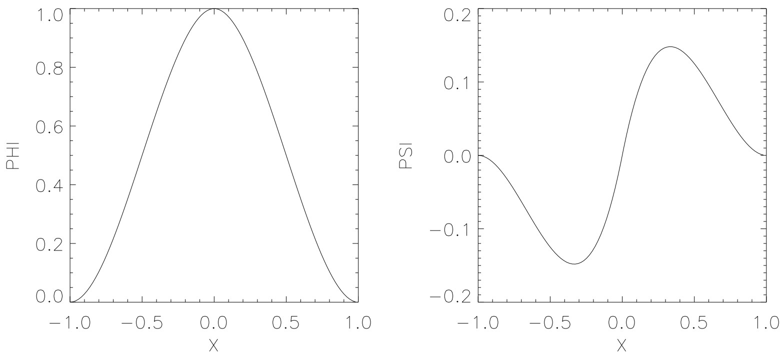
Proseminar Numerische Mathematik I, SS 04
11. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 15. Juni 2004

---

1. Bestimmen Sie die Funktionen $\phi, \psi \in C^1(\mathbb{R})$ mit Trägern auf dem Intervall $[0, 1]$:



so daß die Hermite-Interpolationsfunktion

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \left[f(x_i)\phi\left(\frac{x - x_i}{h}\right) + f'(x_i)h\psi\left(\frac{x - x_i}{h}\right)\right]$$

bezüglich des äquidistanten Gitters:

$$x_i = a + (b-a)i/(n+1), \quad i = 0, \dots, (n+1), \quad h = (b-a)/(n+1),$$

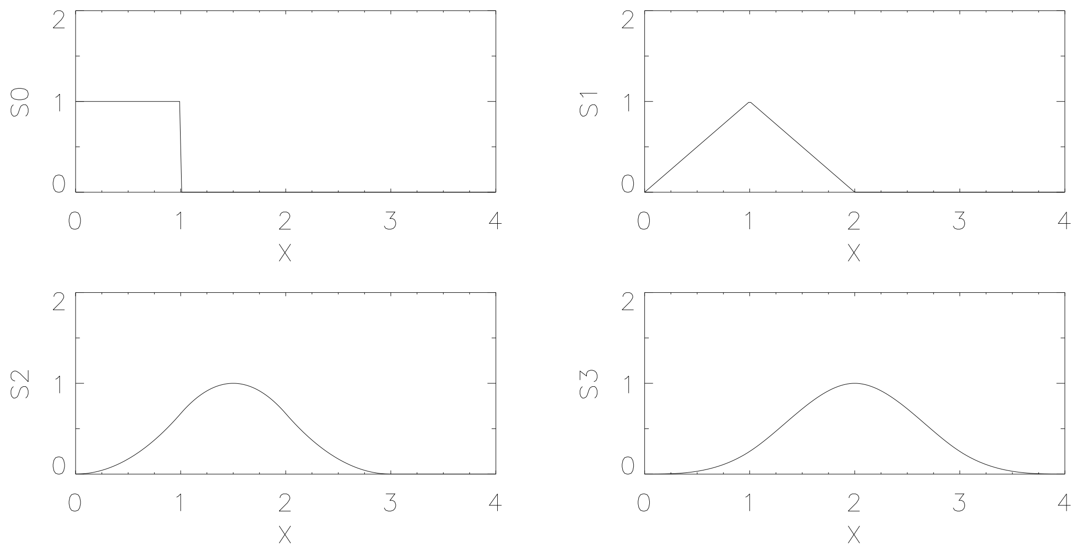
die folgenden Eigenschaften hat:

   a. wenn sie auf dem Unterintervall $[x_i, x_{i+1}]$ eingeschränkt wird, ist $p(x)$ ein kubisches Polynom;

   b. an den Gitterpunkten gelten:

$$p(x_i) = f(x_i) \quad \text{und} \quad p'(x_i) = f'(x_i) \quad \text{für } i = 0, \dots, (n+1).$$

2. Betrachten Sie die B-Splines, (stückweise konstanter Spline) s_0, (stückweise linearer Spline, oder Hutfunktion) s_1, (stückweise quadratischer Spline) s_2 und (stückweise kubischer Spline) s_3:



Die Basisfunktion s_m hat ihren Träger auf $[0, m+1]$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, d.h. $s_m(x) = 0$, $x \notin [0, m+1]$. Wenn sie auf einem Unterintervall $[k, k+1] \subset [0, m+1]$ eingeschränkt wird, ist die Basisfunktion s_m ein Polynom m-tes Grades. Außerdem gilt $s_m \in C^{m-1}(\mathbb{R})$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Eine genügend glatte Funktion $f(x)$ kann bezüglich des äquidistanten Gitters:

$$x_i = a + (b-a)i/(n+1), \quad i = 0, \ldots, (n+1), \quad h = (b-a)/(n+1),$$

so approximiert werden:

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j s_m \left(\frac{x - x_j}{h} + \frac{m+1}{2} \right)$$

wobei die Koeffizienten $\{\alpha_j\}$ erfüllen:

$$f(x_i) = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j s_m \left(\frac{x_i - x_j}{h} + \frac{m+1}{2} \right), \quad i = 0, \ldots, n+1.$$

Für $n = 1, 2, 3$ zeigen Sie, daß die Spline-Basisfunktionen, $s_m = N_m / \max\{N_m\}$ durch iterierte Faltung:

$$N_m = N_{m-1} \star N_0, \quad N_0 = \chi_{[0,1]}, \quad [f \star g](x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt$$

gegeben werden.

3. Im Intervall $[0, 2\pi]$ seien die N äquidistanten Stützstellen

$$x_j = \frac{2\pi(j-1)}{N}, \quad 1 \le j \le N,$$

gegeben. Sei $n = 2m + 1 \le N$. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\begin{aligned} g_1 &= \big(1, \ldots, 1\big), \\ g_{2l} &= \big(\cos(lx_1), \cos(lx_2), \ldots, \cos(lx_N)\big), \quad 1 \le l \le m, \\ g_{2l+1} &= \big(\sin(lx_1), \sin(lx_2), \ldots, \sin(lx_N)\big), \quad 1 \le l \le m, \end{aligned}$$

ein Orthogonalsystem im $\mathbb{R}^N$ bilden:

$$\begin{aligned} \langle g_i, g_j \rangle &= 0, \quad i \neq j, \\ \langle g_1, g_1 \rangle &= N, \\ \langle g_j, g_j \rangle &= N/2, \quad 1 < j \le n. \end{aligned}$$

Hinweis: Betrachten Sie die Eulerschen Formeln:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \qquad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

4. Verwenden Sie das letzte Beispiel, um zu zeigen: Zu den $2n+1$ Stützpunkten $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} < a + 2\pi$ und den Stützwerten $f_0, f_1, \ldots, f_{2n}$ existiert höchstens ein trigonometrisches Interpolationspolynom $n$tes Grades der Form

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$$

mit $p(x_k) = f_k$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$.