Proseminar Numerische Mathematik I (DIPL/LAK), SS 02

11. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 17. bzw. 20. Juni 2002

Tafelaufgaben:

1. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x - x^3$ mit den Wurzeln 0 und ± 1.

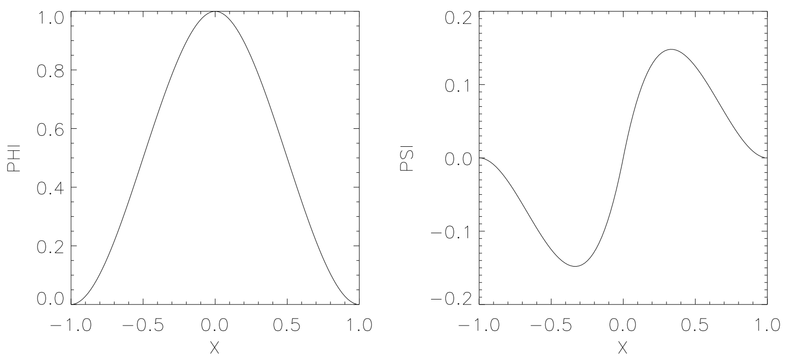
   (a) Zeigen Sie, daß das Newton-Verfahren bezüglich jeder der drei Wurzeln lokal konvergent ist.

   (b) Führen Sie mehrere Schritte des Newton-Verfahrens durch, wobei Sie mit der Startnäherung $x_0 = 2$ beginnen, und erörtern Sie dann die dabei beobachtete Konvergenzgeschwindigkeit.

   (c) Führen Sie mehrere Schritte mit dem Bisektionsverfahren und der Sekantenmethode durch, wobei Sie mit dem Intervall $(\frac{3}{4}, 2)$ beginnen. Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeiten der Iterierten dieser beiden Verfahren mit derjenigen beim Newton-Verfahren.

   (d) Bestimmen Sie die Menge S der Punkte, für die die Iterierten des Newton-Verfahrens (sofern keine Rundungsfehler auftreten) für jede Wahl der Startnäherung $x_0 \in S$ gegen die Wurzel 1 konvergieren. Bestimmen Sie solche Punktmengen auch für die Wurzeln 0 und -1.

2. Erinnern Sie sich an die 1.Aufgabe auf dem 9.Übungsblatt. Bestimmen Sie jetzt die Funktionen $\phi, \psi \in C^1(\mathbb{R})$ mit Trägern auf dem Intervall $[0, 1]$:



so daß die Hermite-Interpolationsfunktion

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \left[f(x_i)\phi\left(\frac{x - x_i}{h}\right) + f'(x_i)h\psi\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \right]$$

bezüglich des äquidistanten Gitters:

$$x_i = a + (b-a)i/(n+1), \qquad i = 0, \ldots, (n+1), \qquad h = (b-a)/(n+1),$$

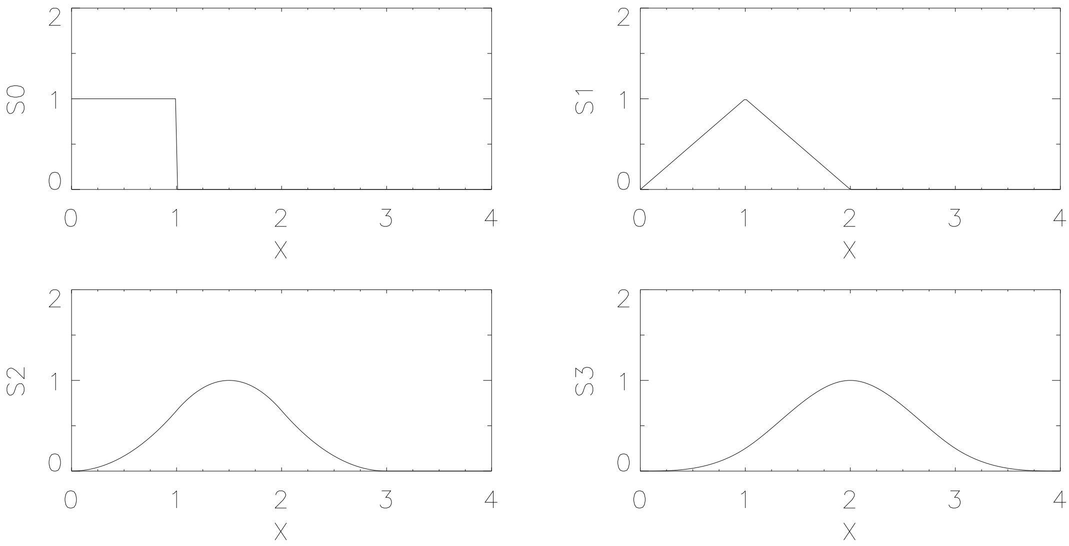
die folgenden Eigenschaften hat:

