Proseminar Numerische Mathematik I (DIPL/LAK), SS 02

10. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 10. bzw. 13. Juni 2002

Tafelaufgaben:

1. Die folgende Tabelle gibt die Bevölkerungsentwicklung der USA wieder:

1790	3,9	1840	17,1	1890	62,9	1940	132,3
1800	5,3	1850	23,2	1900	76,2	1950	151,7
1810	7,2	1860	31,4	1910	92,0	1960	180,0
1820	9,6	1870	38,6	1920	106,0	1970	205,4
1830	13,0	1880	50,2	1930	123,0	1980	232,1

Bevölkerungswerte (in Millionen)

Ein Polynom zweiten Grades soll diesen Daten so angepaßt werden, daß die Summe der Fehlerquadrate minimal wird. Für das Polynom soll der Ansatz

$$p_2(t) = a_0 + a_1(t-b) + a_2(t-b)^2$$

mit $b = 1790$ verwendet werden. Geben Sie das entstehende überbestimmte Gleichungssystem an. Stellen Sie die Daten und p_2 zusammen grafisch dar.

2. Gegeben seien die Meßwerte:

t_k	0	1	2	5
z_k	4.0	3.0	2.0	1.0

In dem Ansatz

$$z(t) = a + be^{ct}$$

soll $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden. Geben Sie die notwendige Optimalitätsbedingung an. Dazu reicht es, die Matrix $DF(x)$ und den Vektor $F(x)$ anzugeben. Wie sieht die Iterationsmatrix des Newtonverfahrens für den Startwert $x_0 = (a_0, b_0, c_0) = (0, 0, 0)$ aus?

3. Erinnern Sie sich an die 1.Aufgabe auf dem 5.Übungsblatt (sowie an die L.Aufgabe auf dem 8.Übungsblatt). Nun betrachten Sie die Randwertaufgabe

$$-u''(x) + cu(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0$$

mit $c \geq 0$. Leiten Sie eine Diskretisierung dieser Randwertaufgabe

$$AU = F, \qquad U \approx \langle u(x_1), \ldots, u(x_n) \rangle, \qquad F \approx \langle f(x_1), \ldots, f(x_n) \rangle$$

mit $x_i = i/(n+1)$, $i = 0, \ldots, n+1$ her, und bestimmen Sie den Zusammenhang von c und $\kappa_2(A)$.

Hausaufgabe:

(D) (a) Zeigen Sie die geschlossene Darstellung der Tschebyscheffpolynome

$$T_k(x) = \frac{1}{2}\left[(x + \sqrt{x^2-1})^k + (x - \sqrt{x^2-1})^k\right], \; x \in \mathbb{R}, \; k \in \mathbb{N}.$$

(b) Zeigen Sie: Für n gerade ist T_n eine gerade Funktion und für n ungerade eine ungerade Funktion.

(L) Geben Sie eine Beispielmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\kappa_2(A) = \varepsilon^{-1}$ an. Definieren Sie ein $x^* \in \mathbb{R}^2$ und ein $b^* = Ax^*$, und finden Sie ein $x \in \mathbb{R}^2$ und ein $b = Ax$ so, daß $r = Ax - b^* = b - b^*$ die Gleichung

$$\|r\|_2 = \texttt{eps} \text{ (von } \texttt{MATLAB}) \quad \text{(d.h. } 2^{-p} \text{ vom 8.Blatt)}$$

erfüllt, während $\|x - x^*\|_2$ so groß wie möglich ist. Stellen Sie den Rand der Menge

$$B = \{b \in \mathbb{R}^2 : \|b - b^*\|_2 \leq \texttt{eps} \cdot \|b^*\|_2\}$$

grafisch dar. In der selben Grafik stellen Sie den Rand der Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = b,\ b \in B\}$$

(in Bezug auf ε) grafisch dar.

Programmieraufgabe:

Schreiben Sie ein Programm, das eine numerische Integration über ein gegebenes Intervall durchführt. Es soll möglich sein, eingegebene Daten oder eine beliebige Funktion zu integrieren. Es soll auch möglich sein, wahlweise die zusammengesetzte Trapez-Regel oder die zusammengesetzte Simpsons-Regel zu benutzen.

Verwenden Sie Ihren Code, um die Konvergenzrate der zwei Regeln zu demonstrieren. Insbesondere sollten Sie eine genügend glatte Funktion definieren, die analytisch integriert werden kann, und für die eine Abschätzung

$$|\text{analytisch} - \text{numerisch}(h)| = |\text{Fehler}(h)| = \mathcal{O}(h^m)$$

gilt. Dann wird die Konvergenzrate so abgeschätzt:

$$\log_2\left[\frac{|\text{Fehler}(2h)|}{|\text{Fehler}(h)|}\right] \approx \log_2\left[\frac{\mathcal{O}((2h)^m)}{\mathcal{O}(h^m)}\right] \approx \log_2(2^m) = m.$$

Durch eine Folge $\{h_i\}$ mit $h_i = 2h_{i+1}$ sollten Sie sehen, daß $\log_2[|\text{Fehler}(h_i)|/|\text{Fehler}(h_{i+1})|]$ nach m konvergiert.

Achten Sie auf folgende Punkte bei der Implementierung:

- Korrektheit,
- Logik,
- Dokumentation

Abgabe der numerischen Aufgabe: am 17. bzw. 20. Juni 2002.