Proseminar Numerische Mathematik I, SS 04
9. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 25. Mai 2004

---

1. Die zweite Ableitung einer Funktion f an der Stelle x soll durch die Ableitung eines quadratischen Interpolationspolynoms mit äquidistanten und zu x symmetrischen Stützstellen approximiert werden.

   1. Wie lautet der entstehende dividierte Differenzenquotient $f[x-h, x, x+h]$?
   2. Zeigen Sie für $f \in C^4[a,b]$:

   $$f[x-h, x, x+h] = \frac{f''(x)}{2!} + O(h^2).$$

2. Seien H_i^3, $i = 0, \ldots, 3$, die kubischen Hermite-Basispolynome zu den Stützstellen t_0, t_1, d.h. es gelte

   $$\begin{array}{llll} H_0^3(t_0) = 1, & \frac{d}{dt}H_0^3(t_0) = 0, & H_0^3(t_1) = 0, & \frac{d}{dt}H_0^3(t_1) = 0, \\ H_1^3(t_0) = 0, & \frac{d}{dt}H_1^3(t_0) = 1, & H_1^3(t_1) = 0, & \frac{d}{dt}H_1^3(t_1) = 0, \\ H_2^3(t_0) = 0, & \frac{d}{dt}H_2^3(t_0) = 0, & H_2^3(t_1) = 1, & \frac{d}{dt}H_2^3(t_1) = 0, \\ H_3^3(t_0) = 0, & \frac{d}{dt}H_3^3(t_0) = 0, & H_3^3(t_1) = 0, & \frac{d}{dt}H_3^3(t_1) = 1. \end{array}$$

   $\{H_i^3\}_{i=0}^3$ bildet neben $B = \{1, t, t^2, t^3\}$ eine Basis von $\mathbb{P}_3$. Geben Sie für $t_0 = 0,\ t_1 = 1$ die $\{H_i^3\}_{i=0}^3$ und die Matrix des Basiswechsels von $\{H_i^3\}_{i=0}^3$ auf B an.

3. Mit Hilfe von der letzten Aufgabe, interpolieren Sie $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ durch ein Polynom p so, daß

   $$\left.\begin{array}{lll} p^{(k)}(0) & = & f^{(k)}(0), \\ p^{(k)}(1) & = & f^{(k)}(1), \end{array}\right\} \quad k = 0, 1.$$

   Mit Hilfe von der Fehlerabschätzung

   $$|f(x) - p(x)| \le \frac{1}{(n+1)!} \max_{0 \le \xi \le 1} |f^{(n+1)}(\xi)| \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$$

   mit $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 1$ (d.h. die Knoten haben Vielfachheit 2), geben Sie eine Abschätzung für den Interpolationsfehler im Intervall $[0, 1]$ an.

4. Nehmen Sie an, dass Zahlen eine binäre Darstellung in Ihrem Computer haben:

   $$x = \pm \sum_{k=0}^{p} a_k 2^{-k} \times 2^e, \qquad a_k \in \{0, 1\}.$$

   Betrachten Sie den folgenden MATLAB Code:

```
function [u,p] = unit
    x = 1.0;
    u = 1.0;
    while (x+u ~= x) u = u/2.0; end;
    u = 2.0*u;
    p = log2(d);
```

   Es folgt davon, dass $1 + 2^{-p} \neq 1$ und $1 + 2^{-(p+1)} = 1$ gelten. Ähnlich für $x = 2^n$ gelten $x + 2^{n-p} \neq x$ und $x + 2^{n-(p+1)} = x$. Nun seien:

   $$f(x) = \tanh[a(x - x_0)], \qquad x_0 = 2^5 + 2^{4-p}.$$

   Nehmen Sie an, dass die Lösung x_0 der Nullstellengleichung $f(x) = 0$ durch eine konvergierende Iteration $x_{k+1} = \phi(x_k)$ gesucht wird.

1. Bestimmen Sie die Werte x_1 und x_2, die sich in der Computerdarstellung am nächsten zu x_0 befinden, damit $x_0 \in (x_1, x_2)$ gilt.
2. Bestimmen Sie die kleinsten α, ε und δ, so dass die Abbruchkriterien

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \alpha, \qquad |x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon |x_{k+1}|, \qquad |f(x_{k+1})| \leq \delta$$

   funktionieren können.