Numerische Mathematik 2, Übungen, WS15/16, Blatt 4

Bearbeitung: Hausaufgaben bis 29.10.2015

Hausaufgaben

1. Für eine gegeben SPD Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$, sei $\|\boldsymbol{x}\|_M = \|M^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}\|_{\ell_2}$ für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ definiert. Bestimmen Sie eine bilineare Form $(\cdot,\cdot)_M$, die von $M^{\frac{1}{2}}$ nicht explizit abhängt obwohl $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})_M = \|\boldsymbol{x}\|_M^2$ gelten muss. Zeigen Sie, $(\cdot,\cdot)_M$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

   Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, leiten Sie für die Funktion $F(\boldsymbol{x}) = \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_M^2$ die Richtung $\boldsymbol{p} = -\nabla F(\boldsymbol{x})/\|\nabla F(\boldsymbol{x})\|_{\ell_2}$ des steilsten Abstiegs bezüglich der Matrizen A und M her. Mit $\lambda_{\text{opt}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \text{argmin}_\lambda F(\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{p})$ geben Sie einen Schritt $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{x} + \lambda_{\text{opt}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}$ des Abstiegsverfahrens explizit an.

2. Das erste Problem auf Blatt 3, $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, $A = (I + \mu\mathcal{D}/h^4)$, soll mit der Methode des Steilsten Abstiegs ($M = I$ oben) gelöst werden. Laut des Ergebnisses jenes Beispiels ist A SPD, und daher ist $\boldsymbol{u}^* = A^{-1}\boldsymbol{f}$ woll definiert.

   Schätzen Sie die Konditionszahl $\kappa_2(A)$ der Matrix A ab.

   Wie oben angedeutet ist $\|\cdot\|_A$ eine Norm.

   Anhand eines Satzes von der Vorlesung schätzen Sie die Anzahl der Iterationen k ab, die für eine Toleranz $\epsilon > 0$ notwendig sind, um die Genauigkeit $\|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^*\|_A/\|\boldsymbol{u}^0 - \boldsymbol{u}^*\|_A < \epsilon$ zu leisten.

3. Zur Lösung des Systems, $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, $A = (I + \mu\mathcal{D}/h^4)$, implementieren Sie die Symmetrische Gauß-Seidel Methode und das Abstiegsverfahren mit Matlab und vergleichen Sie die jeweiligen Schnelligkeiten der zwei Methoden. Wählen Sie z.B. `m = 101`, `f = randn(m+1,1)`, `u0 = f` und `mu = 1000*h`^{4}.