Numerische Mathematik 1
Wintersemester 2020, Übungsblatt 10

Ausarbeitung über Moodle bis 18. Dezember 2020. Nach diesem Datum erscheinen die nachträglichen Kommentare und die Lösungen der Teilnehmer.

1. Sei das Integral $\int_a^b y(t)dt$ wie auf Seiten 210-213 im Skripum durch die zusammengesetzten Mittelpunkt-Regel $\mathrm{M}(y;a,b,m)$, Trapez-Regel $\mathrm{T}(y;a,b,m)$, Simpson-Regel $\mathrm{S}(y;a,b,m)$ und Milne-Regel $\mathrm{Q}(y;a,b,m)$ approximiert, wobei diese jeweils m, $m+1$, $2m+1$ und $3m$ Auswertungen der Funktion y verlangen. Die Approximationsfehler für die Funktion $f(t) = D_t\texttt{erf(t)}$ werden untersucht. Für $m \in \{m_i\}_{i=1}^5$, $m_i = 2^i$, wird die Ordnung ω eines Approximationsfehlers F_m mit

$$\omega = \log_2(\mathrm{mean}\{|F_{m_i}|/|F_{m_{i+1}}| : i = 1, \ldots, 4\})$$

abgeschätzt. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Für $F_m = \int_0^1 f(t)dt - \mathrm{M}(f;0,1,m)$ gilt $\omega = \texttt{2.005e+00}$ zu 4 signifikanten Ziffern.
(b) Für $F_m = \int_0^1 f(t)dt - \mathrm{T}(f;0,1,m)$ gilt $\omega = \texttt{1.997e+00}$ zu 4 signifikanten Ziffern.
(c) Für $F_m = \int_0^1 f(t)dt - \mathrm{S}(g;0,1,m)$ gilt $\omega = \texttt{3.992e+00}$ zu 4 signifikanten Ziffern.
(d) Für $F_m = \int_0^1 f(t)dt - \mathrm{Q}(g;0,1,m)$ gilt $\omega = \texttt{4.009e+00}$ zu 4 signifikanten Ziffern.

Kommentare: Sehen Sie diesen Code.

2. Sei das Integral $\int_a^b y(t)dt$ wie auf Seiten 210-213 im Skripum durch die zusammengesetzten Mittelpunkt-Regel $\mathrm{M}(y;a,b,m)$, Trapez-Regel $\mathrm{T}(y;a,b,m)$, Simpson-Regel $\mathrm{S}(y;a,b,m)$ und Milne-Regel $\mathrm{Q}(y;a,b,m)$ approximiert, wobei diese jeweils m, $m+1$, $2m+1$ und $3m$ Auswertungen der Funktion y verlangen. Die Approximationsfehler für die Funktion $g(t) = D_t\texttt{sinint(t)}$ werden untersucht. Für $m \in \{m_i\}_{i=1}^5$, $m_i = 2^i$, wird die Ordnung ω eines Approximationsfehlers F_m mit

$$\omega = \log_2(\mathrm{mean}\{|F_{m_i}|/|F_{m_{i+1}}| : i = 1, \ldots, 4\})$$

abgeschätzt. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Für $F_m = \int_0^\pi g(t)dt - M(f;0,1,m)$ gilt $\omega = \texttt{1.990e+00}$ zu 4 signifikanten Ziffern.
(b) Für $F_m = \int_0^\pi g(t)dt - T(f;0,1,m)$ gilt $\omega = \texttt{2.006e+00}$ zu 4 signifikanten Ziffern.
(c) Für $F_m = \int_0^\pi g(t)dt - S(g;0,\pi,m)$ gilt $\omega = \texttt{3.916e+00}$ zu 4 signifikanten Ziffern.
(d) Für $F_m = \int_0^\pi g(t)dt - Q(g;0,\pi,m)$ gilt $\omega = \texttt{4.016e+00}$ zu 4 signifikanten Ziffern.

Kommentare: Sehen Sie diesen Code.

