

Proseminar Numerische Mathematik I (DIPL/LAK), SS 02

6. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 13. bzw. 16. Mai 2002

Tafelaufgaben:

- Die zweite Ableitung einer Funktion f an der Stelle x soll durch die Ableitung eines quadratischen Interpolationspolynoms mit äquidistanten und zu x symmetrischen Stützstellen approximiert werden.
 - Wie lautet der entstehende dividierte Differenzenquotient $f[x - h, x, x + h]$?
 - Zeigen Sie für $f \in C^4[a, b]$:

$$f[x - h, x, x + h] = \frac{f''(x)}{2!} + O(h^2).$$

- Die Funktion $f(x) = 1/(1 + x^2)$ soll im Intervall $[0, 1]$ durch ein Polynom zweiten Grades durch die Stützstellen $x_0 = 0.0, x_1 = 0.5, x_2 = 1.0$ interpoliert werden.
 - Geben Sie das Interpolationspolynom p_2 an.
 - Geben Sie eine Abschätzung des Fehlers an der Stelle $x = 0.8$ mit Hilfe eines Satzes aus der Vorlesung an und vergleichen Sie den tatsächlichen Fehler mit dieser Abschätzung. Interpretieren Sie das Ergebnis.

- Zeigen Sie die Eigenschaften der Tschebyscheffpolynome:

$$T_n(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_k = \cos\left(\frac{2k + 1}{2} \frac{\pi}{n}\right) \quad k = 0, \dots, n - 1$$

$$T_n(x) = (-1)^k \quad \Leftrightarrow \quad x = y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad k = 0, \dots, n$$

Hausaufgabe:

- Zeigen Sie: Die Folge der Interpolationspolynome $\{p_n(f; t_0, \dots, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f = \sin(\pi x)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$, wenn für die t_i die Tschebyscheff-Knoten

$$t_i = \cos\left(\frac{(2i + 1)\pi}{2n + 2}\right), \quad i = 0, \dots, n,$$

gewählt werden.

- Leiten Sie für die kubische Interpolation bei äquidistantem Gitter mit Teilintervalllänge h eine Abschätzung für den Interpolationfehler her. Unterscheiden Sie die Fälle, dass x in dem inneren bzw. in den beiden äußeren Teilintervallen liegt. Hinweis: Wählen Sie die Stützstellen symmetrisch zu $x = 0$.

Programmieraufgabe:

Schreiben Sie ein Programm, das für beliebig vorgegebene Stützstellen und Funktionswerte (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, das zugehörige Interpolationspolynom n -ter Ordnung bestimmt. Das Polynom soll in Newtonscher Darstellung ausgegeben und graphisch dargestellt werden. Es soll möglich sein, anschließend weitere Stützstellen und Funktionswerte hinzuzufügen.

Achten Sie auf folgende Punkte bei der Implementierung:

- Korrektheit,
- Logik,
- Dokumentation

Abgabe der numerischen Aufgabe: am 20. bzw. 23. Mai 2002.