Proseminar Numerische Mathematik I (DIPL/LAK), SS 02

3. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 15. bzw. 18. April 2002

Tafelaufgaben:

1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1.6384 & 0.8065 \\ 0.8321 & 0.4096 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.8319 \\ 0.4225 \end{pmatrix}.$$

   Bestätigen Sie, daß $(1, -1)^T$ die exakte Lösung von $Ax = b$ ist. Bestimmen Sie für $r(\bar{x}) = A\bar{x} - b$ ein $\bar{x}$, so daß exakt $r = (10^{-8}, 10^{-8})^T$ gilt. Berechnen Sie $\kappa_\infty(A)$. Wie klein sollte der relative Fehler in A sein, damit die Lösung bei exaktem b mit Sicherheit einen relativen Fehler kleiner als 10^{-8} besitzt.

   Hinweis: Nutzen Sie die Abschätzung

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x + \Delta x\|_\infty} \le \kappa_\infty(A) \frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty},$$

   wobei $Ax = b$ und $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$ gelten.

2. (a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und symmetrisch. Zeigen Sie:

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}},$$

   wobei

$$\lambda_{\max} = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

   und

$$\lambda_{\min} = \min\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}.$$

   (b) Für nichtsymmetrische Matrizen ist $|\lambda_{\max}/\lambda_{\min}|$ ein schlechtes Konditionsmaß. Betrachten Sie dazu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1.00001 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1.00001 \end{pmatrix}$$

   und zeigen Sie: $\kappa_2(A) = \kappa_2(B)$, aber

$$\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} \ll \frac{\lambda_{\max}(B)}{\lambda_{\min}(B)}.$$

3. Eine Matrix, bei der die Betragssummen aller Zeilen gleich sind, heißt "zeilenäquilibriert". Zeigen Sie:

   (a) Durch Linksmultiplikation mit einer regulären Diagonalmatrix kann jede reguläre Matrix in eine zeilenäquilibrierte mit Zeilensumme 1 transformiert werden.

   (b) Ist A zeilenäquilibriert, so gilt für jede reguläre Diagonalmatrix D

$$\kappa_\infty(A) \;\leq\; \kappa_\infty(DA),$$

   wenn die Kondition bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$–Norm berechnet wird.

   (c) Interpretieren Sie die Aussage in (b).

Hausaufgabe:

(D) Seien $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\|.\|$ die einer Vektornorm zugeordnete Matrixnorm. Nehmen Sie an:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|T^i\| < \infty. \tag{1}$$

Zeigen Sie:

   (a) $I - T$ ist bijektiv,

   (b) $(I-T)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} T^i$.

   (c) Gilt $\|T\| < 1$, so ist (1) erfüllt. Zeigen Sie:

$$\|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}.$$

(L) Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\|.\|$ die einer Vektornorm zugeordnete Matrixnorm. Mit $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ werde die "näherungsweise Inverse" von A bezeichnet, d.h. es gelte $\|R\| < 1$ für $R := AC - I$. Zeigen Sie:

   (a) A und C sind regulär.

   (b) Für A^{-1} gilt

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|C\|}{1-\|R\|}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Aufgabe (D)!