Proseminar Numerische Mathematik I (DIPL/LAK), SS 02

12. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 24. bzw. 27. Juni 2002

Tafelaufgaben:

1. *Daten zu entrauschen.* Sei v eine verrauschte Funktion auf $[-1,+1]$, d.h. $v =$ eine glatte Funktion + zufälliges Geräusch. Sei u eine entrauschte Abschätzung von v, die durch die Minimierung von

$$J(u) = \int_{-1}^{+1} [u(x) - v(x)]^2 dx + \mu \int_{-1}^{+1} [u'(x)]^2 dx$$

bestimmt wird. Mit einem äquidistanten Gitter

$$x_i = -1 + 2i/(n+1), \quad i = 0, \dots, (n+1), \quad h = 2/(n+1),$$

wenden Sie die Trapez-Regel an, um eine Annährung $J_h \approx J$ herzuleiten. Insbesondere wenden Sie in jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ eine lineare Darstellung der Integranden

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [u(x) - v(x)]^2 dx &\approx \frac{1}{2} \left\{ [u(x_{i+1}) - v(x_{i+1})]^2 + [u(x_i) - v(x_i)]^2 \right\} (x_{i+1} - x_i) \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} [u'(x)]^2 dx &\approx \left[\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right]^2 (x_{i+1} - x_i) \end{aligned}$$

an. Mit den bekannten $\{v_i = v(x_i)\}_{i=0}^{n+1}$ ist J_h eine Funktion von den Unbekannten $\{u_i = u(x_i)\}_{i=0}^{n+1}$. Geben Sie die notwendige Optimalitätsbedingungen $\partial J_h / \partial u_i = 0$ an, und schreiben Sie Ihr Ergebnis in der Form eines linearen Gleichungssystems $A_\mu U = V$ mit $U = \langle u_0, \dots, u_{n+1} \rangle^T$ und $V = \langle v_0, \dots, v_{n+1} \rangle^T$.

2. Seien v und u die Funktionen in der 1.Aufgabe. Nun zeigen Sie, daß für irgendeine Funktion $h \in C^1([-1,+1])$ die folgende Gleichung gilt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(u + \varepsilon h) - J(u)}{\varepsilon} = \int_{-1}^{+1} 2 \left[u(x) - v(x) - \mu u''(x) \right] h(x) dx + 2\mu h(x) u'(x) \Big|_{x=-1}^{x=+1}.$$

Erörtern Sie, daß die notwendige Optimalitätsbedingung

$$\frac{\delta J}{\delta u}(u; h)^* \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(u + \varepsilon h) - J(u)}{\varepsilon} = 0$$

für jede Abweichung h erfüllt wird, genau wenn u die folgende Randwertaufgabe erfüllt:

$$\begin{cases} -\mu u'' + u = v, & -1 < x < +1 \\ u' = 0, & x = \pm 1. \end{cases}$$

Erörtern Sie, daß Ihr Ergebnis von der 1.Aufgabe eine Diskretisierung dieser Randwertaufgabe liefert.

3. Nachdem wir diese Differentialgleichung mit einer Funktion ϕ multipliziert haben, finden wir die Randwertsaufgabeformulierung†:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^{+1} \left[u(x) - v(x) - \mu u''(x) \right] \phi(x) dx + \mu \phi(x) u'(x) \Big|_{x=-1}^{x=+1} \\ &= \int_{-1}^{+1} \left[u(x)\phi(x) + \mu u'(x)\phi'(x) \right] dx - \int_{-1}^{+1} v(x)\phi(x) dx. \end{aligned}$$

---

*Die sogenannte variationelle Ableitung

†Die sogenannte Formulierung der schwachen Lösung

Mit dem Gitter von der 1.Aufgabe betrachten Sie nun die Lösungsdarstellung und die Datendarstellung der Randwertsaufgabe:

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} u_j \chi_j(x), \qquad v_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v_j \chi_j(x), \qquad \chi_j(x) = s_1\left(\frac{x - x_j}{h} + 1\right)$$

worin s_1 die Hutfunktion der 3.Aufgabe auf dem 11.Übungsblatt ist. Leiten Sie das Gleichungssystem $B_\mu U = V$ mit $U = \langle u_0, \ldots, u_{n+1}\rangle$ und $V = \langle v_0, \ldots, v_{n+1}\rangle$ her, das von der Diskretisierung[‡]

$$\int_{-1}^{+1} \left[u_h(x)\chi_i(x) + \mu u_h'(x)\chi_i'(x)\right] dx = \int_{-1}^{+1} v_h(x)\chi_i(x) dx \qquad i = 0, \ldots, n+1$$

ergibt.

Hausaufgabe:

(D) Erinnern Sie sich an die D.Aufgabe auf dem 11.Übungsblatt. Wir könnten p dadurch bestimmen, daß wir das durch

$$p_{i-1}(x_i) = p_i(x_i), \quad p_{i-1}'(x_i) = p_i'(x_i), \quad p_{i-1}''(x_i) = p_i''(x_i), \quad i = 2, \ldots, n-1,$$

$$p(x_i) = f_i, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \text{und} \qquad p''(x_1) = p''(x_n) = 0$$

gegebene lineare Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten $\{a_{ij}\}$ lösen. Die zugehörige Koeffizientenmatrix hat allerdings eine recht unhandliche Struktur. Für die natürlichen kubischen Splinefunktionen gibt es aber eine andere Möglichkeit, die auf ein einfaches tridiagonales Gleichungssystem führt, in dem die Unbekannten die Werte der zweiten Ableitungen von p an den Knoten sind. Wir können dann p direkt durch Integration bestimmen. Um an dieses tridiagonale System zu gelangen, nehmen wir die folgenden Umformungen vor.