   (a) wenn sie auf dem Unterintervall $[x_i, x_{i+1}]$ eingeschränkt wird, ist $p(x)$ ein kubisches Polynom;

   (b) an den Gitterpunkten gelten:

$$p(x_i) = f(x_i) \qquad \text{und} \qquad p'(x_i) = f'(x_i) \qquad \text{für } i = 0, \ldots, (n+1).$$

3. Betrachten Sie die B-Splines, (stückweise konstanter Spline) s_0, (stückweise linearer Spline, oder Hutfunktion) s_1, (stückweise quadratischer Spline) s_2 und (stückweise kubischer Spline) s_3:



Die Basisfunktion s_n hat ihren Träger auf $[0, n+1]$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, d.h. $s_n(x) = 0$, $x \notin [0, n+1]$. Wenn sie auf einem Unterintervall $[m, m+1] \subset [0, n+1]$ eingeschränkt wird, ist die Basisfunktion s_n ein Polynom n-tes Grades. Außerdem gilt $s_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Eine genügend glatte Funktion $f(x)$ kann bezüglich des äquidistanten Gitters:

$$x_i = a + (b-a)i/(n+1), \qquad i = 0, \ldots, (n+1), \qquad h = (b-a)/(n+1),$$

so approximiert werden:

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j s_n \left(\frac{x - x_j}{h} + \frac{n+1}{2} \right)$$

wobei wir

$$f(x_i) = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j s_n \left(\frac{x_i - x_j}{h} + \frac{n+1}{2} \right), \qquad i = 0, \ldots, n+1$$

fordern. Für $n = 1, 2, 3$ zeigen Sie, daß die Spline-Basisfunktionen durch iterierte Faltung gegeben werden:

$$s_n = s_{n-1} \star s_0 \qquad \text{mit} \qquad [f \star g](x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt.$$

Hausaufgabe:

(D) *Kubische Splinefunktionen.* Für die Zwecke der Approximation der Lösungen von Differentialgleichungen – wie auch für viele andere Fälle – ist es notwendig, daß die Näherungsfunktionen wenigstens zweimal stetig diffenzierbar sind. Dies ist mit stückweise quadratischen Polynomen nicht möglich, es sei denn, die Daten sind so gelegen, daß ein einziges quadratisches Polynom ausreicht. Aus diesem Grund betrachten wir ein stückweise kubisches Polynom p bezüglich einem (nicht notwendigerweise äquidistanten) Gitter $\{x_i\}_{i=1}^{n}$, $a = x_1 < x_2 < \cdots x_{n-1} < x_n = b$, mit folgenden Eigenschaften:

$$p \in C^2([a,b]), \qquad p(x)\Big|_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3, \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

Solch eine Funktion heißt *kubische Splinefunktion*; der Name leitet sich her von “spline” = (Holz-)Feder, einem biegsamen Stab, mit dem Handwerker Kurven wechselnder Krümmung zeichnen.

