Numerische Mathematik 2, Übungen, WS15/16, Blatt 12

Bearbeitung: Hausaufgaben bis 14.1.2016

Hausaufgaben

1. Beweisen Sie die diskrete Gronwall-Ungleichung: Gegeben seien $\{u_n\}_{n\geq 0}$, $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$, $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ mit $\beta_n > 0$. Wenn gilt
$$u_n \leq \alpha_n + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k u_k, \quad n \geq 0$$
dann folgt
$$u_n \leq \alpha_n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \beta_k \prod_{l=k+1}^{n-1} (1+\beta_k), \quad n \geq 0$$
wobei man die Summen als 0 und die Produkte als 1 versteht, wenn Indizes die obere Grenze überschreiten. (Hinweise: Man macht die diskreten Anpassungen $v \to v_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k u_k$, $v' \to v_n - v_{n-1}$ und $v \exp(\gamma) \to v_n / \prod_{k=0}^{n}(1+\beta_k)$ für den Beweis auf Seite 123 im Skriptum `http://math.uni-graz.at/keeling/gdg_ws13/gdg.pdf`.)

2. Das Anfangswertproblem soll gelöst werden
$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \quad t \in [0,T]$$
wobei $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}^2([0,T], \mathbb{R}^d)$ und $\boldsymbol{f} : [0,T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ erfüllt die Lipschitz Bedingung,
$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}_2) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}_1)\|_2 \leq L \|\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1\|_2 \leq L, \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_1 \in \mathbb{R}^d.$$
Verwenden Sie die diskrete Gronwall-Ungleichung, um zu beweisen dass die implizite Euler-Methode
$$\boldsymbol{y}_{k+1} = \boldsymbol{y}_k + h \boldsymbol{f}(t_{k+1}, \boldsymbol{y}_{k+1}), \quad t_k = kh \in [0,T]$$
die Fehler-Abschätzung erfüllt:
$$\|\boldsymbol{y}(t_n) - \boldsymbol{y}_n\|_2 \leq \frac{chT}{(1-hL)^{n+1}}, \quad t_n \in [0,T]$$
wobei $c = \frac{1}{2} \max_{t \in [0,T]} \|\boldsymbol{y}''(t)\|_2$. (Hinweise: Mit dem Taylor-Satz entwickeln Sie die Lösung $\boldsymbol{y}(t_k)$ um t_{k+1} bis zur $\mathcal{O}(h^2)$, mit $u_k = \|\boldsymbol{y}(t_k) - \boldsymbol{y}_k\|_2$ zeigen Sie $u_{k+1}(1-hL) \leq u_k + ch^2$ oder $(u_{k+1} - u_k)(1-hL) \leq hLu_k + ch^2$, summieren Sie über $k = 0, \ldots, n-1$ und wenden Sie die Gronwall-Ungleichung an.)

3. Die Konvergenz-Ordnung der SDIRK Methode des 11. Blatts soll durch numerische Lösung der Wärmegleichung
$$\begin{gathered} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad x \in (0,1), \quad t \in [0,T] \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad t \in [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) \end{gathered}$$
abgeschätzt werden, wobei die sogenannte *order reduction* für diese SDIRK Methode (und ähnliche Methoden) zu erwarten ist, wenn die räumliche Approximation immer feiner wird.

Für $m \in \mathbb{N}$ sei ein räumliches Gitter $\{x_i\}_{i=0}^m$ mit $h = 1/m$ definiert wie auf dem 2. Blatt. Eine räumliche Diskretisierung der Wärmegleichung ist gegeben durch

$$\boldsymbol{u}'(t) = -L\boldsymbol{u}(t), \quad t \in [0,T], \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 = \{u_0(x_i)\}_{i=0}^m, \quad L = \mathcal{D}/h^2$$

wobei $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$ zusammen mit der Eigenraum-Zerlegung $\mathcal{D}V = V\Lambda$, $V = \{v_{i,j}\}_{i,j=0}^m$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\{\lambda_j\}_{j=0}^m)$, auf dem 2. Blatt definiert sind. Die exakte Lösung des obigen Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist

$$\boldsymbol{u}(t) = V\exp(-t\Lambda/h^2)V^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_0, \quad t \in [0,T]$$

