ÜBUNGSBLATT 1 AUFGABE 1

(a) GEGEBEN SEI DIE FUNKTION $u(x) = |x| x^2$, $x \in \mathbb{R}$

$F(x,h) = [u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)]/h^2$ ERFÜLLT
$F(0,h) = O(h)$ ABER NICHT $F(0,h) = o(h)$

DEF: ES GILT: $F(x) = O(G(x))$ FÜR $x \to x_0$, WENN

$$\limsup_{x \to x_0} |F(x)/G(x)| \in (0, \infty)$$

ES GILT: $F(x) = o(G(x))$ FÜR $x \to x_0$, WENN

$$\lim_{x \to x_0} |F(x)/G(x)| = 0$$

Betrachte: für $t \to 0$ $\left|\frac{F(0,h+t)}{h+t}\right| = \left|\frac{u(h+t) + 2u(0) + u(-h-t)}{(h+t)^3}\right|$

$$= \left|\frac{2|h+t|(h+t)^2}{(h+t)^3}\right| = 2 \cdot |\operatorname{sign}(h+t)| = 2 \xrightarrow{t \to 0} 2$$

(1) $\in (0, \infty)$ $\Rightarrow$ $F = O(h)$
$\Rightarrow$ ANTWORT (a) IST RICHTIG
(2) $\neq 0$ $\Rightarrow$ $F \neq o(h)$

(b) ES GELTEN $u'(x) = \operatorname{sign}(x) \cdot x^2 + 2x|x|$
FÜR $x \neq 0$ und $\lim_{x \to 0} u'(x) = 0$ aber
$u'(0)$ existiert nicht

FALL 1: $x \neq 0$ $u'(x) = [|x| x^2]' = |x|' \cdot x^2 + |x| \cdot (x^2)'$

$$= \operatorname{sign}(x) \cdot x^2 + 2|x| \cdot x = 3|x| \cdot x$$

FALL 2: $x = 0$ $\lim_{t \to 0^+} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t| t^2}{t}$

$$= \lim_{t \to 0} |t| \cdot t = 0$$

$\lim_{t \to 0^-} = 0$ analog also: $u'(0)$ existiert

Nach z.z. $\lim_{x \to 0} u'(x) = 0$ (Was bedeutet u' ist stetig in $x = 0$)

$$u'(x) = 3|x|x \xrightarrow{x \to 0} 0$$

$\Rightarrow$ weil $u'(0)$ sehr wohl existiert ist (b) FALSCH

(c) Das TAYLORPOLYNOM maximalen Grades um $x=0$ für v ist $P(x) = 0$, ~~allein~~ mit Restterm

$$R(x) = \frac{v^{(2)}(\xi(x)) \cdot x^2}{2} \quad \text{wobei } \xi(x) = |x|$$

ein möglicher Wert für ξ ist

Satz von Taylor allgemein:

$$U(x) = \sum_{m=0}^{k} \frac{U^{(m)}(x_0)}{m!} (x-x_0)^m + \frac{u^{(k+1)}(\xi(x))}{(k+1)!} (x-x_0)^{k+1}$$

Bestimme die Ableitungen von u

$$v'(x) = 3|x| \cdot x$$
$$v''(x) = 3 \operatorname{sign}(x) \cdot x + 3|x| = 6|x| \quad \text{(analog zu (b))}$$

$$v'''(x) = \begin{cases} 6 \operatorname{sign}(x) & x \neq 0 \\ \text{unbestimmt} & x = 0 \end{cases}$$

Wir vermerken: $v'''(x)$ ist unstetig und existiert nicht für $x=0$, womit es für den Satz von Taylor und den Zwischenwertsatz unbrauchbar ist

$\Rightarrow$ das maximale Polynom verwendet $v^{(2)}$ für das Restglied

$$x_0 = 0$$
$$\Rightarrow u(x) = \underbrace{U(0) + U'(0)}_{=P(x)=0} + \underbrace{\frac{v^{(2)}(\xi(x))}{2} \cdot (x-0)^2}_{=R(x)}$$

$$\Rightarrow |x| \cdot x^2 = \frac{6|\xi(x)|}{2} \cdot x^2 \iff |\xi(x)| = \frac{|x|}{3}$$

somit ist $\xi(x) = \frac{x}{3}$ eine mögliche Lösung für $\xi(x)$

$\Rightarrow$ Antwort (c) ist <u>richtig</u>

(d) Laut Zwischenwertsatz folgt aus

$$v^{(3)}(-1) \cdot v^{(3)}(+1) < 0$$

dass $v^{(3)}(x)$ eine Nullstelle in $(-1, +1)$ hat.

$v^{(3)}$ ist nicht stetig, daher ist der Zwischenwertsatz nicht anwendbar

$\Rightarrow$ Antwort (c) ist <u>falsch</u>

Anne Hofer
1904551

2.

