Numerische Mathematik 2, Übungen, WS15/16, Blatt 14

Bearbeitung: Hausaufgaben bis 28.1.2016

Hausaufgaben

1. Mit

$$\pi_0(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnen Sie die kanonische Spline-Funktion $\pi_1(x)$ explizit durch die Faltung

$$\pi_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi_{k-1}(x-y)\pi_0(y)dy, \quad k = 1, 2, \dots \tag{1}$$

(Hinweis: Sehen Sie Seite 157 im Skriptum `http://math.uni-graz.at/keeling/num1_ws14/numerik.pdf`.) Mit $x_i = ih$, $i \in \mathbb{Z}$, $h > 0$, $\boldsymbol{x} = \{x_i\}_{i=0}^N$, ist eine Basis für

$$\mathcal{S}^k(\boldsymbol{x}) = \{s \in \mathcal{C}^{k-1}([x_0, x_N]) : s \in \mathcal{P}^k([x_{i-1}, x_i]), 1 \le i \le N\}$$

($\mathcal{P}^k(\Omega) = \{$Polynome k'ten Grades in $\Omega\}$) gegeben mit (1) durch

$$s_{k,i}(x) = \pi_k((x - x_i)/h), \quad i = -k, \dots, N-1. \tag{2}$$

(a) Eine Funktion $u(x)$ mit den Werten $\{u(x_i)\}_{i=0}^N$ soll so interpoliert werden:

$$u(x) \approx s_u(x) = \sum_{i=-1}^{N-1} u_i s_{1,i}(x), \quad u(x_i) = s_u(x_i), \quad i = 0, \dots, N.$$

Schreiben Sie ein System zur Bestimmung der Koeffizienten $\boldsymbol{u} = \{u_i\}_{i=-1}^{N-1}$.

(b) Eine Funktion $v(x) = \sum_{i=0}^{N-1} v_i s_{0,i}(x)$ soll so approximiert werden

$$v(x) \approx s_v(x) = \sum_{i=-1}^{N-1} b_i s_{1,i}(x), \quad \int_{x_0}^{x_N} v(x) s_{1,j}(x)dx = \int_{x_0}^{x_N} s_v(x) s_{1,j}(x)dx, \quad j = -1, \dots, N-1.$$

Schreiben Sie ein System zur Bestimmung der Koeffizienten $\boldsymbol{b} = \{b_i\}_{i=-1}^{N-1}$.
(Hinweis: Sehen Sie Seiten 254-257 im Skriptum `http://math.uni-graz.at/keeling/num1_ws14/numerik.pdf`.)

2. Für ein gegebenes $f \in L^2(0,1)$ und $\mu > 0$ soll das Randwertproblem gelöst werden:

$$\begin{cases} -\mu u'' + u &= f, \quad 0 < x < 1 \\ \qquad\quad u' &= 0, \quad x = 0, 1 \end{cases} \tag{3}$$

Leiten Sie die schwache Formulierung dieses Problems her:

$$a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in H^1(0, 1)$$

$$a(u, v) = \int_0^1 \left[\mu u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\right] dx, \quad b(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad u, v \in H^1(0, 1)$$

wobei $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : v' \in L^2(\Omega)\}$,

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = (v,v)^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}, \quad (u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (u',v')_{L^2(\Omega)}, \quad (u,v)^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

und $H^k(\Omega)$ mit (schwachen) Ableitungen bis auf Ordnung k ähnlich definiert wird. (Hinweis: Sehen Sie Seiten 249 – 251 im Skriptum `http://math.uni-graz.at/keeling/num1_ws14/numerik.pdf`.) Mit den Splines von (2) sei

$$u_h(x) = \sum_{i=-1}^{N-1} u_i s_{1,i}(x) \in \mathcal{S}^1(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

eine Approximation $u_h \approx u$ definiert durch:

$$a(u_h, v_h) = b(v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{S}^1(\boldsymbol{x}). \tag{5}$$

Zeigen Sie

$$\min\{\mu,1\}\|v\|^2_{H^1(0,1)} \leq a(v,v), \quad |a(u,v)| \leq \max\{\mu,1\}\|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)}, \quad \forall u,v \in H^1(0,1)$$

$$|b(v)| \leq \|f\|_{L^2(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)}, \quad \forall u \in H^1(0,1)$$

wobei alle Ungleichungen auch mit $\mathcal{S}^1(\boldsymbol{x})$ anstatt $H^1(0,1)$ gelten, da $\mathcal{S}^1(\boldsymbol{x}) \subset H^1(0,1)$ gilt. Dann zeigen Sie (Céa's Lemma)

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\max\{\mu,1\}}{\min\{\mu,1\}} \inf_{v \in \mathcal{S}^1(\boldsymbol{x})} \|u - v\|_{H^1(0,1)} \leq ch\|u\|_{H^2(0,1)}$$

wobei mit einer Konstante $c > 0$ die letzte Ungleichung mit den Approximationseigenschaften der Splines folgt; sehen Sie z.B. Seite 151 im Skriptum `http://math.uni-graz.at/keeling/num1_ws14/numerik.pdf`.

3. Zeigen Sie, das Randwertproblem (3) ist eine notwendige Optimalitätsbedingung zur Minimierung des folgenden Funktionals:

$$J(u) = \int_0^1 |u(x) - f(x)|^2 dx + \mu \int_0^1 |u'(x)|^2 dx \tag{6}$$

(Hinweis: Sehen Sie Seiten 249 – 251 im Skriptum `http://math.uni-graz.at/keeling/num1_ws14/numerik.pdf`.) Mit u_h durch (4) und J durch (6) gegeben, zeigen Sie, die notwendige Optimalitätsbedingung für $J(u_h)$ bezüglich der Koeffizienten $\boldsymbol{u} = \{u_i\}_{i=-1}^{N-1}$ in (4) ist durch (5) gegeben. Setzen Sie $v_h = s_{1,i}$, $i = -1, \ldots, N-1$, in (5), und leiten Sie das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ zur Lösung von (5) explizit her, wobei $\boldsymbol{f} = \{b(s_{1,i})\}_{i=-1}^{N-1}$. (Hinweis: Sehen Sie Seiten 252 – 257 im Skriptum `http://math.uni-graz.at/keeling/num1_ws14/numerik.pdf`.)