Numerische Mathematik 2, Übungen, WS15/16, Blatt 6

Bearbeitung: Hausaufgaben bis 12.11.2015

Hausaufgaben

1. (Fortsetzung des letzten Beispiels) Zur Lösung des Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, sei $\boldsymbol{x}_0$ ein Anfangsvektor für ein iteratives Verfahren. Mit $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_0$ sei $\{\boldsymbol{u}_j = A^{j-1}\boldsymbol{r}_0\}_{j=1}^{i}$ eine Basis für den Krylov-Unterraum $\mathcal{K}^i(A, \boldsymbol{r}_0) = \operatorname{span}\{A^j \boldsymbol{r}_0\}_{j=0}^{i-1}$, $1 \le i \le n$. Für die Matrix $U_i \in \mathbb{R}^{n\times i}$ mit Spalten $\{\boldsymbol{u}_j\}_{j=1}^{i}$ gilt $AU_i = U_i B_i + \boldsymbol{u}_{i+1}\boldsymbol{e}_i^\top$, wobei $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^i$ erfüllt $(\boldsymbol{e}_i)_j = \delta_{i,j}$ und $B_i \in \mathbb{R}^{i\times i}$ erfüllt $(B_i)_{kj} = \delta_{k,j+1}$. Mit $U_i = Q_i R_i$, $Q_i \in \mathbb{R}^{n\times i}$, $R_i \in \mathbb{R}^{i\times i}$, $Q_i^\top Q_i = I$ und $R_i = \{r_{kj}\}_{k,j=1}^{i}$ mit $r_{kj} = 0$, $k > j$, gilt $AQ_i = Q_i \tilde{H}_i + \boldsymbol{u}_{i+1}\boldsymbol{e}_i^\top / r_{i,i}$, wobei $\tilde{H}_i$ eine obere Hessenberg-Matrix ist.

   Mit $Q_{i+1} = [Q_i, \boldsymbol{q}_{i+1}]$ und $R_{i+1} = [[R_i; 0], [\tilde{\boldsymbol{r}}; r_{i+1,i+1}]]$ zeigen Sie,
   $$AQ_i = Q_i H_i + (r_{i+1,i+1}/r_{i,i})\boldsymbol{q}_{i+1}\boldsymbol{e}_i^\top$$
   wobei $H_i = \tilde{H}_i + \tilde{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{e}_i^\top / r_{i,i}$ eine obere Hessenberg-Matrix ist. Zeigen Sie, es gilt $Q_i^\top A Q_i = H_i$, und mit $H_{i+1} = \{h_{kj}\}_{k,j=1}^{i+1}$ gilt $AQ_i = Q_i H_i + h_{i+1,i}\boldsymbol{q}_{i+1}\boldsymbol{e}_i^\top$. Zeigen Sie, falls A symmetrisch ist, ist H_i eine tridiagonale Matrix.

2. Zeigen Sie, der unten stehende (Arnoldi) Algorithmus führt zu einer orthonormalen Basis $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^{m}$ für den Krylov-Unterraum $\mathcal{K}^m(A, \boldsymbol{r}_0) = \operatorname{span}\{A^j \boldsymbol{r}_0\}_{j=0}^{m-1}$, $1 \le m \le n$, $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_0$, wobei mit $V_j = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_j] \in \mathbb{R}^{n\times j}$ und einer oberen Hessenberg-Matrix $\bar{H}_{m-1} = \{h_{i,j}\}_{i=1,m}^{j=1,m-1} \in \mathbb{R}^{m\times(m-1)}$ gilt $AV_{m-1} = V_m \bar{H}_{m-1}$.

   $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{r}_0 / \|\boldsymbol{r}_0\|_2$
   for $j = 1, \dots, m-1$
       $\boldsymbol{t} = A\boldsymbol{v}_j$
       for $i = 1, \dots, j$
           $h_{i,j} = \boldsymbol{v}_i^\top \boldsymbol{t}$
           $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t} - h_{i,j}\boldsymbol{v}_i$
       end
       $h_{j+1,j} = \|\boldsymbol{t}\|_2$
       $\boldsymbol{v}_{j+1} = \boldsymbol{t}/h_{j+1,j}$
   end

3. Zur Lösung des Systems, $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, $A = (I + \mu\mathcal{D}/h^4)$, (Blatt 3, Beispiel 1) implementieren Sie die Methode der Konjugierten Gradienten (möglichst effizient)

   (a) ohne Präkonditionierung,

   (b) mit dem Präkonditionierer M_{J}^{-1} (wobei $M_{\mathrm{J}} = D$ die Approximierte Inverse für das Jacobi Verfahren ist) und

   (c) mit dem Präkonditionierer M_{SGS}^{-1} (wobei $M_{\mathrm{SGS}} = (D + U)D^{-1}(D + L)$ die Approximierte Inverse für das Symmetische Gauß-Seidel Verfahren ist)

   und vergleichen Sie die jeweiligen Schnelligkeiten der drei Methoden. Wählen Sie z.B. `m = 101`, `f = randn(m+1,1)`, `u0 = f` und `mu = 1000*h`^{4}.