Numerische Mathematik 1
Wintersemester 2020, Übungsblatt 12

Ausarbeitung über Moodle bis 22. Janner 2021

Dieser Anhang wird in den folgenden Beispielen zitiert.

1. $\Omega = (0,1)$, 2. Ordnung, Neumann Randbedingungen: Seien

$$u(x) = x^2(3-2x), \quad p(x) = 1-(x-\tfrac{1}{2})^2, \quad q(x) = 1+(x-\tfrac{1}{2})^2$$

und $f(x)$ so, dass das Randwertproblem (1) im Anhang mit $\alpha = 0$ und $\omega = 1$ erfüllt wird. Diskretisierungen aus Abschnitt 3 werden für dieses Randwertproblem untersucht. Seien die Normen $\|\cdot\|_{2,h}$ und $\|\cdot\|_A$ auf Seiten 195 bzw. 70 im Skriptum definiert, wobei die Matrix A vom Kontext verwendet wird. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

   (a) Sei $\bar{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (60) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{2,h_i}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 2$.

   (b) Sei $\bar{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (60) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_A$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 1$.

   (c) Sei $\tilde{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (68) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,h_i}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 2$.

   (d) Sei $\tilde{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (68) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_A$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) < 1$.

   Hinweise: Das Beispiel wird mit diesem Code gelöst. Wenn `nurKnoten = true` ausgewählt wird, werden die Fehler-Integrale nur durch Auswertungen in Knoten $\bar{\boldsymbol{x}}$ oder $\boldsymbol{x}$ approximiert. Mit `nurKnoten = false` werden die Fehler-Integrale durch feinere Auswertungen genauer berechnet, und dadurch wird die Ordnung für eine Ableitung-bezogenene Norm reduziert.

   Laut theoretischer Abschätzungen (38) und (39) für finite Differenzen

$$\|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{2,h} = \mathcal{O}(h^2), \quad h^{\frac{1}{2}}\|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_A = \|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{A,h} = \mathcal{O}(h^2)$$

   und (64) und (65) für finite Elemente

$$\|u(\boldsymbol{x}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,h} = \mathcal{O}(h^2), \quad h^{\frac{1}{2}}\|u(\boldsymbol{x}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_A = \|u(\boldsymbol{x}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_{A,h} = \mathcal{O}(h^2)$$

   in diesem Anhang werden diese Ordnungen für die jeweiligen Teile (a) – (d) erwartet. Mit `nurKnoten = true` in dem Code werden diese Ordnungen rechnerisch bestätigt.

   Laut theoretischer Abschätzungen (36) und (34) für finite Differenzen

$$\|u - \bar{u}_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2), \quad \|u - \bar{u}_h\|_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}(h) = \|u - \bar{u}_h\|_{H^1}$$

   und (62) und (60) für finite Elemente

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2), \quad \|u - \tilde{u}_h\|_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}(h) = \|u - \tilde{u}_h\|_{H^1}$$

   in diesem Anhang werden diese Ordnungen mit `nurKnoten = false` in dem Code rechnerisch bestätigt.

2. $\Omega = (0,1)$, 2. Ordnung, Dirichlet Randbedingungen: Seien

$$u(x) = x(x-1)(2x-1), \quad p(x) = 1 - (x - \tfrac{1}{2})^2, \quad q(x) = 1 + (x - \tfrac{1}{2})^2$$

und $f(x)$ so, dass das Randwertproblem (1) im Anhang mit $\alpha = 1$ und $\omega = 0$ erfüllt wird. Diskretisierungen aus Abschnitt 4 für dieses Randwertproblem werden untersucht. Seien die Normen $\|\cdot\|_{2,h}$ und $\|\cdot\|_A$ auf Seiten 195 bzw. 70 im Skriptum definiert, wobei die Matrix A vom Kontext verwendet wird. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Sei $\boldsymbol{u}$ die Lösung von (69) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}\|_{2,h_i}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 2$.

(b) Sei $\boldsymbol{u}$ die Lösung von (69) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}\|_A$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 1$.

(c) Sei $\tilde{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (71) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,h_i}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) < 2$.

(d) Sei $\tilde{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (71) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_A$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) < 1$.

Hinweise: Das Beispiel wird mit diesem Code gelöst. Wenn `nurKnoten = true` ausgewählt wird, werden die Fehler-Integrale nur durch Auswertungen in den Knoten $\boldsymbol{x}$ approximiert. Mit `nurKnoten = false` werden die Fehler-Integrale durch feinere Auswertungen genauer berechnet, und dadurch wird die Ordnung für eine Ableitung-bezogenene Norm reduziert.