✓ a) $x_k = \operatorname{sinc}(k) = \frac{\sin(k)}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ mit Konv.gesch. $\mathcal{O}(\frac{1}{k})$

$$\limsup_{k\to\infty}\left(\left|\frac{x_k - 0}{\frac{1}{k}}\right|\right) = \limsup_{k\to\infty}\left(\left|\frac{\frac{\sin(k)}{\cancel{k}}}{\frac{1}{\cancel{k}}}\right|\right) = \limsup_{k\to\infty}|\sin(k)| = 1$$

✗ b) $y_k = \operatorname{sinc}(\frac{1}{k}) = \frac{\sin(\frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$ mit Konv.geschw. $\mathcal{O}(\frac{1}{k^3})$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\operatorname{sinc}(\frac{1}{k})-1}{\frac{1}{k^3}}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Substitution}\\ x=\frac{1}{k}}}{=} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x^3}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin(x)-x}{x^4}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos(x)-1}{4x^3}\right) = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos(x)-1}{x^3}\right) =$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'Hospital}}}{=} \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\sin(x)}{3x^2}\right) = -\frac{1}{12}\cdot\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin(x)}{x^2}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'Hospital}}}{=}$$

$$= -\frac{1}{12}\cdot\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos(x)}{2x}\right) = -\frac{1}{24}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{\cos(x)}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to\infty}} \longrightarrow -\infty$$

✓ c) $u_k = \exp(-\frac{1}{k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$ mit Konv.geschw. $\mathcal{O}(\frac{1}{k})$, aber <u>nicht</u> $\mathcal{O}(\frac{1}{k^2})$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left|\frac{e^{-\frac{1}{k}}-1}{\frac{1}{k}}\right|\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'Hospital}}}{=} \lim_{k\to\infty}\left(\left|\frac{e^{-\frac{1}{k}}\cdot\frac{1}{\cancel{k^2}}}{-\frac{1}{\cancel{k^2}}}\right|\right) = \lim_{k\to\infty}\left|-e^{-\frac{1}{k}}\right| = 1 \checkmark$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left|\frac{e^{-\frac{1}{k}}-1}{\frac{1}{k^2}}\right|\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'Hospital}}}{=} \lim_{k\to\infty}\left(\left|\frac{e^{-\frac{1}{k}}\cdot\frac{1}{\cancel{k^2}}}{-\frac{2}{k^{\cancel{3}}}}\right|\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\left|\frac{k}{(-2)\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{k}}}_{\to 1}}\right|\right) = \infty \checkmark$$

✗ d) $v_k = \operatorname{erf}(k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^k e^{-t^2}\,dt \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$ mit Konv.geschw. $\mathcal{O}(\frac{1}{k})$, aber <u>nicht</u> $\mathcal{O}(\frac{1}{k^2})$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\operatorname{erf}(k)-1}{\frac{1}{k}}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'Hospital}}}{=} \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-k^2}}{-\frac{1}{k^2}}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\cdot\frac{k^2}{e^{k^2}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'Hospital}}}{=}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\cdot\frac{\cancel{2k}}{\cancel{2k}\cdot e^{k^2}} = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\cdot\frac{1}{\underbrace{e^{k^2}}_{\to 0}} = 0 \checkmark$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\operatorname{erf}(k)-1}{\frac{1}{k^2}}\right) \underset{\uparrow}{=} \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{\cancel{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-k^2}}{-\frac{\cancel{2}}{k^3}} = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\cdot\frac{k^3}{e^{k^2}} \underset{\uparrow}{=}$$

L'Hospital L'Hospital

$$= \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\cdot\frac{3k^{\cancel{2}}}{2\cancel{k}\cdot e^{k^2}} = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{3}{2\sqrt{\pi}}\right)\cdot\frac{k}{e^{k^2}} \underset{\uparrow}{=} \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{3}{2\sqrt{\pi}}\right)\cdot\underbrace{\frac{1}{2k\cdot e^{k^2}}}_{\to 0} = 0$$

L'Hospital

Editor - Z:\MATLAB\Numerik WS 2020\Beispiel3.m

Beispiel3.m

```matlab
clearvars, close all %Variablen werden zuerst gelöscht, dass nicht zu viele sind
Nvec = []; muvec = [];

for N=round(logspace(2,4,5))
h=1/(N+1);

%generiert treppenfunktion,gewünschtes signal
ustar=[zeros(round(N/2),1);ones(N+1-round(N/2),1)];

%fügt Rauschgeräusche hinzu v(x) ist ein gegebenes verrauschtes Signal.
v = ustar + 0.1*randn(N+1,1);% Rauschstufe ny=0,1 ; Stufenfunktion mit zufälligem Rauschen


%generiert Matrix D
row_ind = [2:N+1 , 1:N    , 1:N+1]; % Dieser Block ergibt Matrix D (auch mit Code Seite 67)
col_ind = [1:N    , 2:N+1 , 1:N+1];
values = [-1*ones(2*N,1)' , 2*ones(N+1,1)'];
D = sparse(row_ind,col_ind,values,N+1,N+1);
D(1)=1; D(end)=1; %erstes und letztes Element ausgebessert

iter = 100;      %Anzahl Iterationen
y=ones(1,iter); %Initialisierung (verändert sich automatisch mit)
%
mu=logspace(-4,-3,iter); %logspace logarithmisch verteilte Zahlen

