**Proseminar Numerische Mathematik I (DIPL/LAK), SS 02**

**5. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 29. April bzw. 2. Mai 2002**

---

**Tafelaufgaben:**

1. Wir betrachten die positiv definite Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

   Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $A$ durch

$$\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{k\pi}{n+1},\ k = 1, \cdots, n,$$

   und die zugehörigen Eigenvektoren durch

$$v_k = \left(\sin\frac{k\pi}{n+1}, \sin\frac{2k\pi}{n+1}, \cdots, \sin\frac{nk\pi}{n+1}\right)^T \in R^n$$

   gegeben sind. Mit anderen Worten: Zeigen Sie $Av_k = \lambda_k v_k$ für $k = 1, \cdots, n$.

2. Sei $A$ durch die 1. Aufgabe gegeben. Beweisen Sie, dass

$$\kappa_2(A) = O(n^2)$$

   gilt.

   Hinweis: Sehen Sie Aufgabe (D). Für kleines $x$ läßt sich der Kosinus durch die Taylorentwicklung

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \quad (x \to 0)$$

   approximieren.

3. Das Newtonverfahren kann auch zur Lösung des Eigenwertproblems

$$Ax = \lambda x,\ x \neq 0,$$

   mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verwendet werden. Dabei sollen gleichzeitig ein Eigenwert und ein zugehöriger Eigenvektor mit $\|x\|_2^2 = x^T x = 1$ bestimmt werden. Wie lautet die Iterationsvorschrift?

**Hausaufgabe:**

(D) Für $f, g\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sind die *Landau - Symbole* wie folgt definiert:

$$\begin{array}{llllll} f = O(g) & (x \to \bar{x}) & :\Leftrightarrow \exists c > 0 & \exists U(\bar{x}) & \forall x \in U(\bar{x}): & |f(x)| \leq c|g(x)| \\ f = o(g) & (x \to \bar{x}) & :\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 & \exists U(\bar{x}) & \forall x \in U(\bar{x}): & |f(x)| \leq \epsilon|g(x)| \end{array}$$

Zeigen Sie:

(a) $f = o(1)\ (x \to \bar{x}) \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) = 0$

(b) $f = o(g)\ (x \to \bar{x}) \;\Rightarrow\; f = O(g)\ (x \to \bar{x})$

(c) Folgende drei Aussagen sind äquivalent:

$$\begin{array}{lll} (i) & f = O(o(g)) & (x \to \bar{x}) \\ (ii) & f = o(O(g)) & (x \to \bar{x}) \\ (iii) & f = o(g) & (x \to \bar{x}) \end{array}$$

(d) Gilt die folgende Aussage für beliebige $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$?

$$f = o(x^n)\ (x \to \bar{x}) \;\Rightarrow\; f = O(x^{n+1})\ (x \to \bar{x})$$

(L) Im Intervall $[0, 2\pi]$ seien die $N$ äquidistanten Stützstellen

$$x_j = \frac{2\pi(j-1)}{N}, \quad 1 \leq j \leq N,$$

gegeben. Sei $n = 2m + 1 \leq N$. Zeigen Sie: Die Vektoren

$$\begin{array}{rcll} g_1 & = & \big(1, \ldots, 1\big), & \\ g_{2l} & = & \big(\cos(lx_1), \cos(lx_2), \ldots, \cos(lx_N)\big), & 1 \leq l \leq m, \\ g_{2l+1} & = & \big(\sin(lx_1), \sin(lx_2), \ldots, \sin(lx_N)\big), & 1 \leq l \leq m, \end{array}$$

bilden ein Orthogonalsystem im $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{array}{rcll} \langle g_i, g_j \rangle & = & 0, & i \neq j, \\ \langle g_1, g_1 \rangle & = & N, & \\ \langle g_j, g_j \rangle & = & N/2, & 1 < j \leq n. \end{array}$$

Hinweis: Betrachten Sie die Eulerschen Formeln:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \qquad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$