Proseminar Numerische Mathematik I, SS 04
3. Programmieraufgabe, abzugeben bis 4. Mai 2004

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$u''(x) = -\frac{1}{2}\lambda e^{u(x)}, \quad x \in (-1,1)$$
$$u(-1) = u(1) = 0$$

mit $\lambda \geq 0$. Diskretisierung führt auf folgendes nichtlineares Gleichungssystem:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = -\frac{1}{2}\lambda e^{u_i},$$
$$u_1 = u_n = 0$$

mit $u_i \approx u((x_{i-1} + x_i)/2)$, $i = 1, \dots, n$, wobei $x_i = -1 + 2i/n$ und $h = 2/n$. Das Gleichungssystem wird als Nullstellenproblem

$$F(u) = 0$$

geschrieben, und die Funktionalmatrix $DF(u)$ wird in einem Newtonverfahren verwendet.

Lösen Sie das nichtlineare System mit dem Newtonverfahren für $n = 10$ und einen beliebigen Wert von $\lambda \geq 0$. Die linearen Gleichungssysteme sollen mit den am besten geeigneten MATLAB-Funktionen faktorisiert und gelöst werden. Dabei soll es möglich sein, wahlweise:

1. in jedem Iterationsschritt die Funktionalmatrix neu zu berechnen,
2. jeweils nach einer frei wählbaren Anzahl von Iterationsschritten dies zu tun,
3. immer mit der Funktionalmatrix des Startwertes zu iterieren,
4. statt der Funktionalmatrix die Einheitsmatrix zu benutzen.

Für jeden Wert von λ gibt es zwei Lösungen. Versuchen Sie, diese durch die Wahl verschiedener Startwerte zu finden, und geben Sie die Anzahl der Iterationsschritte sowie den Lösungsvektor graphisch als Paare (x_i, u_i) aus. Sie können dazu die MATLAB-Funktion `plot` verwenden. Interessant ist auch das Lösungsverhalten für eine steigende Folge $\{\lambda_k\}$.