```

```
figure(1)
for k=1:iter
  %verbessere µ durch checken weiterer y Werte
  if k>=3
    if y(k-1)<y(k-2)
      mu(k)=mu(k-1) + 0.99* (mu(k-1)-mu(k-2));
    else
      mu(k)=mu(k-1) - 1.01* (mu(k-1)-mu(k-2));
    end
  end

  A = mu(k)*D/h^2+eye(N+1);%Berechnung des GLS %
  u = A\v; %BerechnungL /Lösen u Vektor ist geglätettes Signal
  y(k) = norm(ustar-u);
  plot(mu(k),y(k),'b*')
  hold on
%  pause(0.05)

 end

y_min=min(y);
[~,ix]=sort(y);
mu_min=mu(ix(1));
%ix(1)
plot(mu_min,y_min,'ro','markersize',8,'markerfacecolor','red')
```

```
Nvec = [Nvec,N];% für N 100 ideal my bei e-4 ,
muvec = [muvec,mu_min];

%berechne geglätettes Signal
A = mu_min*D/h^2+eye(N+1);
u = A\v;
%plot verrauschtes und geglättetes Signal
figure
plot(ustar, 'k')
hold on
plot(v, 'r')
plot(u, 'g')
hold off
xlim([0 N+1])
title(['N = ', num2str(N), ' datapoints'])

 end

c = Nvec(1)*muvec(1);
figure(2)
plot(Nvec,muvec,'ro','markersize',8,'markerfacecolor','red')
hold on
plot(logspace(2,4,50),c./logspace(2,4,50),'k')
hold off
title('Behaviour of \mu^* vs. number of datapoints')
xlabel('N (number of datapoints)')
ylabel('\mu^*')
```

```
%a) b) falsch, my* verhält sich mit wachsendem N wie O(1/N),  nimmt keinen endlichen
%Wert im limes an
%c) richtig, sichtbar durch Veränderung von ny=0,1;
%d) richtig in Figure 1 und 2 sichtbar, Verlauf wie O(1/N)
```

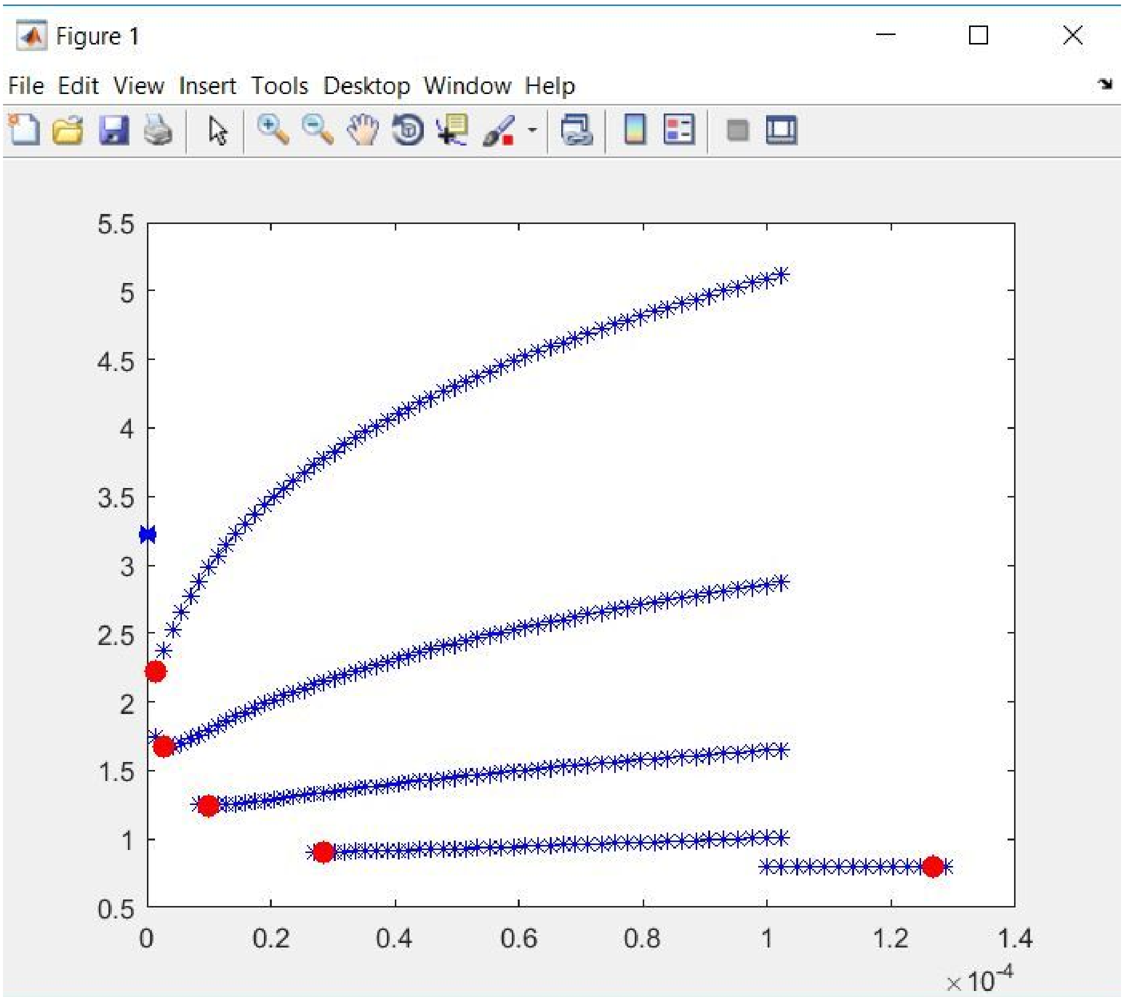
Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
5.5
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
×10^-4