Die Funktion p wird durch die Gleichungen

$$p(x) = p_i(x) = a_{i3}x^3 + a_{i2}x^2 + a_{i1}x + a_{i0}x, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad i = 1, \ldots, n-1$$

dargestellt. Die Bedingung $p \in C^2([a,b])$ sichert, daß p', p'' und p''' auf dem ganzen Intervall $[a,b]$ stetig sind. Deswegen muß

$$p_{i-1}(x_i) = p_i(x_i), \quad p'_{i-1}(x_i) = p'_i(x_i), \quad p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i), \quad i = 2, \ldots, n-1$$

gelten, womit wir $3n-6$ Bedingungen haben. Weil $4n-4$ unbekannte Koeffizienten a_{ij} für die Funktion p zu bestimmen sind, brauchen wir noch $n+2$ ergänzende Bedingungen. Wegen der beabsichtigten Interpolation oder Approximation fordern wir, daß p vorgegebene Werte annimmt:

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

womit wir n weitere Bedingungen gewonnen haben. Nunmehr fehlen noch zwei Bedingungen, und es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese aufzustellen. Die *natürlichen kubischen Splinefunktionen* genügen den zusätzlichen Begingungen

$$p''(x_1) = p''(x_n) = 0.$$

Die *befestigten kubischen Splinefunktionen* genügen den zusätzlichen Begingungen

$$p'(x_1) = f'(x_1), \qquad p'(x_n) = f'(x_n).$$

(Auf dem nächsten Übungsblatt, werden wir sehen, daß das Gleichungssystem für die Koeffizienten $\{a_{ij}\}$ eine tridiagonale Formulierung hat.)

Sei $f \in C^2([a,b])$ und zeigen Sie, daß die befestigte kubische Splinefunktion p die folgende Gleichung erfüllt:

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx - \int_a^b [p''(x)]^2 dx = \int_a^b [f''(x) - p''(x)]^2 dx.$$

Sei $q \in C^2([a,b])$ irgendeine interpolierende Funktion die erfüllt:

$$q(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n \qquad q'(x_1) = f'(x_1), \quad q'(x_n) = f'(x_n)$$

und zeigen Sie, daß die befestigte kubische Splinefunktion p die folgende Ungleichung erfüllt:

$$\int_a^b [p''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [q''(x)]^2 dx$$

was bedeutet, daß die befestigte kubische Splinefunktion von “minimaler Krümmung” ist.

Nun sei $r \in C^2([a,b])$ irgendeine kubische Splinefunktion, die die Bedingungen:

$$r \in C^2([a,b]), \qquad r(x)\Big|_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3, \quad i = 1, \ldots, n-1, \qquad r(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n$$

erfüllt, und zeigen Sie, daß die natürliche kubische Splinefunktion p die folgende Ungleichung erfüllt:

$$\int_a^b |p''(x)|^2 dx \leq \int_a^b |r''(x)|^2 dx.$$

(L) Mit Ihrem Code von der 3.Programmieraufgabe, führen Sie Polynom-Interpolation für die Werte der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

auf dem Gitter $\{x_i\}_{i=0}^8 = \{-1 + \frac{i}{4}\}_{i=0}^8 \subset [-1, 1]$ durch. Mit der Ableitungsannäherung

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} \qquad f'(x_8) \approx \frac{f(x_8) - f(x_7)}{x_8 - x_7}$$

führen Sie Hermite-Interpolation (von der 1.Aufgabe) für die Werte der Funktion f auf dem Gitter $\{x_i\}_{i=0}^8$ durch. Wenn Sie den Wert $f(0) = 1$ eine Abweichung von den anderen Werten $f(x \neq 0) = 0$ nehmen, werden Sie sehen, daß Hermite-Interpolation nur eine lokale Reaktion von der Abweichung hat, während Polynom-Interpolation eine globale Reaktion hat. Stellen Sie ihre Ergebnisse grafisch dar.