Eine zeitliche Diskretisierung ist gegeben durch $\boldsymbol{U}_k \approx \boldsymbol{u}(t_k)$, $t_k = k\tau$, $\tau = T/n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(1+\tau\gamma L)\boldsymbol{U}_{k,1} &= \boldsymbol{U}_k \\
(1+\tau\gamma L)\boldsymbol{U}_{k,2} &= \boldsymbol{U}_k - \tau(1-2\gamma)L\boldsymbol{U}_{k,1} \\
\boldsymbol{U}_{k+1} &= \boldsymbol{U}_k - \tau L(\boldsymbol{U}_{k,1}+\boldsymbol{U}_{k,2})/2, \quad k = 0,\dots,n-1
\end{aligned}$$

wobei $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$ und $\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{u}_0$. Mit

$$\boldsymbol{u}_0 = \{4x_i(1-x_i)\}_{i=0}^m, \quad T = 1/10$$

berechnen Sie $\boldsymbol{u}(t_k), \boldsymbol{U}_k \in \mathbb{R}^{m+1}$, $k = 0,\dots,n$, für

$$\begin{aligned}
m &= m_\alpha = 10\cdot 2^\alpha, \quad \alpha = 0,\dots,5 \\
n &= n_\beta = 10\cdot 2^\beta, \quad \beta = 0,\dots,10.
\end{aligned}$$

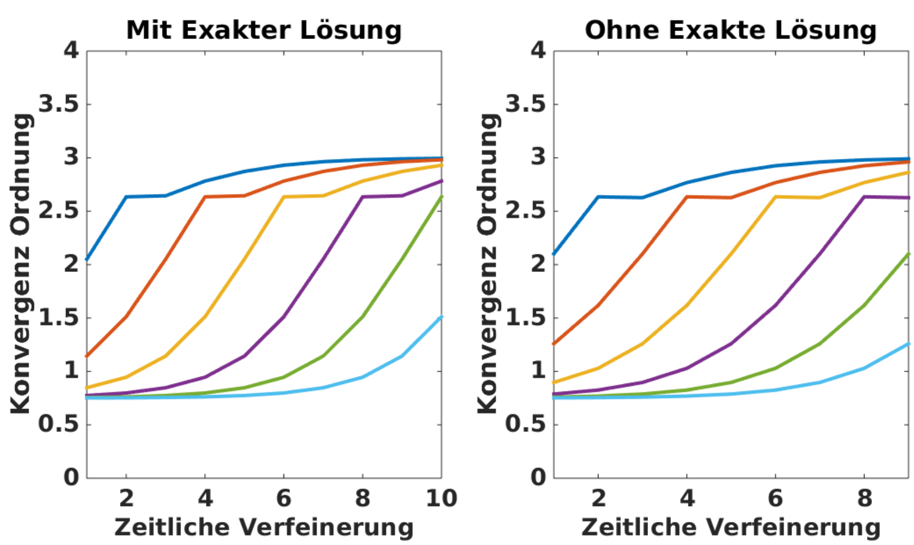
Berechnen Sie

$$\epsilon(\alpha,\beta) = \max_{0\le k\le n_\beta}\left[\sum_{i=0}^{m_\alpha}|\boldsymbol{u}(t_k)-\boldsymbol{U}_k|_i^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha = 0,\dots,5, \quad \beta = 0,\dots,10$$

und merken Sie für $\tau_\beta = T/m_\beta$

$$\frac{\epsilon(\alpha,\beta-1)}{\epsilon(\alpha,\beta)} \approx \frac{c_\alpha(2\tau_\beta)^p}{c_\alpha\tau_\beta^p} = 2^p \quad \Rightarrow \quad p \approx \log_2\left[\frac{\epsilon(\alpha,\beta-1)}{\epsilon(\alpha,\beta)}\right].$$

Für jedes α stellen Sie $\{\log_2(\epsilon(\alpha,\beta-1)/\epsilon(\alpha,\beta))\}_{\beta=1}^{10}$ grafisch dar. Das Ergebnis soll so aussehen, wie in der linken Grafik.



Für β groß und τ klein approximiert die Asymptote die Konvergenz-Ordnung. Diese soll ungefähr 3 sein, aber für α groß und h klein wird die Abschätzung der Konvergenz-Ordnung reduziert! Der Grund dafür ist, die Lipschitz-Bedingung hängt von h ab und fordert die SDIRK Methode so heraus.

Falls Interesse besteht wird die rechte Grafik ohne die exakte Lösung folgendermassen erstellt. Man berechnet

$$\varepsilon(\alpha,\beta) = \max_{0\le k\le n_\beta} \left[\sum_{i=0}^{m_\alpha} |\boldsymbol{U}_k^{(\beta)} - \boldsymbol{U}_{2k}^{(2\beta)}|_i^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha = 0,\dots,5, \quad \beta = 0,\dots,9$$

merkt

$$\frac{\varepsilon(\alpha,\beta-1)}{\varepsilon(\alpha,\beta)} \approx \frac{c_\alpha(2\tau_\beta)^p + c_\alpha\tau_\beta^p}{c_\alpha\tau_\beta^p + c_\alpha(\tau_\beta/2)^p} = 2^p \quad \Rightarrow \quad p \approx \log_2\left[\frac{\varepsilon(\alpha,\beta-1)}{\varepsilon(\alpha,\beta)}\right]$$

und stellt $\{\log_2(\varepsilon(\alpha,\beta-1)/\varepsilon(\alpha,\beta))\}_{\beta=1}^{9}$ für jedes α grafisch dar.