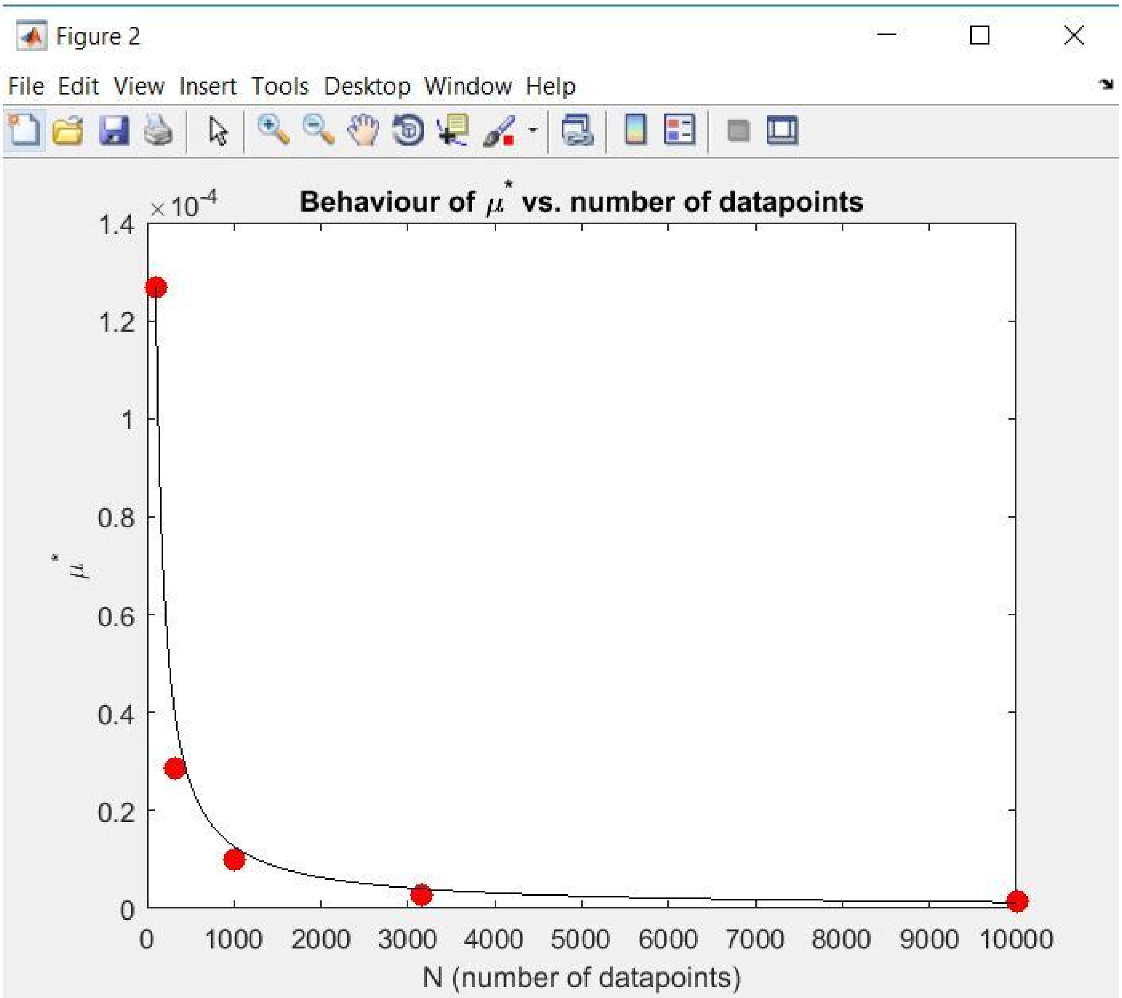
Figure 2
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Behaviour of μ* vs. number of datapoints
×10^-4
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
μ*
0 1000 2000 3000 4000 5000 6000 7000 8000 9000 10000
N (number of datapoints)

