Proseminar Numerische Mathematik I, SS 04
4. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 30. März 2004

---

1. Nach Einstein hängt die kritische Spannung v_0 für den photoelektrischen Effekt von der Frequenz f ab:

$$ev_0 = \hbar f - \phi,$$

wobei

$$\begin{aligned} e &= \text{Elementarladung}, \\ \hbar &= \text{Plancksches Wirkungsquantum}, \\ \phi &= \text{Materialkonstante}. \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle gibt entsprechende Messungen:

$f \cdot 10^{-13}$ (Hz)	56	70	79	83	102	120
v_0 (Volt)	0.05	1.00	1.40	1.74	2.43	3.00

Eine lineare Beziehung p_1 zwischen v_0 und f soll diesen Daten so angepaßt werden, dass die Summe der Fehlerquadrate minimal wird. Geben Sie das Polynom ersten Grades $p_1(t)$ an, so dass $v_0 \approx p_1(f)$.

2. Ein Polynom zweiten Grades soll nach der Methode der kleinsten Quadrate an die folgende Meßreihe angepaßt werden:

x	15	16	17	18	19
$f(x)$	26.8	10.3	2.9	5.9	19.1

Bestimmen Sie das Polynom als eine Entwicklung um den Mittelpunkt, d.h.

$$p_2(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 \text{ mit } a = 17.$$

3. Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und U ein Unterraum von V. Sei $P : V \to U$ die Abbildung, die jedem $v \in V$ das eindeutig bestimmte $Pv \in U$ zuordnet, für das $v - Pv \in U^\perp$ gilt. Zeigen Sie: P ist linear.

4. Sei $A = \{a_{ij}\} \in R^{n\times n}$ die Hilbertmatrix mit

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \; 1 \le i,j \le n.$$

Mit MATLAB definieren wir:

$$x^* = (1,1,\ldots,1)^T \;\text{ und }\; b = Ax^*.$$

Seien x_1 die Backslash-Lösung der Gleichung $Ax_1 = b$ und x_2 die Backslash-Lösung der Normalgleichung $Qx_2 = c$ mit $Q = A^TA$ und $c = A^Tb$. Benutzen Sie MATLAB und machen Sie eine Tabelle:

n	$\Vert x_1 - x^*\Vert/\Vert x^*\Vert$	$\Vert Ax_1 - b\Vert$	$\kappa(A)$	$\Vert x_2 - x^*\Vert/\Vert x^*\Vert$	$\Vert Qx_2 - c\Vert$	$\kappa(Q)$
2	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

für $n = 2,\ldots,10$. Interpretieren Sie Ihre Resultate. Erklären Sie δb und δc in den folgenden Ungleichungen:

$$\frac{\|x_1 - x^*\|}{\|x^*\|} \le \kappa(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \qquad \frac{\|x_2 - x^*\|}{\|x^*\|} \le \kappa(Q)\frac{\|\delta c\|}{\|c\|}.$$