Numerische Mathematik 2, Übungen, WS15/16, Blatt 10

Bearbeitung: Hausaufgaben bis 10.12.2015

Hausaufgaben

1. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, wobei $A^\top A$ SPD ist. (a) Beweisen Sie, es existeren orthogonale Matrizen $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die mit $P = P^{(n-1)} \cdots P^{(1)}$ und $Q = Q^{(1)} \cdots Q^{(n-2)}$ durch Householder Transformationen $\{P^{(i)}\}_{i=1}^{n-1}$ und $\{Q^{(i)}\}_{i=1}^{n-2}$ konstruiert werden, wobei $PAQ = \langle B^\top, 0\rangle^\top \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt mit einer oberen bidiagonalen Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. (b) Beweisen Sie, A und B haben die selben Singulärwerte.

2. Seien A, P, Q, B so gegeben, wie im letzten Beispiel. Mit $B^{(1)} = B$ wird eine Folge $\{B^{(l)}\}_{l\geq 1}$ bestimmt, wobei $A^\top A$ und $B^{(l)\top} B^{(l)}$ ähnlich sind. (a) Beweisen Sie, es existiert eine orthogonale Matrix $Q^{(l)} = H^{(1)} \cdots H^{(n-1)}$, die durch eine Kette $\{H^{(i)}\}_{i=1}^{n-1}$ von Givens Transformationen konstruiert wird, wobei $B^{(l)}Q^{(l)}$ eine untere bidiagonale Matrix ist. (b) Beweisen Sie, $R^{(l)} = [B^{(l)}Q^{(l)}]^\top B^{(l)}$ ist eine obere tridiagonale Matrix.

   Bemerkung: Somit ist $B^{(l)\top} B^{(l)} = Q^{(l)} R^{(l)}$ indirekt eine QR Zerlegung von $B^{(l)\top} B^{(l)}$.

3. Seien $A, P, Q, B, B^{(l)}, Q^{(l)}, R^{(l)}$ so gegeben, wie im letzten Beispiel. (a) Beweisen Sie, es existiert eine orthogonale Matrix $P^{(l)} = G^{(n-1)} \cdots G^{(1)}$, die durch eine Kette $\{G^{(i)}\}_{i=1}^{n-1}$ von Givens Transformationen konstruiert wird, wobei $B^{(l+1)} = P^{(l)} B^{(l)} Q^{(l)}$ eine obere bidiagonale Matrix ist. (b) Beweisen Sie, es gilt $B^{(l+1)\top} B^{(l+1)} = R^{(l)} Q^{(l)}$.

   Bemerkung: Somit wird ein Schritt des QR Verfahrens auf $B^{(l)\top} B^{(l)}$ indirekt (und genauer) durchgeführt.

   Bemerkung: Mit

$$
\begin{array}{rcll}
\tilde{\Sigma} &=& \lim_{l\to\infty} B^{(l)} & \in \mathbb{R}^n \\
\Sigma &=& \langle |\tilde{\Sigma}|; 0\rangle & \in \mathbb{R}^{m\times n} \\
\hat{\Sigma} &=& \mathrm{sign}[\tilde{\Sigma}] & \in \mathbb{R}^n \\
E &=& \lim_{l\to\infty} Q^{(1)} \cdot Q^{(2)} \cdots Q^{(l)} & \in \mathbb{R}^n \\
\tilde{G} &=& \hat{\Sigma} \cdot \lim_{l\to\infty} P^{(l)} \cdots P^{(2)} \cdot P^{(1)} & \in \mathbb{R}^n \\
G &=& \langle \tilde{G}^\top, 0; 0, I\rangle & \in \mathbb{R}^{m\times n} \\
U &=& P^\top G & \in \mathbb{R}^{m\times m} \\
V &=& QE & \in \mathbb{R}^{n\times n}
\end{array}
$$

   folgt mit den obigen Aufgaben $A = U\Sigma V^\top$, wie bei der Matlab Funktion `svd`.