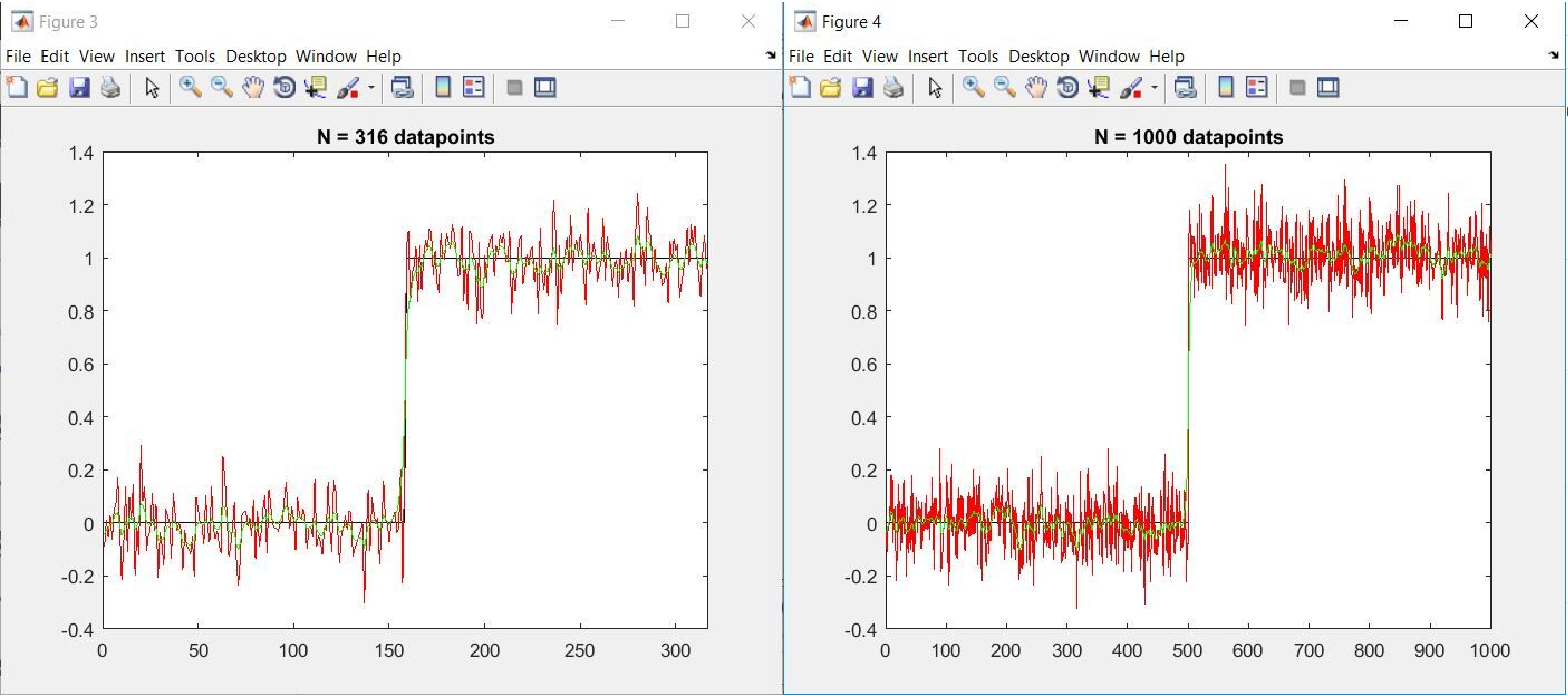

Figure 3
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
N = 316 datapoints
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
0 50 100 150 200 250 300
Figure 4
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
N = 1000 datapoints
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

