**Proseminar Numerische Mathematik I (DIPL/LAK), SS 02**

**9. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 3. bzw. 6. Juni 2002**

---

**Tafelaufgaben:**

1. Seien $H_i^3$, $i = 0, \ldots, 3$, die kubischen Hermite-Basispolynome zu den Stützstellen $t_0, t_1$, d.h. es gelte

$$\begin{array}{llll} H_0^3(t_0) = 1, & \frac{d}{dt}H_0^3(t_0) = 0, & H_0^3(t_1) = 0, & \frac{d}{dt}H_0^3(t_1) = 0, \\ H_1^3(t_0) = 0, & \frac{d}{dt}H_1^3(t_0) = 1, & H_1^3(t_1) = 0, & \frac{d}{dt}H_1^3(t_1) = 0, \\ H_2^3(t_0) = 0, & \frac{d}{dt}H_2^3(t_0) = 0, & H_2^3(t_1) = 1, & \frac{d}{dt}H_2^3(t_1) = 0, \\ H_3^3(t_0) = 0, & \frac{d}{dt}H_3^3(t_0) = 0, & H_3^3(t_1) = 0, & \frac{d}{dt}H_3^3(t_1) = 1. \end{array}$$

$\{H_i^3\}_{i=0}^3$ bildet neben $B = \{1, t, t^2, t^3\}$ eine Basis von $\mathbb{P}_3$. Geben Sie für $t_0 = 0,\ t_1 = 1$ die $\{H_i^3\}_{i=0}^3$ und die Matrix des Basiswechsels von $\{H_i^3\}_{i=0}^3$ auf $B$ an.

2. Mit Hilfe von der 1.Aufgabe, interpolieren Sie $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ durch ein Polynom $p$ so, daß

$$\left.\begin{array}{lcl} p^{(k)}(0) & = & f^{(k)}(0), \\ p^{(k)}(1) & = & f^{(k)}(1), \end{array}\right\} \quad k = 0, 1.$$

Mit Hilfe von der Fehlerabschätzung

$$|f(x) - p(x)| \le \frac{1}{(n+1)!} \max_{0 \le \xi \le 1} |f^{(n+1)}(\xi)| \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$$

mit $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 1$ (d.h. die Knoten haben Vielfachheit 2), geben Sie eine Abschätzung für den Interpolationsfehler im Intervall $[0, 1]$ an.

3. Wir erinnern uns an die L.Aufgabe und die zugehörige Programmieraufgabe im 4.Übungsblatt. Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$u''(x) = -\frac{1}{2}\lambda e^{u(x)}, \quad x \in (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

mit $\lambda \ge 0$. Diskretisierung führt auf das folgende nichtlineare Gleichungssystem:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = -\frac{1}{2}\lambda e^{u_i},$$
$$u_0 = u_{N+1} = 0$$

mit $h = \frac{1}{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$, $x_i = ih$, $u_i = u(x_i)$, $i = 0, \ldots, N+1$. Wir haben das Gleichungssystem als Nullstellenproblem $F(u) = 0$ geschrieben und das Newtonverfahren

$$DF(u^{n+1})[u^{n+1} - u^n] = -F(u^n)$$

implementiert. Wir haben auch entdeckt, daß das Verfahren

$$R[u^{n+1} - u^n] = -F(u^n) \qquad R \approx DF(u^{n+1})$$

schlecht funktioniert wenn $R = I$. Betrachten Sie jetzt die diagonale Matrix $R = \rho I$, $\rho \in \mathbb{R}$, und schreiben Sie die Iteration in der Form:

$$u^{n+1} = \Phi(u^n).$$

Verwenden Sie die Abschätzung $\lambda_{\max}(D\Phi(u)) \le \|D\Phi(u)\|_\infty$ von der 3.Aufgabe im 8.Übungsblatt, um eine Konstante $\rho$ zu finden, damit $\lambda_{\max}(D\Phi(u)) \le \gamma < 1$ gilt und daher die Iteration konvergiert.

**Hausaufgabe:**

(D) Seien $a \leq t_0 < t_1, \ldots < t_n \leq b$ paarweise verschiedene Knoten und $L_{in}$ die zugehörigen Lagrange-Polynome. Dann ist die absolute Kondition $\kappa_{abs}$ der Polynominterpolation

$$\phi = P(\cdot|t_0, \ldots, t_n) : C[a,b] \to \mathbb{P}_n$$

bezüglich der Supremumsnorm die Lebesgue-Konstante

$$\kappa_{abs} = \Lambda_n := \max_{t \in [a,b]} \sum_{i=0}^{n} |L_{in}(t)|$$

für die Knoten $t_0, \ldots, t_n$. $\Lambda_n(K, I)$ bezeichne die Lebesguekonstante bezüglich der Knotenmenge $K$ auf dem Intervall $I$.

(a) Seien $K = \{t_0, \ldots, t_n\} \subset I = [a, b]$ paarweise verschiedene Knoten. Die Affintransformation

$$\chi : I \to I_0 = [-1, 1], \quad t \to \frac{2t - a - b}{b - a}$$

dieses Intervalls auf das Einheitsintervall $I_0$ bilde die Knotenmenge $K$ auf die Knotenmenge $K_0 = \chi(K)$ ab. Zeigen Sie, daß die Lebesguekonstante invariant unter dieser Transformation ist, d.h.

$$\Lambda_n(K, I) = \Lambda_n(K_0, I_0).$$

(b) Seien $K = \{t_0, \ldots, t_n\}$ mit $a \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq b$ Knoten im Intervall $I = [a, b]$. Geben Sie die Affintransformation

$$\chi : [t_0, t_n] \to I$$

auf $I$ an, so daß für $\bar{K} = \chi(K) = \{s_0, \ldots, s_n\}$ gilt

$$a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b.$$

Zeigen Sie, daß

$$\Lambda_n(\bar{K}, I) \leq \Lambda_n(K, I),$$

d.h. die Einbeziehung der Randknoten verbessert die Lebesguekonstante.

(L) Erinnern Sie sich an die L.Aufgabe im 5.Übungsblatt.

a) Zeigen Sie: Zu den $2n + 1$ Stützpunkten $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} < a + 2\pi$ und den Stützwerten $f_0, f_1, \ldots, f_{2n}$ existiert höchstens ein trigonometrisches Interpolationspolynom vom Grad $n$ der Form

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$$

mit $p(x_k) = f_k$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine $2\pi$-periodische Funktion und besitze die absolut konvergente Fourierreihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)).$$

Für die trigonometrische Interpolationsfunktion

$$p(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{m} (A_j \cos(jx) + B_j \sin(jx))$$

gelte für $k = 0, \ldots, 2m$

$$p_n(x_k) = f(x_k) \text{ mit } x_k = \frac{2\pi k}{2m+1}.$$

Zeigen Sie die folgende Approximationseigenschaften für die Fourierkoeffizienten von $f$:

$$\begin{aligned} A_k &= a_k + \sum_{l=1}^{\infty} a_{l(2m+1)+k} + a_{l(2m+1)-k} \text{ für } 0 \leq k \leq m, \\ B_k &= b_k + \sum_{l=1}^{\infty} b_{l(2m+1)+k} - b_{l(2m+1)-k} \text{ für } 0 \leq k \leq m-1. \end{aligned}$$