Proseminar Numerische Mathematik I, SS 04
8. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 18. Mai 2004

---

1. Gegeben sei die Dreiterm-Rekursion:

$$T_{k+1} - 2\alpha T_k + T_{k-1} = 0 \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

   (a) Geben Sie mit Hilfe des Ansatzes $T_k = \lambda^k, \lambda \in \mathbb{C}$, die allgemeine Lösung an.

   (b) Zeigen Sie für $|\alpha| \geq 1$ die Existenz einer Minimallösung.

   Geben Sie die Lösung y_k der Dreiterm-Rekursion

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 0$$

   mit den Anfangswerten $y_0 = 0, y_1 = 5$ an. Benutzen Sie den Ansatz aus (a).

2. Betrachtet wird die Dreiterm-Rekursion

$$T_{k+1} = \frac{2k}{x} T_k - T_{k-1}.$$

   Lösungen sind die Besselfunktionen J_k und Neumannfunktionen Y_k. Zeigen Sie, ausgehend von den asymptotischen Darstellungen

$$\begin{aligned} J_k(x) &\doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \left(\frac{ex}{2k}\right)^k \quad (k \to \infty) \\ Y_k(x) &\doteq -\sqrt{\frac{2}{\pi k}} \left(\frac{ex}{2k}\right)^{-k} \quad (k \to \infty), \end{aligned}$$

   dass für J_{k+1} bei Berechnung in Vorwärtsrichtung und für Y_{k-1} in Rückwärtsrichtung für große k Auslöschung auftritt.

3. Zeige, dass jede homogene Dreiterm-Rekursion

$$p_k = a_k p_{k-1} + b_k p_{k-2}$$

   durch eine Transformation $p_k = c_k \bar{p}_k$ in eine symmetrische Dreiterm-Rekursion überführt werden kann. Wie sehen die Koeffizienten $\bar{a}_k$ dieser symmetrischen Rekursion aus? Geben Sie eine Rekursionsformel für c_k an.

4. Sei $T_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Tridiagonalmatrix

$$T_n = \begin{pmatrix} d_1 & e_2 & \cdots & 0 \\ e_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & e_n \\ 0 & \cdots & e_n & d_n \end{pmatrix}$$

   Zeigen Sie: Die charakteristischen Polynome $p_k(\lambda) = \det(T_k - \lambda I_k)$ genügen einer Dreiterm-Rekursion.