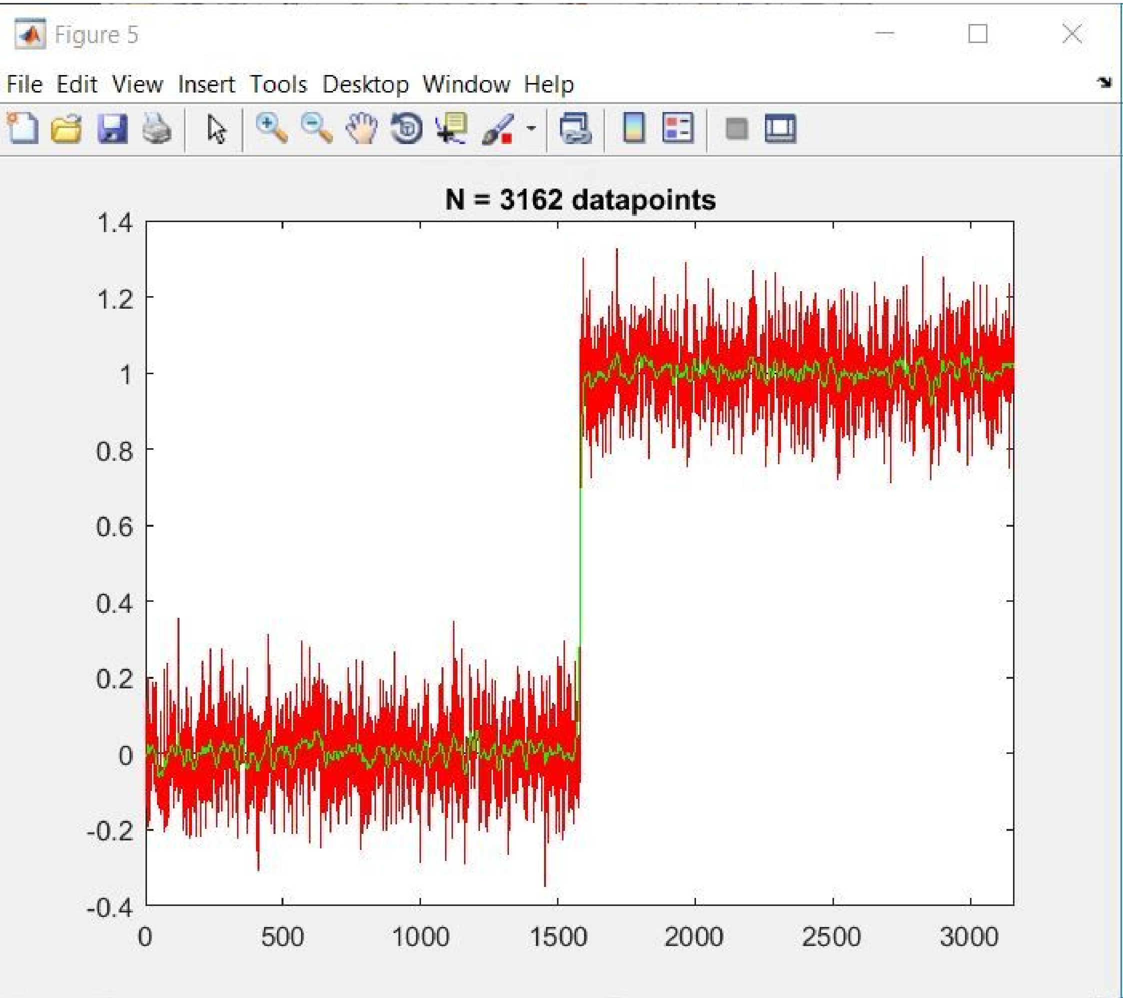
Figure 5
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
N = 3162 datapoints
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
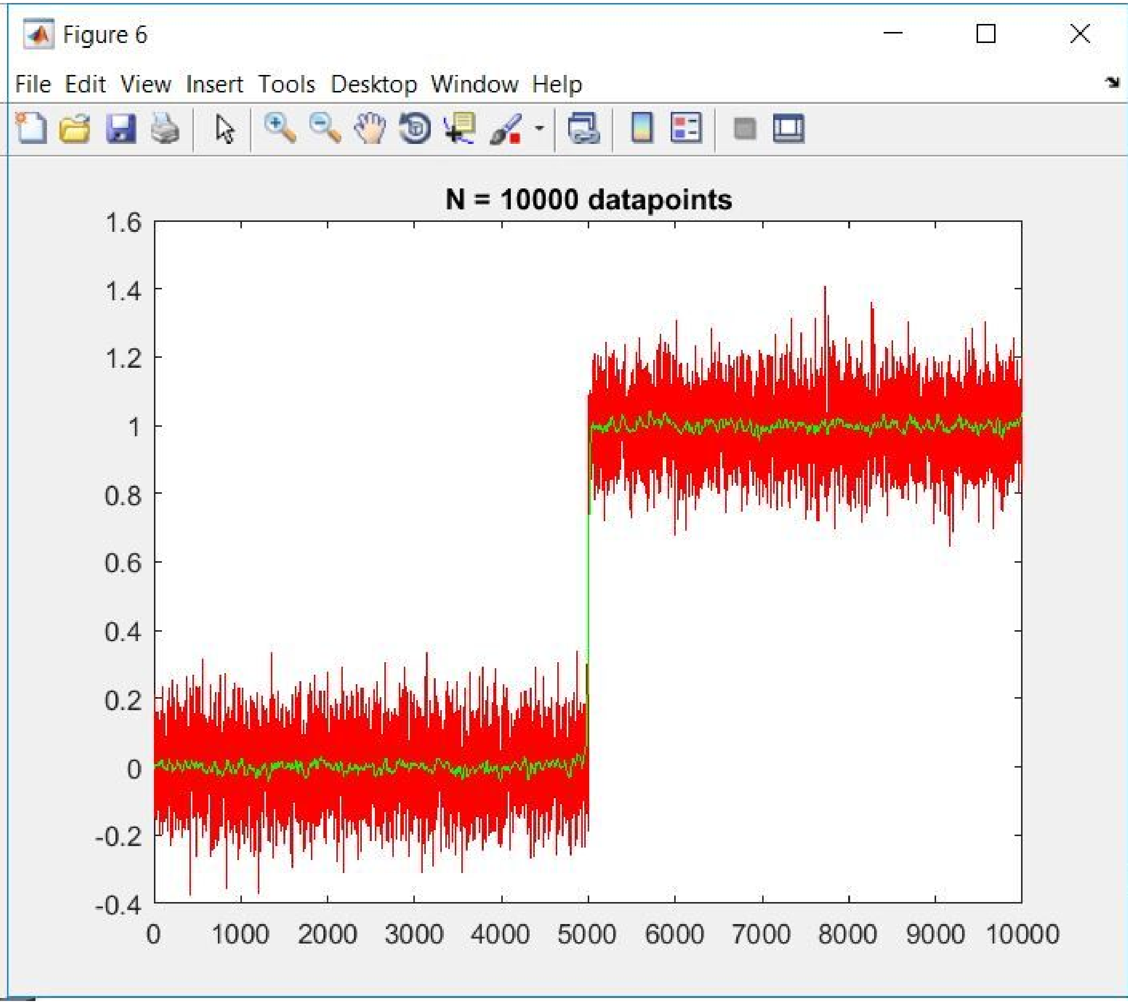
Figure 6
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
N = 10000 datapoints
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000

