Proseminar Numerische Mathematik I, SS 04
3. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 23. März 2004

---

1. Sei A die Matrix von der 1.Programmieraufgabe:

$$A = I + \frac{\mu}{h^2} D, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

   a) Weisen Sie nach, dass A positiv definit ist. Hinweis: Mit $\boldsymbol{u} = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle^{\mathrm{T}}$ zeigen Sie die folgende Gleichung:

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \frac{\mu}{h^2} \sum_{i=2}^{n} (u_i - u_{i-1})^2.$$

   b) Für $n = 5$ und $\mu = h^2$ geben Sie die Cholesky-Zerlegung von A explizit an.

2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1.6384 & 0.8065 \\ 0.8321 & 0.4096 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.8319 \\ 0.4225 \end{pmatrix}.$$

Bestätigen Sie, daß $(1, -1)^T$ die exakte Lösung von $Ax = b$ ist. Bestimmen Sie für $r(\bar{x}) = A\bar{x} - b$ ein $\bar{x}$, so daß exakt $r = (10^{-8}, 10^{-8})^T$ gilt. Berechnen Sie $\kappa_\infty(A)$. Wie klein sollte der relative Fehler in A sein, damit die Lösung bei exaktem b mit Sicherheit einen relativen Fehler kleiner als 10^{-8} besitzt.

Hinweis: Nutzen Sie die Abschätzung

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x + \Delta x\|_\infty} \leq \kappa_\infty(A) \, \frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty},$$

wobei $Ax = b$ und $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$ gelten.

3. a. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und symmetrisch. Zeigen Sie:

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}},$$

   wobei

$$\lambda_{\max} = \max\{|\lambda| \colon \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

   und

$$\lambda_{\min} = \min\{|\lambda| \colon \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}.$$

   b. Für nichtsymmetrische Matrizen ist $|\lambda_{\max}/\lambda_{\min}|$ ein schlechtes Konditionsmaß. Betrachten Sie dazu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1.00001 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1.00001 \end{pmatrix}$$

   und zeigen Sie: $\kappa_2(A) = \kappa_2(B)$, aber

$$\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} \ll \frac{\lambda_{\max}(B)}{\lambda_{\min}(B)}.$$

4. Eine Matrix, bei der die Betragssummen aller Zeilen gleich sind, heißt ≪zeilenäquilibriert≫. Zeigen Sie:

   a. Durch Linksmultiplikation mit einer regulären Diagonalmatrix kann jede reguläre Matrix in eine zeilenäquilibrierte mit Zeilensumme 1 transformiert werden.

   b. Ist A zeilenäquilibriert, so gilt für jede reguläre Diagonalmatrix D

   $$\kappa_\infty(A) \;\le\; \kappa_\infty(DA),$$

   wenn die Kondition bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$–Norm berechnet wird.

   c. Interpretieren Sie die Aussage in (b).

5. Seien $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\|\cdot\|$ die einer Vektornorm zugeordnete Matrixnorm. Nehmen Sie an:

   $$\sum_{i=0}^{\infty} \|T^i\| < \infty. \tag{1}$$

   Zeigen Sie:

   (a) $I - T$ ist bijektiv,

   (b) $(I-T)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} T^i$.

   (c) Gilt $\|T\| < 1$, so ist Gleichung (1) erfüllt. Zeigen Sie:

   $$\|(I-T)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|T\|}.$$

6. Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\|\cdot\|$ die einer Vektornorm zugeordnete Matrixnorm. Mit $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ werde die ≪näherungsweise Inverse≫ von A bezeichnet, d.h. es gelte $\|R\| < 1$ für $R := AC - I$. Zeigen Sie:

   (a) A und C sind regulär.

   (b) Für A^{-1} gilt

   $$\|A^{-1}\| \le \frac{\|C\|}{1-\|R\|}.$$

   Hinweis: Benutzen Sie die Aufgabe (5)!