Proseminar Numerische Mathematik I, SS 04
2. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 16. März 2004

---

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie die folgende Aussage: Die durch
$$\|A\|_F :\ = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\Big)^{1/2}$$
definierte Abbildung $\|\cdot\|_F : \mathbb{R}^{n\times n} \mapsto \mathbb{R}^+$ ist eine Norm auf dem $\mathbb{R}^{n\times n}$ und ist mit der euklidischen Vektornorm verträglich. Die Matrixnorm heißt *Frobeniusnorm*.

2. Berechnen Sie die Kondition der Hilbertmatrix $A = (a_{ij})$ mit
$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1},\ 1 \le i,j \le n$$
bzgl. der $\|\cdot\|_1$-Norm für $n=2$ und $n=3$ und bzgl. der $\|\cdot\|_2$-Norm für $n=2$.

   Geben Sie eine Abschätzung für die Kondition einer Eliminationsmatrix L_k beim Gaußalgorithmus mit Spaltenpivotsuche an!

3. a) In der 1.Aufgabe wurde die Frobeniusnorm $\|\cdot\|_F$ eingeführt. Beweisen Sie, dass die Frobeniusnorm einer Matrix invariant gegenüber Multiplikationen mit orthogonalen Matrizen ist.

   b) Geben Sie eine vollbesetzte reguläre 3×3-Matrix an, für die die LR-Zerlegung ohne Pivotstrategie nicht durchführbar ist.

4. Mit $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le m} |x_i|$ bezeichnen wir die *Maximumnorm* im $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass die durch
$$\|A\|_Z = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{für } A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$
definierte Zeilensummennorm die zur Maximumnorm zugeordnete Matrizennorm ist.