Numerische Mathematik 2, Übungen, WS15/16, Blatt 8

Bearbeitung: Hausaufgaben bis 26.11.2015

Hausaufgaben

1. Sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r$, $|\lambda_1| > |\lambda_{r+1}| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ und mit Eigenvektoren $\boldsymbol{x}_i$, $A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i$, die eine Basis für $\mathbb{C}^n$ bilden. Der Anfangsvektor für eine Vektoriteration $\boldsymbol{t}_0$ läßt sich in der Form $\boldsymbol{t}_0 = \rho_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \rho_n \boldsymbol{x}_n$ schreiben, wobei $\rho_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \rho_r \boldsymbol{x}_r \neq 0$. Für $\boldsymbol{t}_i = A^i \boldsymbol{t}_0$ gilt

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\boldsymbol{t}_i}{\lambda_1^i} = \rho_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \rho_r \boldsymbol{x}_r$$

   Sei das Index j_i definiert durch

$$\boldsymbol{t}_i = (\tau_1^{(i)}, \ldots, \tau_n^{(i)})^\top, \quad |\tau_{j_i}^i| = \max_s |\tau_s^{(i)}|.$$

   Mit $\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{t}_i / \tau_{j_i}^{(i)}$ zeigen Sie,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\tau_{j_i}^{(i+1)}}{\tau_{j_i}^{(i)}} = \lambda_1, \quad \lim_{i\to\infty} \boldsymbol{z}_i = \alpha(\rho_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \rho_r \boldsymbol{x}_r)$$

   wobei $\alpha \neq 0$ eine Normierungskonstante ist.

2. Sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zerlegt in ihre Jordan kanonische Form $A = XJX^{-1}$, wobei die erste Spalte $\boldsymbol{x}_1$ von $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ ein Eigenvektor von A ist, der dem betragsmäßig streng größten einfachen Eigenwert λ_1 entspricht, d.h. das erste Jordan Block von J ist die 1×1 Matrix mit dem Werte λ_1. Der Anfangsvektor für eine Vektoriteration $\boldsymbol{z}_0$ läßt sich in der Form $\boldsymbol{z}_0 = \rho_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \rho_n \boldsymbol{x}_n$ schreiben, wobei $\rho_1 \neq 0$. Sei die Vektoriteration gegeben durch

$$\boldsymbol{t}_i = A\boldsymbol{z}_{i-1}, \quad \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{t}_i / \tau_{j_i}^{(i)}, \quad \mu_i = \tau_{j_{i-1}}^{(i)},$$

   wobei das Index j_i so definiert sei:

$$\boldsymbol{t}_i = (\tau_1^{(i)}, \ldots, \tau_n^{(i)}), \quad |\tau_{j_i}^{(i)}| = \max_s |\tau_s^{(i)}|.$$

   Zeigen Sie,

$$\lim_{i\to\infty} \mu_i \to \lambda_1$$

   und $\exists \{\phi_i\}$ mit $|\phi_i| = \|\boldsymbol{x}_1\|_\infty$ wobei

$$\lim_{i\to\infty} \phi_i \boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x}_1.$$

3. Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert mit dem Eigenvektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$. Zeigen Sie, $\exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, wobei $A^* \boldsymbol{y} = \lambda^* \boldsymbol{y}$ gilt. Falls A normal ist und λ ein einfacher Eigenwert für A ist, zeigen Sie, $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ sind parallel.