Proseminar Numerische Mathematik I (DIPL/LAK), SS 02

8. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 27. bzw. 30. Mai 2002

Tafelaufgaben:

1. Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} 0.832x_1 + 0.448x_2 &= 1.00 \\ 0.784x_1 + 0.421x_2 &= 0.00. \end{aligned}$$

   (a) Berechnen Sie eine Näherungslösung $\tilde{x}$, wobei Sie annehmen, dass wir mit einem dreistelligen Rechner arbeiten. Vergleichen Sie $\tilde{x}$ mit der exakten Lösung innerhalb der Rechengenauigkeit. Wie groß ist die Abweichung in % ?

   (b) Geben Sie die Matrix $\tilde{A} \in R^{2\times 2}$ an mit Elementen $\tilde{a}_{ij}$, $1 \le i, j \le 2$, und $\tilde{a}_{11} = 0.832$, $\tilde{a}_{21} = 0.783744$, so dass

$$\tilde{A}\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   erfüllt ist. Wie groß ist die prozentuale Abweichung zwischen den Elementen von A und $\tilde{A}$?

2. Nehmen Sie an, dass Zahlen eine binäre Darstellung in Ihrem Computer haben:

$$x = \pm \sum_{k=0}^{p} a_k 2^{-k} \times 2^e, \qquad a_k \in \{0, 1\}.$$

   Betrachten Sie den folgenden MATLAB Code:

```
function [u,p] = unit
    x = 1.0;
    u = 1.0;
    while (x+u ~= x) u = u/2.0; end;
    u = 2.0*u;
    p = log2(d);
```

   Es folgt davon, dass $1 + 2^{-p} \neq 1$ und $1 + 2^{-(p+1)} = 1$ gelten. Ähnlich für $x = 2^n$ gelten $x + 2^{n-p} \neq x$ und $x + 2^{n-(p+1)} = x$. Nun seien:

$$f(x) = \tanh[a(x - x_0)], \qquad x_0 = 2^5 + 2^{4-p}.$$

   Nehmen Sie an, dass die Lösung x_0 der Nullstellengleichung $f(x) = 0$ durch eine konvergierende Iteration $x_{k+1} = \phi(x_k)$ gesucht wird.

   (a) Bestimmen Sie die Werte x_1 und x_2, die sich in der Computerdarstellung am nächsten zu x_0 befinden, damit $x_0 \in (x_1, x_2)$ gilt.

   (b) Bestimmen Sie die kleinsten α, ε und δ, so dass die Abbruchkriterien

$$|x_{k+1} - x_k| \le \alpha, \qquad |x_{k+1} - x_k| \le \varepsilon |x_{k+1}|, \qquad |f(x_{k+1})| \le \delta$$

   funktionieren können.

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ der betragsmäßig größte bzw. kleinste Eigenwert von A. Zeigen Sie: Für jede mit einer Vektornorm verträgliche Matrixnorm gelten:

$$\lambda_{\max} \le \|A\| \quad \text{und} \quad \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \le \kappa(A).$$

Hausaufgabe:

(D) Betrachten Sie das System der Eigenfunktionen und Eigenwerte $\{y_k, \mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ die erfüllen:

$$\begin{cases} -y_k''(x) = \mu_k y_k(x) \qquad 0 < x < 1 \\ \\ y_k(0) = y_k(1) = 0. \end{cases}$$

Nun betrachten Sie die Annäherung der zweiten Ableitung auf dem Gitter:

$$x_i = \frac{i}{n+1}\ , \quad i = 0, \dots, n+1\ , \quad h = \frac{1}{n+1}$$

die durch die folgende positiv definite symmetrische Matrix gegeben wird:

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in R^{n \times n}.$$

Seien $\{v_k, \lambda_k\}_{k=1}^{n}$ die Eigenvektoren und Eigenwerte für A:

$$Av_k = \lambda_k v_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass wenn $h \to 0$:

$$\lambda_k \to \mu_k \quad \text{und} \quad (v_k)_i \to y_k(x_i).$$

(L) Sei $A = \{a_{ij}\} \in R^{n \times n}$ die Hilbertmatrix mit

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1},\ 1 \le i, j \le n.$$

Mit MATLAB definieren wir:

$$x^* = (1, 1, \dots, 1)^T \quad \text{und} \quad b = Ax^*.$$

Seien x_1 die Backslash-Lösung der Gleichung $Ax_1 = b$ und x_2 die Backslash-Lösung der Normalgleichung $Qx_2 = c$ mit $Q = A^T A$ und $c = A^T b$. Benutzen Sie MATLAB und machen Sie eine Tabelle:

n	$\|x_1 - x^*\|/\|x^*\|$	$\|Ax_1 - b\|$	$\kappa(A)$	$\|x_2 - x^*\|/\|x^*\|$	$\|Qx_2 - c\|$	$\kappa(Q)$
5	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

für $n = 5, \dots, 15$. Interpretieren Sie Ihre Resultate. Erklären Sie δb in der folgenden Ungleichung:

$$\frac{\|x_1 - x^*\|}{\|x^*\|} \le \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

Programmieraufgabe:

Schreiben Sie ein Programm um die Funktion $f(x) = \sin(2\pi x) + \sqrt{x^2+9}$ zu interpolieren:

1. auf einem äquidistanten Gitter:

$$x_i = -7 + \frac{14i}{n}\ , \quad i = 0, \ldots, n$$

2. auf einem Gitter mit den Tschebyscheff-Knoten:

$$x_i = 7\cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)\ , \quad i = 0, \ldots, n$$

für $n = 41, 43, \ldots, 71$. Implementieren Sie die folgenden Methoden:

a. Algorithmus von Neville,

b. Lösung des Vandermonde Systems,

um das Interpolationspolynom (in jedem Fall $\{1a, 1b, 2a, 2b\}$) zusammen mit $f(x)$ graphisch (`axis([-7 7 1 9])`) darzustellen.

Um die zweite Methode zu implementieren, lösen Sie das Vandermonde System $Va = f$ mit der sogenannten Vandermonde Matrix V:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

oder:

$$f(x_i) = p_n(x_i) = \sum_{j=1}^{n} x_i^j a_j \qquad i = 0, \ldots, n$$

für die Koeffizienten $\{a_j\}$ und werten Sie

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

aus. Berichten Sie $\kappa(V)$ und $\|Va - f\|$ für jedes n.

Achten Sie auf folgende Punkte bei der Implementierung:

- Korrektheit,
- Logik,
- Dokumentation

Abgabe der numerischen Aufgabe: am 3. bzw. 6. Juni 2002.