Laut theoretischer Abschätzungen analog zu (38) und (39) für finite Differenzen

$$\|u(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}\|_{2,h} = \mathcal{O}(h^2), \quad h^{\frac{1}{2}}\|u(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}\|_A = \|u(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}\|_{A,h} = \mathcal{O}(h^2)$$

und zu (64) und (65) für finite Elemente

$$\|u(\boldsymbol{x}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,h} = \mathcal{O}(h^2), \quad h^{\frac{1}{2}}\|u(\boldsymbol{x}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_A = \|u(\boldsymbol{x}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_{A,h} = \mathcal{O}(h^2)$$

in diesem Anhang werden diese Ordnungen für die jeweiligen Teile (a) – (d) erwartet. Mit `nurKnoten = true` in dem Code werden diese Ordnungen rechnerisch bestätigt.

Laut theoretischer Abschätzungen analog zu (36) und (34) für finite Differenzen

$$\|u - u_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2), \quad \|u - u_h\|_{H^1} = \mathcal{O}(h) = \|u - u_h\|_{\mathcal{A}}$$

und zu (62) und (60) für finite Elemente

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2), \quad \|u - \tilde{u}_h\|_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}(h) = \|u - \tilde{u}_h\|_{H^1}$$

in diesem Anhang werden diese Ordnungen mit `nurKnoten = false` in dem Code rechnerisch bestätigt.

3. $\Omega = (0,1)$, 2. Ordnung, Robin Randbedingungen: Seien

$$u(x) = 7(x - \tfrac{1}{2}) - 12(x - \tfrac{1}{2})^3, \quad p(x) = 1 - (x - \tfrac{1}{2})^2, \quad q(x) = 1 + (x - \tfrac{1}{2})^2$$

und $f(x)$ so, dass das Randwertproblem (1) im Anhang mit $\alpha = 1$ und $\omega = 1$ erfüllt wird. Diskretisierungen aus Abschnitt 5 werden für dieses Randwertproblem untersucht. Seien die Normen $\|\cdot\|_{2,h}$ und $\|\cdot\|_A$ auf Seiten 195 bzw. 70 im Skriptum definiert, wobei die SPD Matrix $A_0 = A - \mathrm{D}(\boldsymbol{p}_0)B$ aus (72) für die Norm in Teil (b) und die Matrix A in (73) für die Norm in Teil (d) verwendet werden. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Sei $\bar{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (72) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{2,h_i}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 2$.

(b) Sei $\bar{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (72) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{A_0}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 1$.

(c) Sei $\tilde{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (73) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,h_i}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 2$.

(d) Sei $\tilde{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (73) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_{A}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) < 1$.

Hinweise: Das Beispiel wird mit diesem Code gelöst. Wenn `nurKnoten = true` ausgewählt wird, werden die Fehler-Integrale nur durch Auswertungen in Knoten $\bar{\boldsymbol{x}}$ oder $\boldsymbol{x}$ approximiert. Mit `nurKnoten = false` werden die Fehler-Integrale durch feinere Auswertungen genauer berechnet, und dadurch wird die Ordnung für eine Ableitung-bezogenene Norm reduziert.

Laut theoretischer Abschätzungen analog zu (38) und (39) für finite Differenzen

$$\|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{2,h} = \mathcal{O}(h^2), \quad h^{\frac{1}{2}}\|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_A = \|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{A,h} = \mathcal{O}(h^2)$$

und zu (64) und (65) für finite Elemente

$$\|u(\boldsymbol{x}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,h} = \mathcal{O}(h^2), \quad h^{\frac{1}{2}}\|u(\boldsymbol{x}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_A = \|u(\boldsymbol{x}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_{A,h} = \mathcal{O}(h^2)$$

in diesem Anhang werden diese Ordnungen für die jeweiligen Teile (a) – (d) erwartet. Mit `nurKnoten = true` in dem Code werden diese Ordnungen rechnerisch bestätigt.

Laut theoretischer Abschätzungen analog zu (36) und (34) für finite Differenzen

$$\|u - \bar{u}_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2), \quad \|u - \bar{u}_h\|_{H^1} = \mathcal{O}(h) = \|u - \bar{u}_h\|_{\mathcal{A}}$$

und zum (62) und (60) für finite Elemente

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2), \quad \|u - \tilde{u}_h\|_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}(h) = \|u - \tilde{u}_h\|_{H^1}$$

in diesem Anhang werden diese Ordnungen mit `nurKnoten = false` in dem Code rechnerisch bestätigt.

