige dass die Iterierten $\{p_n\}$ des Bisektionsverfahren erfüllen: $|p_n - p| \le (b - a)/2^n$.

64. Gib ein Beispiel einer Funktion f an, die $f(a) * f(b) < 0$ erfüllt, aber das Bisektionsverfahren findet keine Nullstelle für diese Funktion.

65. Gib ein Beispiel einer Funktion $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ an, für die die Iteration $x_{k+1} = g(x_k)$ nicht konvergiert. Gib ein Beispiel einer Funktion $g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ an, für die die Iteration $x_{k+1} = g(x_k)$ nicht konvergiert.

66. Sei g eine Funktion die erfüllt $g \in C^1[a, b]$, $g([a, b]) \subset [a, b]$, $\exists k$ sodass $|g'(x)| \le k < 1$, $\forall x \in [a, b]$. Definiere die Iterierten $p_{n+1} = g(p_n)$. Zeige dass die Iterierten erfüllen: $|p_n - p| \le |p_0 - p_1|k^n/(1 - k)$, wobei $p = g(p)$.

67. Um die einzige Nullstelle von der Funktion $f(x) = x(1 - e^{r(1-x)})$, $r \in [1, 2]$, zu finden, verwende (a) das Bisektionsverfahren, (b) eine Fixpunktiteration $x_{k+1} = g(x_k)$ mit $g(x) = xe^{r(1-x)}$, (c) das Newtonsche Verfahren und (d) das Sekant-Verfahren. Vergleiche die Schnelligkeit der Verfahren in Abhängigkeit von r.

68. Erkläre warum das Newtonsche Verfahren garantiert ist, lokal zu konvergieren.

69. Erkläre warum die Konvergenzgeschwindigkeit des Newtonschen Verfahrens quadratisch ist.

70. Sei f eine glatte Funktion mit einer Nullstelle mit Multiplizität $m > 1$. Zeige dass das modifizierte Newtonsche Verfahren, $x_{k+1} = g_m(x_k)$, $g_m(x) = x - mf(x)/f'(x)$, mit Konvergenz-Ordnung 2 konvergiert. (Die Rechnung für den Fall $m = 2$ reicht, aber ein allgemeiner Beweis wäre viel schöner.)

71. Definiere

$$J(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}(u_i - v_i)^2 + \mu \sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)^2 + \epsilon^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

wobei $\boldsymbol{u} = \langle u_0, \ldots, u_N\rangle^{\mathrm{T}}$ and $\boldsymbol{v} = \langle v_0, \ldots, v_N\rangle^{\mathrm{T}}$. Mit $\delta_k = [((u_k - u_{k-1})/h)^2 + \epsilon^2]^{\frac{1}{2}}$ Definiere

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} - \frac{\mu}{h^2}A(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}, \quad A(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} \delta_1 & -\delta_1 & & & & \\ -\delta_1 & \delta_1 + \delta_2 & -\delta_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -\delta_{N-1} & \delta_{N-1}\delta_N & -\delta_N \\ & & & -\delta_N & -\delta_N \end{bmatrix}$$

Zeige dass ein Fixpunkt für $\boldsymbol{G}$ ein kritischer Punkt für J ist.

72. Sei $\boldsymbol{G}$ durch das letzte Beispiel definiert. Für $D = B_\infty(\boldsymbol{v}, 2\mu/h)$ zeige es gilt $\boldsymbol{G}(D) \subset D$. Zeige, es gilt $\|\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{u})\|_\infty \leq \frac{4\mu}{\epsilon h^2}$, $\forall \boldsymbol{u} \in D$. Für $4\mu < \epsilon h^2$ schreibe eine Fehlerabschätzung der Iteration $\boldsymbol{u}_l = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_{l-1})$.

73. Sei $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \nabla J(\boldsymbol{u})$ für das obige J. Zeige dass $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u})$ SPD ist.

74. Für das Abstiegsverfahren $\boldsymbol{u}_{l+1} = \boldsymbol{u}_l - \alpha\nabla J(\boldsymbol{u}_l) = (1-\alpha)\boldsymbol{u}_l + \boldsymbol{v} - \alpha\mu/h^2 A(\boldsymbol{u}_l)\boldsymbol{u}_l =: \boldsymbol{G}_\alpha(\boldsymbol{u}_l)$ mit $\alpha \in (0, 1)$, zeige dass $\boldsymbol{G}_\alpha(D) \subset D$ für $D = B_\infty(\boldsymbol{v}, 2\mu/h)$. Für $1 + \frac{2\mu}{\epsilon h} < 1/\alpha$ zeige $\|\boldsymbol{G}'_\alpha(\boldsymbol{u})\| \leq 1 - \alpha < 1$, $\forall \boldsymbol{u} \in D$. Für $1 + \frac{2\mu}{\epsilon h} < 1/\alpha$ zeige dass der Spektralradius von $\boldsymbol{G}'_\alpha$ kleiner als 1 ist.

75. Sei $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \nabla J(\boldsymbol{u})$ für das obige J. Welche Eigenschaft der Funktion $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - [\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u})]^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ garantiert quadratische Konvergenz der Fixpunktiteration $\boldsymbol{u}_l = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{u}_{l-1})$?

