

Proseminar Numerische Mathematik I, SS 04
7. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 4. Mai 2004

1. Die Gleichung $x + \ln x = 0$, deren Wurzel $a \approx 0.5$ ist, soll iterativ gelöst werden. Wählen Sie unter folgenden Iterationsformeln:

$$(a) x_{n+1} = -\ln x_n, (b) x_{n+1} = e^{-x_n}, (c) x_{n+1} = (x_n + e^{-x_n})/2$$

- a. Welche Formel oder welche Formeln können benutzt werden?
 - b. Welche sollte benutzt werden?
 - c. Geben Sie eine noch bessere Formel an!
2. a. Wieviele Iterationsschritte sind notwendig, wenn in der 1. Aufgabe mit der dritten Iterationsvorschrift und dem Startwert $x_0 = 1$ gerechnet wird, um den Fixpunkt mit einer Genauigkeit von $\epsilon \leq 10^{-8}$ zu berechnen?
- b. Geben Sie für dasselbe Verfahren wie in (a) ein Abbruchkriterium an: Wie weit dürfen zwei nachfolgende Iterierte x^k, x^{k-1} höchstens auseinanderliegen, damit x^k den Fixpunkt mit der Genauigkeit $\epsilon \leq 10^{-8}$ approximiert?
3. Eine Wurzel der Gleichung $x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = 0$ soll in der Nähe von $x = 4$ iterativ berechnet werden. Wählen Sie k in der folgenden Iterationsformel so, dass eine schnelle Konvergenz erreicht wird, und berechnen Sie die Wurzel auf 4 korrekte Dezimalen.

$$x_{n+1} = \frac{3 + (k-4)x_n + 5x_n^2 - x_n^3}{k}.$$

4. Es liege eine k -fache Nullstelle $x^* \in \mathbb{R}$ einer Funktion $f \in C^k(\mathbb{R})$ vor. Zeigen Sie, dass das folgende Verfahren lokal mindestens die Konvergenzordnung $p = 2$ hat:

$$x^{n+1} = \begin{cases} x^n - kf(x^n)/f'(x^n), & x^n \neq x^*, \\ x^*, & x^n = x^*. \end{cases}$$

5. Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$u''(x) = -\frac{1}{2}\lambda e^{u(x)}, \quad x \in (-1, 1) \\ u(-1) = u(1) = 0$$

mit $\lambda \geq 0$. Diskretisierung führt auf folgendes nichtlineares Gleichungssystem:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = -\frac{1}{2}\lambda e^{u_i}, \\ u_1 = u_n = 0$$

mit $u_i \approx u((x_{i-1} + x_i)/2)$, $i = 1, \dots, n$, wobei $x_i = -1 + 2i/n$ und $h = 2/n$. Schreiben Sie das Gleichungssystem als Nullstellenproblem

$$F(u) = 0$$

und geben Sie die Funktionalmatrix $DF(u)$ an. Welche MATLAB-Funktion ist zur Zerlegung von $DF(u)$ am besten geeignet?