4. $\Omega = (0,1)$, 2. Ordnung, Dirichlet Randbedingungen, nicht glatte Daten: Seien

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & 2 - 2|x - \frac{1}{2}| - |x - \frac{1}{4}| - |x - \frac{3}{4}| \\ c_\epsilon(x) & = & (\frac{3}{2} - \epsilon) - (x - \frac{1}{2})^2/\epsilon, \quad \epsilon \in (0, \frac{1}{4}) \end{array} \qquad u_\epsilon(x) = \begin{cases} u(x), & |x - \frac{1}{2}| \geq \epsilon \\ c_\epsilon(x) & |x - \frac{1}{2}| < \epsilon \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & |x - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}, & |x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4} \end{cases} \qquad q_\epsilon(x) = \epsilon, \quad f_\epsilon(x) = \epsilon u_\epsilon(x) + \begin{cases} 0, & |x - \frac{1}{2}| \geq \epsilon \\ 1/(2\epsilon), & |x - \frac{1}{2}| < \epsilon \end{cases}$$

so, dass (39) im Anhang mit u_ϵ, p, q_ϵ und f_ϵ erfüllt wird, wobei die Bilinearform in (12) und die Linearform in (13) hier bezeichnet seien mit

$$\mathcal{A}_\epsilon(v, w) = \int_\Omega [q_\epsilon vw + pv'w']dx, \quad \mathcal{F}_\epsilon(v) = \int_\Omega f_\epsilon v dx, \quad v, w \in H_0^1(\Omega).$$

Diskretisierungen aus Abschnitt 4 werden für dieses Randwertproblem untersucht. Sei die Norm $\|\cdot\|_{2,h}$ auf Seiten 195 im Skriptum definiert, wobei die Matrix A vom Kontext verwendet wird. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Die Funktion u erfüllt

$$\mathcal{A}(u, s_h) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{A}_\epsilon(u, s_h) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{F}_\epsilon(s_h) = \mathcal{F}(s_h) = s_h(\tfrac{1}{2}), \quad \forall s_h \in \mathcal{S}_0^1(\Omega).$$

(b) Mit $\mathcal{A}$ und $\mathcal{F}$ im Teil (a) so definiert, ist die Lösung $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\Omega)$ des Systems

$$\mathcal{A}(u_h, s_h) = \mathcal{F}(s_h), \quad \forall s_h \in \mathcal{S}_0^1(\Omega)$$

gegeben für $N \in 2^{\mathbb{N}}$ und $N \geq 4$ durch $u_h(x) = u(x)$.

(c) Sei $\boldsymbol{u}_\epsilon$ die Lösung von (69) im Anhang mit $\epsilon = 1/2^5$. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u_\epsilon(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}_\epsilon\|_{2,h_i}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 2$.

(d) Sei $\tilde{\boldsymbol{u}}_\epsilon$ die Lösung von (71) im Anhang mit $\epsilon = 1/2^5$. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u_\epsilon(\boldsymbol{x}) - \tilde{\boldsymbol{u}}_\epsilon\|_{2,h_i}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 2$.

Hinweise: Teil (a) lässt sich durch eine direkte symbolische Rechnung bestätigen. Teil (b) folgt, wenn $u \in \mathcal{S}_0^1(\Omega)$ gilt. Dies ist der Fall, nur wenn $N \in 2^{\mathbb{N}}$ und $N \geq 4$ gelten, denn die Funktion u hat die drei Knickstellen in den dyadischen Stellen $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$.

Sonst wird das Beispiel mit diesem Code gelöst. Wenn `nurKnoten = true` ausgewählt wird, werden die Fehler-Integrale nur durch Auswertungen in den Knoten $\boldsymbol{x}$ approximiert. Wenn `nurKnoten = false` ausgewählt wird, werden die Fehler-Integrale durch feinere Auswertungen genauer berechnet.

Für Beispiele (2) und (4) sind Dirichlet Randbedingungen vorgegeben. Während die Daten für Beispiel (2) glatt sind, ist dies nicht der Fall für Beispiel (4). Daher werden die Voraussetzungen für theoretische Abschätzungen wie (38) und (39) für finite Differenzen in diesem Anhang hier nicht erfüllt. Trotzdem wird die Ordnung $\mathcal{O}(h)$ mit dem Code für Teil (c) mit `nurKnoten = true` oder mit `nurKnoten = false` bestätigt.

