Proseminar Numerische Mathematik I, SS 04
6. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 27. April 2004

---

1. Eine Givensrotation
$$Q = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}, \qquad c^2 + s^2 = 1$$
läßt sich bis auf ihr Vorzeichen als eine einzige Zahl ρ abspeichern (am besten natürlich an die Stelle des eliminierten Matrixeintrages):
$$\rho := \begin{cases} 1, & \text{falls } c = 0 \\ \operatorname{sgn}(c)s/2, & \text{falls } |s| < |c| \\ 2\operatorname{sgn}(s)/c, & \text{falls } |s| \geq |c| \neq 0. \end{cases}$$
Geben Sie die Formeln an, mit denen man aus ρ die Givensrotation $\pm Q$ bis auf das Vorzeichen zurückgewinnt. Wieso ist diese Darstellung sinnvoll, obwohl das Vorzeichen verloren geht? Ist diese Darstellung stabil?

2. Lösen Sie das Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
mit einer QR-Zerlegung nach dem Householder-Verfahren. Geben Sie die Matrizen R und Q explizit an.

3. Erläutern Sie anhand des Beispiels
$$\boldsymbol{x} = \langle x_1, \varepsilon, 0, \cdots, 0\rangle^{\mathrm{T}}, \qquad x_1 \neq 0, \quad 0 \leq \varepsilon \ll |x_1|,$$
warum bei der Aufstellung der Householder-Transformationsmatrix
$$Q = I - 2\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T}{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}}$$
zur Spiegelung von $\boldsymbol{x}$ auf ein Vielfaches des 1. Einheitsvektors die Wahl
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \operatorname{sgn}(x_1)\|\boldsymbol{x}\|_2\boldsymbol{e}_1$$
gegenüber
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} - \operatorname{sgn}(x_1)\|\boldsymbol{x}\|_2\boldsymbol{e}_1$$
vorzuziehen ist. Was passiert im Fall $\varepsilon = 0$?