Proseminar Numerische Mathematik I (DIPL/LAK), SS 02

2. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 8. bzw. 11. April 2002

Tafelaufgaben:

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie die folgende Aussage: Die durch
$$\|A\|_F := \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\Big)^{1/2}$$
definierte Abbildung $\|\cdot\|_F : \mathbb{R}^{n\times n} \mapsto \mathbb{R}^+$ ist eine Norm auf dem $\mathbb{R}^{n\times n}$ und ist mit der euklidischen Vektornorm verträglich. Die Matrixnorm heißt *Frobeniusnorm*.

2. Berechnen Sie die Kondition der Hilbertmatrix $A = (a_{ij})$ mit
$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \ 1 \le i, j \le n$$
bzgl. der $\|\cdot\|_1$-Norm für $n = 2$ und $n = 3$ und bzgl. der $\|\cdot\|_2$-Norm für $n = 2$.

   Geben Sie eine Abschätzung für die Kondition einer Eliminationsmatrix L_k beim Gaußalgorithmus mit Spaltenpivotsuche an!

3. a) In der 3. Aufgabe wurde die Frobeniusnorm $\|\cdot\|_F$ eingeführt. Beweisen Sie, dass die Frobeniusnorm einer Matrix invariant gegenüber orthogonalen Multiplikationen ist.

   b) Geben Sie eine vollbesetzte reguläre 3×3-Matrix an, für die die LR-Zerlegung ohne Pivotstrategie nicht durchführbar ist.

Hausaufgabe:

(D) Mit $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le m} |x_i|$ bezeichnen wir die *Maximumnorm* im $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass die durch
$$\|A\|_Z = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{für } A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$
definierte Zeilensummennorm die zur Maximumnorm zugeordnete Grenzennorm ist.

(L) Bei der Diskretisierung der zweiten Ableitung einer Funktion (etwa zur Lösung eines Randwertproblems gewöhnlicher Differentialgleichungen) auf einem äquidistanten Gitter $x_j = j/n, j = 0, \ldots, n$, tritt die folgende tridiagonale Matrix auf:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

   a) Weisen Sie nach, dass A positiv definit ist.

b) Geben Sie die die Cholesky-Zerlegung von A explizit an.

Programmieraufgabe:

Schreiben Sie eine Funktion zur Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dabei soll es möglich sein, zwischen

a) der Benutzung der MATLAB Funktion `lu` mit Pivotstrategie,

b) der Verwendung von \ ,

c) einer selbst implementierten LR-Zerlegung ohne Pivotsuche,

d) einer Cholesky-Zerlegung unter Benutzung der MATLAB Funktion `chol` sowie

e) einer von Ihnen implementierten Cholesky-Zerlegung für eine Tridiagonalmatrix

zu wählen. Außerdem soll es möglich sein, das System für mehrere rechte Seiten b zu lösen, ohne die Zerlegung zu wiederholen. Zur Ersparnis von Speicherplatz soll in (c) und (e) die Matrix A dabei mit den Elementen von L und gegebenenfalls R überschrieben werden.

Als Hilfe sei hier als Musterbeispiel ein Funktionskopf angegeben:

```
% LES Linear Equation Solve.
%   [X,time]=LES(A,b,flag) computes the solution
%   to the linear system
%                         A*X=B,
%   where A must be a square non-singular matrix and B a
%   right-hand site with appropriate dimension. The solution
%   is stored in the variable X. The variable time contains
%   the CPU time measured in ms. By the variable flag the
%   user should choose one of the following methods for
%   computing X:
%
%   flag='a': Use MATLAB routine lu with partial pivoting.
%   flag='b': Apply MATLAB operation \.
%   flag='c': Utilize the own LU-factorization without pivoting.
%   flag='d': Use the MATLAB routine chol.
%   flag='e': Apply the own Cholesky solve for tridiagonal
%             matrices.
function [X,time]=les(A,B,flag)
```

Bei der Diskretisierung der zweiten Ableitung einer Funktion (etwa zur Lösung eines Randwertproblems gewöhnlicher Differentialgleichungen) auf einem äquidistanten Gitter $x_i = i/n$,

$j = 0, \ldots, n$, tritt die folgende tridiagonale Matrix auf:

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

Wenden Sie Ihre Programme auf die Matrix A an mit

$$\begin{aligned} b_i &= x_i, \; i = 2, \ldots, n-1, \\ b_i &= x_i^2, \; i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

jeweils für verschiedene Werte von n. Vergleichen Sie die CPU-Zeiten (MATLAB-Funktion `cputime`) für das Beispiel bei beiden Cholesky-Zerlegungen und unterschiedlichen Werte von n.

Achten Sie auf folgende Punkte bei der Implementierung:

- Korrektheit,
- Logik,
- Dokumentation

Abgabe der numerischen Aufgabe: am 15. bzw. 18. April 2002.