Proseminar Numerische Mathematik I, SS 04
12. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 22. Juni 2004

---

1. Seien $a \le t_0 < t_1, \ldots < t_n \le b$ paarweise verschiedene Knoten und L_{in} die zugehörigen Lagrange-Polynome. Dann ist die absolute Kondition κ_{abs} der Polynominterpolation
$$\phi = P(\cdot|t_0, \ldots, t_n) : C[a,b] \to \mathbb{P}_n$$
bezüglich der Supremumsnorm die Lebesgue-Konstante
$$\kappa_{abs} = \Lambda_n := \max_{t \in [a,b]} \sum_{i=0}^{n} |L_{in}(t)|$$
für die Knoten $t_0, \ldots, t_n$. $\Lambda_n(K, I)$ bezeichne die Lebesguekonstante bezüglich der Knotenmenge K auf dem Intervall I. Seien $K = \{t_0, \ldots, t_n\} \subset I = [a,b]$ paarweise verschiedene Knoten. Die Affintransformation
$$\chi : I \to I_0 = [-1, 1], \quad t \to \frac{2t - a - b}{b - a}$$
dieses Intervalls auf das Einheitsintervall I_0 bilde die Knotenmenge K auf die Knotenmenge $K_0 = \chi(K)$ ab. Zeigen Sie, daß die Lebesguekonstante invariant unter dieser Transformation ist, d.h.
$$\Lambda_n(K, I) = \Lambda_n(K_0, I_0).$$

2. Seien $\{\ell_i(x)\}$ und $\{\ell_j(y)\}$ die stückweise lineare Basisfunktionen, die bezüglich der Gitter $\Delta_x = \{x_i\}$ und $\Delta_y = \{y_j\}$ die folgenden erfüllen:
$$\ell_i(x_k) = \delta_{ik}, \quad \ell_j(y_l) = \delta_{jl}.$$
Dann werden Interpolanten für $f(x)$, $g(y)$ und $h(x,y)$ wie folgt definiert:
$$\vartheta_{L(\Delta_x)} f = \sum_i f(x_i)\ell_i(x), \quad \vartheta_{L(\Delta_y)} g = \sum_j g(y_j)\ell_j(y), \quad \vartheta_{L(\rho)} h = \sum_{i,j} h(x_i, y_j)\ell_i(x)\ell_j(y)$$
wobei $\rho = \Delta_x \otimes \Delta_y$ und $L(\rho) = L(\Delta_x) \otimes L(\Delta_y)$ gelten. Zeigen Sie:
$$\vartheta_{L(\rho)} h = \vartheta_{L(\Delta_x)} \vartheta_{L(\Delta_y)} h = \vartheta_{L(\Delta_y)} \vartheta_{L(\Delta_x)} h.$$

3. Sei $f \in PC^{1,\infty}([a,b])$. Für ein gegebenes Gitter $x_i = a + (i-1)h$, $h = (b-a)/(N-1)$, $1 \le i \le N$, definieren Sie den stückweise konstanten Interpolant von f wie folgt:
$$\tilde{f}(x) = f((x_{i-1} + x_i)/2), \quad x \in [x_{i-1}, x_i), \quad 1 \le i \le N, \quad \tilde{f}(x_N) = f(x_N).$$
Zeigen Sie: $\|f - \tilde{f}\|_\infty \le \frac{1}{2} h \|Df\|_\infty$.

4. Sei $f \in PC^{1,\infty}([a,b] \times [c,d]$. Für ein gegebenes Gitter $x_i = a + (i-1)h$, $h = (b-a)/(N-1)$, $1 \le i \le N$, Gitter $y_j = c + (j-1)k$, $k = (d-c)/(M-1)$, $1 \le j \le M$, definieren Sie den stückweise konstanten Interpolant von f wie folgt:
$$\begin{aligned} \tilde{f}(x,y) = f((x_{i-1} + x_i)/2, (y_{j-1} + y_j)/2), \quad & (x,y) \in [x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j), \\ & 1 \le i \le N, \quad 1 \le j \le M, \\ \tilde{f}(x_N, y) = f(x_N, y), \quad & \tilde{f}(x, y_M) = f(x, y_M). \end{aligned}$$
Zeigen Sie: $\|f - \tilde{f}\|_\infty \le \frac{1}{2}[h\|D_x f\|_\infty + k\|D_y f\|_\infty]$.