Bsp 4 a)

$$J_h(u) = \frac{1}{2} h \sum_{i=0}^{N} (u_i - v_i)^2 + \mu h \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{du_k} J_h(u) = h(u_k - v_k) + \frac{d}{du_k} \mu h \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= h(u_k - v_k) + \mu h \frac{d}{du_k} \left[\left(\frac{u_k - u_{k-1}}{h}\right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \mu h \frac{d}{du_k} \left[\left(\frac{u_{k+1} - u_k}{h}\right)^2 + \varepsilon^2 \right]$$

$$= h(u_k - v_k) + \mu h \cdot \frac{1}{2\left[\left(\frac{u_k - u_{k-1}}{h}\right)^2 + \varepsilon^2\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2u_k - 2u_{k-1}}{h^2} -$$

$$\mu h \frac{1}{2\left[\left(\frac{u_{k+1} - u_k}{h}\right)^2 + \varepsilon^2\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2u_{k+1} - 2u_k}{h^2}$$

$$= h(u_k - v_k) + \frac{\mu}{h} \cdot (u_k - u_{k-1}) \cdot \underbrace{\left[\left(\frac{u_k - u_{k-1}}{h}\right)^2 + \varepsilon^2\right]^{-\frac{1}{2}}}_{= D_k(u)} -$$

$$\frac{\mu}{h} (u_{k+1} - u_k) \cdot \underbrace{\left[\left(\frac{u_{k+1} - u_k}{h}\right)^2 + \varepsilon^2\right]^{-\frac{1}{2}}}_{= D_{k+1}(u)}$$

$$= h(u_k - v_k) + \frac{\mu}{h}(u_k - u_{k-1}) D_k(u) - \frac{\mu}{h}(u_{k+1} - u_k) D_{k+1}(u)$$

gilt für $k \in \{1, \dots, N-1\}$

Für u_0: $h(u_0 - v_0) - \frac{\mu}{h}(u_1 - u_0) D_1(u)$

Für u_N: $h(u_N - v_N) + \frac{\mu}{h}(u_N - u_{N-1}) D_N(u)$

Bsp 4 b)

