Proseminar Numerische Mathematik I (DIPL/LAK), SS 02

4. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 22. bzw. 25. April 2002

Tafelaufgaben:

1. Die Gleichung $x + \ln x = 0$, deren Wurzel $a \approx 0.5$ ist, soll iterativ gelöst werden. Wählen Sie unter folgenden Iterationsformeln:

$$(a)\, x_{n+1} = -\ln x_n, \;(b)\, x_{n+1} = e^{-x_n}, \;(c)\, x_{n+1} = (x_n + e^{-x_n})/2$$

   (a) Welche Formel oder welche Formeln können benutzt werden?

   (b) Welche sollte benutzt werden?

   (c) Geben Sie eine noch bessere Formel an!

2. (a) Wieviele Iterationsschritte sind notwendig, wenn in der 1. Aufgabe mit der dritten Iterationsvorschrift und dem Startwert $x_0 = 1$ gerechnet wird, um den Fixpunkt mit einer Genauigkeit von $\epsilon \leq 10^{-8}$ zu berechnen?

   (b) Geben Sie für dasselbe Verfahren wie in (a) ein Abbruchkriterium an: Wie weit dürfen zwei nachfolgende Iterierte x^k, x^{k-1} höchstens auseinanderliegen, damit x^k den Fixpunkt mit der Genauigkeit $\epsilon \leq 10^{-8}$ approximiert?

3. Eine Wurzel der Gleichung $x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = 0$ soll in der Nähe von $x = 4$ iterativ berechnet werden. Wählen Sie k in der folgenden Iterationsformel so, dass eine schnelle Konvergenz erreicht wird, und berechnen Sie die Wurzel auf 4 korrekte Dezimalen.

$$x_{n+1} = \frac{3 + (k-4)x_n + 5x_n^2 - x_n^3}{k}.$$

Hausaufgabe:

(D) Es liege eine k-fache Nullstelle $x^* \in \mathbb{R}$ einer Funktion $f \in C^k(\mathbb{R})$ vor. Zeigen Sie, dass das folgende Verfahren lokal mindestens die Konvergenzordnung $p = 2$ hat:

$$x^{n+1} = \begin{cases} x^n - kf(x^n)/f'(x^n), & x^n \neq x^*, \\ x^*, & x^n = x^*. \end{cases}$$

(L) Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$u''(x) = -\frac{1}{2}\lambda e^{u(x)}, \quad x \in (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

mit $\lambda \geq 0$. Diskretisierung führt auf folgendes nichtlineares Gleichungssystem:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = -\frac{1}{2}\lambda e^{u_i},$$
$$u_0 = u_{N+1} = 0$$

mit $h = \frac{1}{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$, $x_i = ih$, $u_i = u(x_i)$, $i = 0, \ldots, N+1$. Schreiben Sie das Gleichungssystem als Nullstellenproblem

$$F(u) = 0$$

und geben Sie die Funktionalmatrix $DF(u)$ an.

Welche MATLAB-Funktion ist zur Zerlegung von $DF(u)$ am besten geeignet?

Programmieraufgabe:

Lösen Sie das nichtlineare System aus der Aufgabe (L) mit dem Newtonverfahren für $N = 10$ und einen beliebigen Wert von $\lambda \geq 0$. Die linearen Gleichungssysteme sollen mit den am besten geeigneten MATLAB-Funktionen faktorisiert und gelöst werden. Dabei soll es möglich sein, wahlweise

1. in jedem Iterationsschritt die Funktionalmatrix neu zu berechnen,
2. jeweils nach einer frei wählbaren Anzahl von Iterationsschritten dies zu tun,
3. immer mit der Funktionalmatrix des Startwertes zu iterieren,
4. statt der Funktionalmatrix die Einheitsmatrix zu benutzen.

Für jeden Wert von λ gibt es zwei Lösungen. Versuchen Sie, diese durch die Wahl verschiedener Startwerte zu finden, und geben Sie die Anzahl der Iterationsschritte sowie den Lösungsvektor graphisch als Paare (x_i, u_i) aus. Sie können dazu die MATLAB-Funktion `plot` verwenden. Interessant ist auch das Lösungsverhalten für eine steigende Folge (λ_n).

Achten Sie auf folgende Punkte bei der Implementierung:

- Korrektheit,
- Logik,
- Dokumentation

Abgabe der numerischen Aufgabe: am 29. April 2002 bzw. 2. Mai 2002.