76. Zeige, Vorwärts- und Rückwärts-Differenzen bilden eine $\mathcal{O}(h)$-Approximation der ersten Ableitung, während Zentrierte Differenzen eine $\mathcal{O}(h^2)$-Approximation bildet.

77. Verwende Lagrangsche Polynome und die Werte $\{f(x_0), f(x_0+h), f(x_0+2h)\}$, um eine $\mathcal{O}(h^2)$-Approximation zur ersten Ableitung $f'(x_0)$ herzuleiten.

78. Verwende die Werte $\{f(x_0 - 2h), f(x_0 - h), f(x_0), f(x_0 + h), f(x_0 + 2h)\}$, um eine $\mathcal{O}(h^4)$-Approximation zur zweiten Ableitung $f''(x_0)$ herzuleiten.

79. Angenommen gilt $M = N_1(0) = N_1(h) + a_n h^n + \mathcal{O}(h^m)$. Zeige dass die Richardson Extrapolation Formel $N_2(h) = N_1(h/2) + [N_1(h/2) - N_1(h)]/[2^n - 1]$ erfüllt $N_2(h) = M + \mathcal{O}(h^m)$.

80. Was ist der wichtigste Unterschied zwischen einer Newton-Cotes und einer Gauß-Newton Integrationsformel? Mit welcher Formel werden die Gewichte $\{\alpha_i\}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_i \alpha_i f_i$$

in den beiden Fällen bestimmt?

81. Zeige dass die Mittelpunktregel erfüllt:

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = 2hf(x_0) + \mathcal{O}(h^3).$$

Zeige den Genauigkeitsgrad der Mittelpunktregel.

82. Zeige dass die Trapezregel erfüllt:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = \frac{f(x_0) + f(x_0+h)}{2}h + \mathcal{O}(h^3).$$

Zeige den Genauigkeitsgrad der Trapezregel.

83. Zeige dass die Simpson-Regel erfüllt:

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_0+h) + f(x_0+2h)] + \mathcal{O}(h^5).$$

Zeige den Genauigkeitsgrad der Simpson-Regel.

84. Die letzten 3 Beispiele demonstieren ein allgemeines Resultat über die Parität der Anzahl der verwendeten Funktionswerte in einer Newton-Cotes Formel. Welches Resultat ist das?

85. Leite die zusammengesetzte Trapez-Formel her:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j) + f(b)\right] + \mathcal{O}(h^2)$$

wobei $x_j = a + jh$, $h = (b-a)/m$.

86. Leite die zusammengesetzte Mittelpunkt-Formel her:

$$\int_a^b f(x)dx = 2h\sum_{j=0}^{m} f(x_{2j}) + \mathcal{O}(h^2)$$

wobei $x_j = a + (j+1)h$, $h = (b-a)/(2m+2)$.

87. Verwende Romberg Integration für ein einfaches Beispiel, um die Konvergenz der letzten 2 zusammengesetzten Regeln zu beschleunigen.

88. Wie werden die Legendre und die Tchebyschev Polynome definiert?

89. Was ist der Genauigkeitsgrad einer Gauß-Legendre Integrationsformel?

90. Gib ein explizites Verfahren zur Lösung eines Anfangwertsproblems an. Gib ein implizites Verfahren zur Lösung eines Anfangwertsproblems an.

91. Schreibe das Vorwärts-Euler Verfahren zur Lösung des Anfangwertsproblems, $y' = \mu y$, $y(0) = y_0$, und zeige für dieses triviale Beispiel dass das Verfahren zur exakten Lösung konvergiert.

92. Zeige für das Anfangswertproblem,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{u}' & = & A\boldsymbol{u}, \quad t > 0 \\ \boldsymbol{u}(0) & = & \boldsymbol{u}_0 \end{array}\right. \qquad A = -\frac{\kappa}{h^2}D, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

die Iterierten $\boldsymbol{u}_k = [1 - \frac{\kappa\tau}{h^2}D]\boldsymbol{u}_{k-1}$ des Vorwärts-Eulerschen Verfahren erfüllen $\|\boldsymbol{u}_k\|_2 \le \|\boldsymbol{u}_{k-1}\|_2$ wenn $\tau \le h^2/(2\kappa)$.

93. Zeige für das obige Anfangswertproblem, die Iterierten $[1 + \frac{\kappa\tau}{h^2} D]\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{u}_{k-1}$ des Rückwärts-Eulerschen Verfahren erfüllen unbedingt $\|\boldsymbol{u}_k\|_2 \leq \|\boldsymbol{u}_{k-1}\|_2$.

94. Schreibe das Crank-Nicholson Verfahren als Runge-Kutta Verfahren um.

95. Schreibe ein lineares System $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, sodass $\boldsymbol{u} = \{u_i\}$ und $\boldsymbol{f} = \{f_i\}$ erfüllen:

$$u_i \approx u(x_i), \quad f_i \approx f(x_i), \quad x_i = ih, \quad h = 1/N, \quad i = 0, \dots, N$$

und die Funktionen u und f erfüllen das folgende Randwertproblem:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\mu u'' + u & = & f, \quad 0 < x < 1 \\ u' & = & 0, \quad x = 0, 1 \end{array} \right.$$