Jedoch werden die Voraussetzungen für theoretische Abschätzungen wie (64) und (65) für finite Elemente im Anhang erfüllt. Für Teil (d) wird die erwartete Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ mit dem Code für Teil (c) mit `nurKnoten = true` oder mit `nurKnoten = false` bestätigt.

5. $\Omega = (0,1)$, 4. Ordnung, Neumann Randbedingungen: Seien

$$u(x) = x(1 + x^3(-5 + x(6 - 2x)))/60, \quad p(x) = 1 - (x - \tfrac{1}{2})^2, \quad q(x) = 1 + (x - \tfrac{1}{2})^2$$

und $f(x)$ so, dass das Randwertproblem (2) im Anhang mit $\alpha = 0$ und $\omega = 1$ erfüllt wird. Diskretisierungen aus Abschnitt 6 werden für dieses Randwertproblem untersucht. Seien die Normen $\|\cdot\|_{2,h}$ und $\|\cdot\|_A$ auf Seiten 195 bzw. 70 im Skriptum definiert, wobei die Matrix A von (74) verwendet wird. Für finite Elemente sollen $\|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - M\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,h}$ und $\|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - M\tilde{\boldsymbol{u}}\|_A$ mit der Abbildung von Spline-Koeffizienten in die Zellzentren

```
M = spdiags([kron(ones(N,1),[1/8,3/4,1/8])],[0,1,2],N,N+2)
```

berechnet werden. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Sei $\bar{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (74) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{2,h_i}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) < 2$.

(b) Sei $\bar{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (74) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_A$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 1$.

(c) Sei $\tilde{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (82) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - M\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,h_i}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) < 2$.

(d) Sei $\bar{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (82) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - M\tilde{\boldsymbol{u}}\|_A$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) < 1$.

Hinweise: Das Beispiel wird mit diesem Code gelöst. Wenn `nurKnoten = true` ausgewählt wird, werden die Fehler-Integrale nur durch Auswertungen in den Knoten $\bar{\boldsymbol{x}}$ approximiert. Mit `nurKnoten = false` werden die Fehler-Integrale durch feinere Auswertungen genauer berechnet, und dadurch wird die Ordnung für eine Ableitung-bezogenene Norm reduziert.

Laut theoretischer Abschätzungen analog zu (38) und (39) für finite Differenzen

$$\|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{2,h} = \mathcal{O}(h^2), \quad h^{\frac{1}{2}}\|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_A = \|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{A,h} = \mathcal{O}(h^2)$$

und zu (64) und (65) für finite Elemente

$$\|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - M\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,h} = \mathcal{O}(h^2), \quad h^{\frac{1}{2}}\|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - M\tilde{\boldsymbol{u}}\|_A = \|u(\bar{\boldsymbol{x}}) - M\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{A,h} = \mathcal{O}(h^2)$$

in diesem Anhang werden diese Ordnungen für die jeweiligen Teile (a) – (d) erwartet. Mit `nurKnoten = true` in dem Code werden diese Ordnungen rechnerisch bestätigt.

Laut theoretischer Abschätzungen analog zu (36) und (34) für finite Differenzen

$$\|u - \bar{u}_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2), \quad \|u - \bar{u}_h\|_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}(h) = \|u - \bar{u}_h\|_{H^2}$$

und zu (62) und (60) für finite Elemente

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2), \quad \|u - \tilde{u}_h\|_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}(h) = \|u - \tilde{u}_h\|_{H^2}$$

in diesem Anhang werden diese Ordnungen mit `nurKnoten = false` in dem Code rechnerisch bestätigt.

6. $\Omega = (0,1)$, 4. Ordnung, Dirichlet Randbedingungen: Seien

$$u(x) = x^2(1-x)^2, \quad p(x) = 1 - (x - \tfrac{1}{2})^2, \quad q(x) = 1 + (x - \tfrac{1}{2})^2$$

und f so, dass das Randwertproblem (2) im Anhang mit $\alpha = 1$ und $\omega = 0$ erfüllt wird. Diskretisierungen aus Abschnitt 7 für dieses Randwertproblem werden für $N \in \mathbb{N}$ untersucht. Seien die Normen $\|\cdot\|_{2,h}$ und $\|\cdot\|_{A_0}$ auf Seiten 195 bzw. 70 im Skriptum definiert, wobei die SPD Matrix $A_0 = L^\top \mathrm{D}(\boldsymbol{p})L + \mathrm{D}(\boldsymbol{q})$ aus (83) für die Norm verwendet werden soll. Für finite Elemente sollen $\|u(\boldsymbol{x}) - M\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,h}$ und $\|u(\boldsymbol{x}) - M\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{A_0}$ mit der Abbildung von Spline-Koeffizienten in die inneren Schnittstellen

```
M = spdiags(ones(N+1,2)/2,[-1,0],N-1,N-2);
```

berechnet werden. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Sei $\boldsymbol{u}$ die Lösung von (83) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}\|_{2,h_i}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 2$.

