Proseminar Numerische Mathematik I (DIPL/LAK), SS 02

1. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 21. März 2002

Tafelaufgaben:

1. Das Gleichungssytem

$$\begin{pmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} & 1 \\ 10^{-5} & -10^{-5} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^{-5} \\ -2 \cdot 10^{-5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

   wird in einer Arithmetik mit drei dezimalen Ziffern gelöst. Wie lautet das Resultat

   a) exakt?
   b) ohne Pivotsuche?
   c) mit Spaltenpivotsuche?
   d) mit totaler Pivotsuche?

   Kommentieren Sie Ihr Ergebnis.

2. Berechnen Sie die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche für folgende zwei Matrizen, d.h., geben Sie jeweils eine linke untere Dreiecksmatrix L (mit Diagonalelementen $l_{ii} = 1$), eine rechte obere Dreiecksmatrix R sowie eine Permutationsmatrix P an, so dass gilt

$$PA = LR \text{ bzw. } PB = LR.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Schreiben Sie einen MATLAB–Code, der die Gauß-Elimination ohne Pivotstrategie für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durchführt. Benutzen Sie dabei nicht die in MATLAB vordefinierte Funktion `lu`. Verwenden Sie möglichst wenig `for`–Schleifen.

Hausaufgabe:

(D) Es liege eine symmetrische reelle $(n \times n)$-Matrix A als zweidimensionales Feld gespeichert vor. Diese Matrix soll im sog. *Lower-Packed Storage Mode* gespeichert werden, d.h., es wird der untere dreieckige Teil inklusive der Diagonalen in einem eindimensionalen Feld abgelegt, und zwar *spaltenweise*. Die Matrix wird also Spalte für Spalte in einen Vektor gepackt.

(a) Schreiben Sie einen Pseudocode für einen Algorithmus, der dieses Umspeichern in den Lower-Packed Storage Mode mit möglichst wenig Operationen realisiert.

(b) Wieviel Elemente hat das eindimensionale Feld?

(c) Geben Sie die Abbildung zur Umrechnung der Indizes an: Welchen Index im eindimensionalen Feld hat das Matrixelement a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$.

(L) Zeigen Sie: Existiert eine LR–Zerlegung der Matrix A ohne Permutationen und mit der Festsetzung $l_{ii} = 1$ für $i = 1, \ldots, n$, so ist diese eindeutig.