Zeigen Sie zuerst, daß p_i'' linear ist, und rechtfertigen Sie:

$$p_i''(x) = p_i''(x_i) + \frac{x - x_i}{h_i}[p_i''(x_{i+1}) - p_i''(x_i)], \qquad h_i = x_{i+1} - x_i, \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

Zeigen Sie, daß man durch zweimal Integration die Ausdrücke für $p'(x)$ und $p(x)$ erhält:

$$\begin{aligned} p_i'(x) &= p_i'(x_i) + p_i''(x_i)(x - x_i) + \frac{p_i''(x_{i+1}) - p_i''(x_i)}{2h_i}(x - x_i)^2. \\ p_i(x) &= p_i(x_i) + p_i'(x_i)(x - x_i) + p_i''(x_i)\frac{(x - x_i)^2}{2} + \frac{p_i''(x_{i+1}) - p_i''(x_i)}{6h_i}(x - x_i)^3. \end{aligned}$$

Benutzen Sie und rechtfertigen Sie die Abkürzungen:

$$p_i = p_i(x_i) = p_{i-1}(x_i), \qquad p_i' = p_i'(x_i) = p_{i-1}'(x_i), \qquad p_i'' = p_i''(x_i) = p_{i-1}''(x_i).$$

Mit diesen Ergebnissen, zeigen Sie, daß die folgenden Gleichungen gelten:

$$p_i' = p_{i-1}' + (p_i'' + p_{i-1}'')\frac{h_{i-1}}{2} \qquad p_i' = \frac{p_{i+1} - p_i}{h_i} - p_{i+1}''\frac{h_i}{6} - p_i''\frac{h_i}{3}$$

und daher:

$$p_{i-1}' + (p_i'' + p_{i-1}'')\frac{h_{i-1}}{2} = \frac{p_{i+1} - p_i}{h_i} - p_{i+1}''\frac{h_i}{6} - p_i''\frac{h_i}{3}.$$

[‡] Die sogenannte Diskretisierung der finiten Elemente

Mit diesen Ergebnissen, zeigen Sie, daß die folgenden Gleichungen gelten:

$$\frac{p_i - p_{i-1}}{h_{i-1}} - p_i''\frac{h_{i-1}}{6} - p_{i-1}''\frac{h_{i-1}}{3} + (p_i'' + p_{i-1}'')\frac{h_{i-1}}{2} = \frac{p_{i+1} - p_i}{h_i} - p_{i+1}''\frac{h_i}{6} - p_i''\frac{h_i}{3}$$

und:

$$p_{i-1}''h_{i-1} + 2p_i''(h_{i-1} + h_i) + p_{i+1}''h_i = F_i = 6\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - 6\frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}, \qquad i = 2, \ldots, n-1.$$

Weil $p_1'' = p_n'' = 0$ gilt, ist dieses System von $n-2$ linearen Gleichungen in den $n-2$ Unbekannten $p_2'', \ldots, p_{n-1}''$ darstellt. Schreiben Sie das System in der Form $HP = F$ mit $P = \langle p_2'', \ldots, p_{n-1}'' \rangle$ und $F = \langle F_2, \ldots, F_{n-1} \rangle$ für eine passende Matrix H. Beschreiben Sie die Eigenschaften dieser Matrix, und geben Sie ein passendes Verfahren, mit der das System leicht gelöst werden kann. Nun verwenden Sie Ihre Ergebnisse, um zu zeigen, wie die Funktion $p(x)$ von den berechneten Werten $\langle p_2'', \ldots, p_{n-1}'' \rangle$ ausgewertet werden kann.

(L) Seien n eine natürliche Zahl und α eine positive Zahl. Zeigen Sie, daß das Newton-Verfahren für die Gleichung $x^n - \alpha = 0$ auf die Iterierten

$$x_{k+1} = \frac{1}{n}\left[(n-1)x_k + \frac{\alpha}{x_k^{n-1}}\right], \qquad k = 0, 1, \ldots$$

füht und daß diese Folge für jedes $x_0 > 0$ konvergiert. Betrachten Sie den Fall $n = 2$ genauer.

Programmieraufgabe:

Schreiben Sie ein Programm, um das Problem $A_\mu U = V$ in der 1.Aufgabe zu lösen. Mit `x = -1 + 2*(0:n+1)/(n+1)` und (z.B.) `a = 0.1` nehmen Sie

```
v = sin(pi*x) + a*randn(1,n+2).
```

Stellen Sie die Funktionen v und u grafisch zusammen dar, und finden Sie einen Wert μ, so daß u ($\approx \sin(\pi x)$) die beste Entrauschung von v ist.

Achten Sie auf folgende Punkte bei der Implementierung:

- Korrektheit,
- Logik,
- Dokumentation

Abgabe der numerischen Aufgabe: am 1. bzw. 4. Juli 2002.