(b) Sei $\boldsymbol{u}$ die Lösung von (83) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}\|_{A_0}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 1$.

(c) Sei $\tilde{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (84) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}) - M\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,h_i}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 2$.

(d) Sei $\tilde{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (84) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{5+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}) - M\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{A_0}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) < 1$.

Hinweise: Das Beispiel wird mit diesem Code gelöst. Wenn `nurKnoten = true` ausgewählt wird, werden die Fehler-Integrale nur durch Auswertungen in den Knoten $\boldsymbol{x}$ approximiert. Mit `nurKnoten = false` werden die Fehler-Integrale durch feinere Auswertungen genauer berechnet, und dadurch wird die Ordnung für eine Ableitung-bezogenene Norm reduziert. Laut theoretischer Abschätzungen analog zu (38) und (39) für finite Differenzen

$$\|u(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}\|_{2,h} = \mathcal{O}(h^2), \quad h^{\frac{1}{2}}\|u(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}\|_{A_0} = \|u(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}\|_{A_0,h} = \mathcal{O}(h^2)$$

und zu (64) und (65) für finite Elemente

$$\|u(\boldsymbol{x}) - M\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,h} = \mathcal{O}(h^2), \quad h^{\frac{1}{2}}\|u(\boldsymbol{x}) - M\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{A_0} = \|u(\boldsymbol{x}) - M\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{A_0,h} = \mathcal{O}(h^2)$$

in diesem Anhang werden diese Ordnungen für die jeweiligen Teile (a) – (d) erwartet. Mit `nurKnoten = true` in dem Code werden diese Ordnungen rechnerisch bestätigt.

Laut theoretischer Abschätzungen analog zu (36) und (34) für finite Differenzen

$$\|u - u_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2), \quad \|u - u_h\|_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}(h) = \|u - u_h\|_{H^2}$$

und zu (62) und (60) für finite Elemente

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2), \quad \|u - \tilde{u}_h\|_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}(h) = \|u - \tilde{u}_h\|_{H^2}$$

in diesem Anhang werden diese Ordnungen mit `nurKnoten = false` in dem Code rechnerisch bestätigt.

7. $\Omega = (0,1)^2$, 2. Ordnung, Neumann Randbedingungen: Seien

$$\begin{array}{rcl} u(x,y) & = & x^2(3-2x)y^2(3-2y), \\ p(x,y) & = & (1-(x-\frac{1}{2})^2)(1-(y-\frac{1}{2})^2, \\ q(x,y) & = & (1+(x-\frac{1}{2})^2)(1+(y-\frac{1}{2})^2) \end{array}$$

und $f(x,y)$ so, dass das Randwertproblem (3) im Anhang mit $\alpha = 0$ und $\omega = 1$ erfüllt wird. Diskretisierungen aus Abschnitt 8 für dieses Randwertproblem werden untersucht. Seien die Normen $\|\cdot\|_{2,h}$ und $\|\cdot\|_A$ auf Seiten 195 bzw. 70 im Skriptum definiert, wobei die Matrix A vom Kontext verwendet wird. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Sei $\bar{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (85) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{2+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{2,h_i^2}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 2$.

(b) Sei $\bar{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (85) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{2+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_A$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) < 1$.

(c) Sei $\tilde{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (100) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{2+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,h_i^2}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 2$.

(d) Sei $\tilde{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (100) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{2+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_A$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 1$.

Hinweise: Das Beispiel wird mit diesem Code gelöst. Wenn `nurKnoten = true` ausgewählt wird, werden die Fehler-Integrale nur durch Auswertungen in Knoten $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ oder $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ approximiert. Mit `nurKnoten = false` werden die Fehler-Integrale durch feinere Auswertungen genauer berechnet, und dadurch wird die Ordnung für eine Ableitung-bezogenene Norm reduziert.

