Proseminar Numerische Mathematik I, SS 04
5. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 20. April 2004

---

1. Für $f, g\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sind die *Landau - Symbole* wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lllllll} f = O(g) & (x \to \bar{x}) & :\Leftrightarrow \exists c > 0 & \exists U(\bar{x}) & \forall x \in U(\bar{x})\colon & |f(x)| \le c|g(x)| \\ f = o(g) & (x \to \bar{x}) & :\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 & \exists U(\bar{x}) & \forall x \in U(\bar{x})\colon & |f(x)| \le \epsilon|g(x)| \end{array}$$

   Zeigen Sie:

   a. $f = o(1)\ (x \to \bar{x}) \ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) = 0$
   b. $f = o(g)\ (x \to \bar{x}) \ \Rightarrow\ f = O(g)\ (x \to \bar{x})$
   c. Folgende drei Aussagen sind äquivalent:

$$\begin{array}{rll} \text{i.} & f = O(o(g)) & (x \to \bar{x}) \\ \text{ii.} & f = o(O(g)) & (x \to \bar{x}) \\ \text{iii.} & f = o(g) & (x \to \bar{x}) \end{array}$$

   d. Gilt die folgende Aussage für beliebige $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$?

$$f = o(x^n)\ (x \to \bar{x}) \ \Rightarrow\ f = O(x^{n+1})\ (x \to \bar{x})$$

2. Seien A und D die Matrizen von der 1. Programmieraufgabe:

$$A = I + \frac{\mu}{h^2} D, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

   wobei $x_i = -1 + 2i/n$, $i = 0, \dots, n$ und $h = 2/n$. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von A durch

$$\lambda_k = 1 + \frac{2\mu}{h^2}\left[1 - \cos\frac{(k-1)\pi}{n}\right], \qquad k = 1, \dots, n,$$

   und die zugehörigen Eigenvektoren durch

$$v_k = \begin{cases} \langle 1, \dots, 1\rangle^{\mathrm{T}}, & k = 1 \\ \left\langle \cos\left(\frac{1}{2}\frac{(k-1)\pi}{n}\right), \cos\left(\frac{3}{2}\frac{(k-1)\pi}{n}\right), \dots \cos\left((n-\frac{1}{2})\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right\rangle^{\mathrm{T}}, & 2 \le k \le n \end{cases}$$

   gegeben sind, d.h. $Av_k = \lambda_k v_k$ für $k = 1, \dots, n$.

3. Sei A durch die 2. Aufgabe gegeben. Bemerken Sie, dass der Kosinus sich für kleines x durch die Taylorentwicklung

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4) \quad (x \to 0)$$

   approximieren läßt, und beweisen Sie, dass

$$\kappa_2(A) = O(n^2)$$

   gilt.