Numerische Mathematik 2, Übungen, WS15/16, Blatt 2

Bearbeitung: Hausaufgaben bis 15.10.2015

Hausaufgaben

Für die unten stehenden Hausaufgaben wird das lineare Gleichungssystem

$$h = \frac{1}{m}, \quad x_i = ih, \quad i = 0, \ldots, m, \quad \boldsymbol{u} \approx \{u(x_i)\}_{i=0}^m, \quad \boldsymbol{f} = \{f(x_i)\}_{i=0}^m$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}, \quad \mu > 0, \quad A = \frac{\mu}{h^2}\mathcal{D} + I$$

im Beispiel 1 des 1. Blatts mit verschiedenen iterativen Methoden gelöst. Bemerken Sie, die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathcal{D}$ sind

$$\lambda_j = 4\sin^2\left[\frac{\pi j}{2(m+1)}\right] \qquad v_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{m+1}}, & 0 \le i \le m, \quad j = 0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{m+1}} \cos\left[\dfrac{\pi j(i+1/2)}{m+1}\right], & 0 \le i \le m, \quad 1 \le j \le m \end{cases}$$

$$0 \le j \le m,$$

1. Zur Lösung des linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, wird die *Richardson's Methode* verwendet:

   $$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{u}_{k-1} + \omega(\boldsymbol{f} - A\boldsymbol{u}_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

   Bestimmen Sie die Werte für ω, für welche die Iteration konvergiert. Bestimmen Sie den optimalen Wert $\omega^\star$, mit dem der Spektralradius der Iterationsmatrix $(I - \omega A)$ minimiert wird.

2. Zur Lösung des linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$, wird die *gewichtete Jacobi Methode* verwendet:

   $$\boldsymbol{u}_k = (1-\omega)\boldsymbol{u}_{k-1} + \omega D^{-1}(\boldsymbol{f} - (L+U)\boldsymbol{u}_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

   wobei $\omega > 0$ und $A = D+L+U$ mit D eine diagonale Matrix, L eine streng untere Dreiecksmatrix und U eine streng obere Dreiecksmatrix. Diese Methode soll mit Matlab implementiert werden, wobei `f = zeros(m+1,1)` und der Anfangsvektor $\boldsymbol{u}_0$ für die Lösung ist `u = randn(m+1,1)`. Im Lauf der Iterationen stellen Sie die Lösung $\boldsymbol{u}_k$ und die Fehler $\{\|\boldsymbol{u}_l\|\}_{l=0}^k$ grafisch dar. Anhand dieser Ergebnisse schätzen Sie einen vorteilhaften Wert für ω ab.

3. Zeigen Sie, die SOR Methode lässt sich für das obige Gleichungssystem mit der rot-schwarz Reihenfolge folgendermaßen (vgl. gewichtete Jacobi Methode) darstellen:

   ```
   utmp = (1-omega)*u + omega*(D \ (f - (L + U)*u));
   u(1:2:end) = utmp(1:2:end);
   utmp = (1-omega)*u + omega*(D \ (f - (L + U)*u));
   u(2:2:end) = utmp(2:2:end);
   ```

Zeigen Sie, diese Zeilen können durchgeführt werden, ohne dass die Matrizen A, D, L oder U gespeichert werden. Ohne Matrizen zu speichern soll diese Methode mit Matlab implementiert werden, wobei `f = zeros(m+1,1)` und der Anfangsvektor $\boldsymbol{u}_0$ für die Lösung ist `u = randn(m+1,1)`. Im Lauf der Iterationen stellen Sie die Lösung $\boldsymbol{u}_k$ und die Fehler $\{\|\boldsymbol{u}_l\|\}_{l=0}^{k}$ grafisch dar. Anhand dieser Ergebnisse schätzen Sie einen vorteilhaften Wert für ω ab.