Aus a) wissen wir

$$\nabla J_h(u) = \begin{bmatrix} h(u_0 - v_0) - \frac{\mu}{h}(u_1 - u_0) D_1(u) \\ h(u_1 - v_1) + \frac{\mu}{h}(u_1 - u_0) D_1(u) - \frac{\mu}{h}(u_2 - u_1) D_2(u) \\ \vdots \\ \vdots \\ h(u_{N-1} - v_{N-1}) + \frac{\mu}{h}(u_{N-1} - u_{N-2}) D_{N-1}(u) - \frac{\mu}{h}(u_N - u_{N-1}) D_N(u) \\ h(u_N - v_N) + \frac{\mu}{h}(u_N - u_{N-1}) D_N(u) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} h(u_0 - v_0) \\ h(u_1 - v_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ h(u_{N-1} - v_{N-1}) \\ h(u_N - v_N) \end{bmatrix} + \frac{\mu}{h} \cdot \begin{bmatrix} u_0 D_1(u) - u_1 D_1(u) \\ -u_0 D_1(u) + u_1 D_1(u) + u_1 D_2(u) - u_2 D_2(u) \\ \vdots \\ \vdots \\ -u_{N-2} D_{N-1}(u) + u_{N-1} D_{N-1}(u) + u_{N-1} D_N(u) + u_N D_N(u) \\ u_N D_N(u) - u_{N-1} D_N(u) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\mu}{h} \cdot \begin{bmatrix} D_1(u) & -D_1(u) & & & \\ D_1(u) & D_1(u) + D_2(u) & -D_2(u) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -D_{N-1}(u) & D_{N-1}(u) + D_N(u) & -D_N(u) \\ & & & -D_N(u) & D_N(u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} + h \cdot (u - v)$$

$$\Leftrightarrow \nabla J_h(u) = [\mu D(u)/h + hI]\, u - v$$

Optimalitätsbedingung $\nabla J_h(u) = 0 \Leftrightarrow [\mu D(u)/h^2 + I]\, u = v$

Bsp 4 c)

1. Fall $\forall \varepsilon > 0$

zz. jede partielle Ableitung ist stetig auf $\mathbb{R}^{N+1}$

$$\frac{d}{du_0} J_h = h(u_0 - v_0) - \frac{\mu}{h}(u_1 - u_0) D_1(u)$$

$$= \underbrace{h(u_0 - v_0)}_{\text{linear}} - \underbrace{\frac{\mu}{h}(u_1 - u_0)}_{\text{linear}} \underbrace{\left[\underbrace{\left(\frac{u_1 - u_0}{h}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\varepsilon^2}_{>0} \right]}_{>0}^{-\frac{1}{2}}$$

lineare Funktionen auf $\mathbb{R}^{N+1}$ sind stetig

Die Wurzelfunktion ist auf $\mathbb{R}_0^+$ stetig.

Die Diskriminante $> 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ stetig für $x > 0$

Zusammensetzung von stetige Funktion ist wieder stetig

Analoge argumentation für $\frac{d}{du_k} J_h$ mit $k \in \{1, \dots, N\}$

2. Fall, $\varepsilon = 0$

$$J_h(u) = \frac{1}{2} h \sum_{i=0}^{N} (u_i - v_i)^2 + \mu h \sum_{i=1}^{N} \left| \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) \right|$$

$|x|$ in $x = 0$ nicht differenzierbar

linksseitiger Differenzenquotient immer -1,

rechts. immer 1.

nicht jede partielle Ableitung existiert auf dem ganzen Definitionsbereich.

Bsp 4 d)

zz: Es gilt $u^T \nabla J_h(u) \geq h u^T (u - v)$, $\forall u \in \mathbb{R}^{N+1}$

Aus b) wissen wir $\nabla J_h(u) = [\mu D(u)/h^2 + I]\, u - v$

$$\underbrace{\mu\, u^T D(u)\, u / h^2}_{\text{zz. } \geq 0} + u^T u - u^T v \overset{?}{\geq} \underbrace{\underbrace{\underbrace{h}_{\leq 1} u^T u}_{\leq u^T u} - h u^T v}_{\leq u^T u - u^T v}$$

also positiv semidefinit

pos semidefinit $\iff$ Alle EW ≥ 0

zeige mittels Satz von Gershgorin

weil $D(u)$ symmetrisch sind alle EW reell

Definiere für die Zeile j der Matrix $D(u)$ den Gershgorin Kreis

$$G(d_{j,j}, r_j) := \{ x \in \mathbb{R} : |x - d_{j,j}| \leq r_j \}$$

~~wobei für $j \in \{1, N+1\}$ gilt~~

wobei $d_{j,j}$ und r_j wie folgt definiert sind

$j = 1$: $d_{1,1} = D_1(u)$ $\quad r_1 = |-D_1(u)| = D_1(u)$

$j = N+1$: $d_{N+1,N+1} = D_N(u)$ $\quad r_{N+1} = |-D_N(u)| = D_N(u)$

$j \in \{2, \dots N\}$: $d_{j,j} = D_{j-1}(u) + D_j(u)$

$r_j = |-D_{j-1}(u)| + |-D_j(u)| = D_{j-1}(u) + D_j(u)$

damit gilt für alle Gershgorin Kreise

$G(d_{j,j}, r_j) \subseteq \mathbb{R}_0^+$

$\xRightarrow{\text{Gershgorin Satz}}$ Alle EW ≥ 0 $\rightarrow$ $u^T D(u)\, u \geq 0$