

Proseminar Numerische Mathematik I, SS 04
10. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 8. Juni 2004

1. Die Funktion $f(x) = 1/(1+x^2)$ soll im Intervall $[0, 1]$ durch ein Polynom zweiten Grades durch die Stützstellen $x_0 = 0.0, x_1 = 0.5, x_2 = 1.0$ interpoliert werden.

1. Geben Sie das Interpolationspolynom p_2 an.
2. Geben Sie eine Abschätzung des Fehlers an der Stelle $x = 0.8$ mit Hilfe eines Satzes aus der Vorlesung an und vergleichen Sie den tatsächlichen Fehler mit dieser Abschätzung. Interpretieren Sie das Ergebnis.

2. Zeigen Sie die Eigenschaften der Tschebyscheffpolynome:

$$T_n(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2} \frac{\pi}{n}\right) \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$T_n(x) = (-1)^k \quad \Leftrightarrow \quad x = y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad k = 0, \dots, n$$

3. Zeigen Sie: Die Folge der Interpolationspolynome $\{p_n(f; t_0, \dots, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f = \sin(\pi x)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$, wenn für die t_i die Tschebyscheff-Knoten

$$t_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \quad i = 0, \dots, n,$$

gewählt werden.

4. Leiten Sie für die kubische Interpolation bei äquidistantem Gitter mit Teilintervalllänge h eine Abschätzung für den Interpolationsfehler her. Unterscheiden Sie die Fälle, dass x in dem inneren bzw. in den beiden äußeren Teilintervallen liegt. Hinweis: Wählen Sie die Stützstellen symmetrisch zu $x = 0$.