Laut theoretischer Abschätzungen (38) und (39) für finite Differenzen

$$\|u(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{2,h} = \mathcal{O}(h^2), \quad h\|u(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_A = \|u(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) - \bar{\boldsymbol{u}}\|_{A,h^2} = \mathcal{O}(h^2)$$

und (64) und (65) für finite Elemente

$$\|u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,h} = \mathcal{O}(h^2), \quad h\|u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_A = \|u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_{A,h^2} = \mathcal{O}(h^2)$$

in diesem Anhang werden diese Ordnungen für die jeweiligen Teile (a) – (d) erwartet. Mit `nurKnoten = true` in dem Code werden diese Ordnungen rechnerisch bestätigt.

Laut theoretischer Abschätzungen (36) und (34) für finite Differenzen

$$\|u - \bar{u}_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2), \quad \|u - \bar{u}_h\|_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}(h) = \|u - \bar{u}_h\|_{H^1}$$

und (62) und (60) für finite Elemente

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2), \quad \|u - \tilde{u}_h\|_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}(h) = \|u - \tilde{u}_h\|_{H^1}$$

in diesem Anhang werden diese Ordnungen mit `nurKnoten = false` in dem Code rechnerisch bestätigt.

8. $\Omega = (0,1)^2$, 2. Ordnung, Dirichlet Randbedingungen: Seien

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x(x-1)(2x-1)y(y-1)(2y-1), \\ p(x,y) &= (1-(x-\tfrac{1}{2})^2)(1-(y-\tfrac{1}{2})^2, \\ q(x,y) &= (1+(x-\tfrac{1}{2})^2)(1+(y-\tfrac{1}{2})^2) \end{aligned}$$

und $f(x,y)$ so, dass das Randwertproblem (3) im Anhang mit $\alpha = 1$ und $\omega = 0$ erfüllt wird. Diskretisierungen aus Abschnitt 9 werden für dieses Randwertproblem untersucht. Seien die Normen $\|\cdot\|_{2,h}$ und $\|\cdot\|_A$ auf Seiten 195 bzw. 70 im Skriptum definiert, wobei die Matrix A vom Kontext verwendet wird. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Sei $\boldsymbol{u}$ die Lösung von (101) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{2+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{u}\|_{2,h_i^2}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 2$.

(b) Sei $\boldsymbol{u}$ die Lösung von (101) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{2+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{u}\|_A$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) < 1$.

(c) Sei $\tilde{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (102) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{2+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,h_i^2}$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 2$.

(d) Sei $\tilde{\boldsymbol{u}}$ die Lösung von (102) im Anhang. Für $N \in \{N_i\}_{i=1}^5$, $N_i = 2^{2+i}$, $h_i = 1/N_i$ und $F_i = \|u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_A$ gilt $\log_2(\text{mean}\{F_i/F_{i+1}\}_{i=1}^4) > 1$.

Hinweise: Das Beispiel wird mit diesem Code gelöst. Wenn `nurKnoten = true` ausgewählt wird, werden die Fehler-Integrale nur durch Auswertungen in den Knoten $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ approximiert. Mit `nurKnoten = false` werden die Fehler-Integrale durch feinere Auswertungen genauer berechnet, und dadurch wird die Ordnung für eine Ableitung-bezogenene Norm reduziert.

Laut theoretischer Abschätzungen analog zu (38) und (39) für finite Differenzen

$$\|u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{u}\|_{2,h} = \mathcal{O}(h^2), \quad h\|u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{u}\|_A = \|u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{u}\|_{A,h^2} = \mathcal{O}(h^2)$$

und zu (64) und (65) für finite Elemente

$$\|u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,h} = \mathcal{O}(h^2), \quad h\|u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \tilde{\boldsymbol{u}}\|_A = \|u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{u}\|_{A,h^2} = \mathcal{O}(h^2)$$

in diesem Anhang werden diese Ordnungen für die jeweiligen Teile (a) – (d) erwartet. Mit `nurKnoten = true` in dem Code werden diese Ordnungen rechnerisch bestätigt.

Laut theoretischer Abschätzungen analog zu (36) und (34) für finite Differenzen

$$\|u - u_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2), \quad \|u - u_h\|_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}(h) = \|u - u_h\|_{H^1}$$

und zu (62) und (60) für finite Elemente

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2), \quad \|u - \tilde{u}_h\|_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}(h) = \|u - \tilde{u}_h\|_{H^1}$$

in diesem Anhang werden diese Ordnungen mit `nurKnoten = false` in dem Code rechnerisch bestätigt.