3. Zur Approximation des Integrals $\int_a^b y(t)dt$ sei die Trapez-Regel mit $N_0(h) = N_0(y;a,b,h)$ bezeichnet, wobei $h = (b-a)/m$, $m \in 2^{\mathbb{N}_0}$ und $m+1$ Auswertungen der Funktion y verlangt werden. Denn nur gerade Potenzen von h in der Entwicklung von $N_0(h)$ stehen, sei eine genauere Approximation des Integrals durch die Richardson Extrapolation

$$N_j(h) = \frac{4^j N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{4^j - 1}, \quad j \in \mathbb{N}$$

gegeben. Sei die Romberg Integrationstabelle gegeben durch

$$N_{1,1}(y;a,b) = N_0(b-a), \quad N_{i,j}(y;a,b) = N_{j-1}((b-a)/2^{i-j}), \quad 1 \le j \le i \in \mathbb{N}.$$

Die Approximationsfehler für die Funktionen $f(x) = D_x\mathrm{erf}(x)$ und $g(x) = \sqrt{x}$ werden untersucht. Die Ordnung ω des Approximationsfehlers $F_i^{(j)}$, $1 \le i \le 5$, in der $j$ten Spalte von N wird mit

$$\omega_j = \log_2(\mathrm{mean}\{|F_i^{(j)}|/|F_{i+1}^{(j)}| : i = j, \dots, 4\})$$

abgeschätzt. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Für $F_i^{(2)} = \int_0^1 f(x)dx - N_{i,2}(f;0,1)$ gilt $\omega_2 = \texttt{3.84}$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(b) Es gilt $|\int_0^1 f(x)dx - N_{5,5}(f;0,1)| = \texttt{2.91e-7}$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(c) Für $F_i^{(1)} = \int_0^1 g(x)dx - N_{i,1}(g;0,1)$ gilt $\omega_1 = \texttt{1.51}$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(d) Es gilt $|\int_0^1 g(x)dx - N_{5,5}(g;0,1)| = \texttt{1.07e-3}$ zu 3 signifikanten Ziffern.

Kommentare: Sehen Sie diesen Code.

4. Zur Approximation des Integrals $\int_a^b y(t)dt$ sei die Mittelpunkt-Regel mit $N_0(h) = N_0(h;y,a,b)$ bezeichnet, wobei $h = (b-a)/m$, $m \in 3^{\mathbb{N}_0}$ und m Auswertungen der Funktion y verlangt werden. Denn nur gerade Potenzen von h in der Entwicklung von $N_0(h)$ stehen, sei eine genauere Approximation des Integrals durch die Richardson Extrapolation

$$N_j(h) = \frac{9^j N_{j-1}(h/3) - N_{j-1}(h)}{9^j - 1}, \quad j \in \mathbb{N}$$

gegeben. Sei die Romberg Integrationstabelle gegeben durch

$$N_{1,1}(y;a,b) = N_0(b-a), \quad N_{i,j}(y;a,b) = N_{j-1}((b-a)/3^{i-j}), \quad 1 \le j \le i \in \mathbb{N}.$$

Die Approximationsfehler für die Funktionen $f(t) = D_t\mathrm{sinint}(t)$ und $g(t) = \sqrt{t}$ werden untersucht. Die Ordnung ω des Approximationsfehlers $F_i^{(j)}$, $1 \le i \le 5$, in der $j$ten Spalte von N wird mit

$$\omega_j = \log_3(\mathrm{mean}\{|F_i^{(j)}|/|F_{i+1}^{(j)}| : i = j, \dots, 4\})$$

abgeschätzt. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Für $F_i^{(3)} = \int_0^\pi f(x)dx - N_{i,3}(f;0,\pi)$ gilt $\omega_3 = \texttt{6.09}$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(b) Es gilt $|\int_0^\pi f(x)dx - N_{4,4}(f;0,\pi)| = \texttt{2.79e-7}$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(c) Für $F_i^{(2)} = \int_0^1 g(x)dx - N_{i,2}(g;0,1)$ gilt $\omega_2 = \texttt{1.50}$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(d) Es gilt $|\int_0^1 g(x)dx - N_{5,5}(g;0,1)| = \texttt{6.26e-7}$ zu 3 signifikanten Ziffern.

Kommentare: Sehen Sie diesen Code. Mit $m \in 3^{\mathbb{N}_0}$, $h = (b-a)/m$,

$$t_j^{(m)} = a + (j-1)h, \quad 1 \le j \le m+1, \quad \bar{t}_j^{(m)} = (t_j^{(m)} + t_{j+1}^{(m)})/2$$

$$\check{t}_j^{(m)} = \bar{t}_{3j}^{(3m)} = \bar{t}_j^{(m)} - h/3, \quad \bar{t}_j^{(m)} = \bar{t}_{3j-1}^{(3m)}, \quad \hat{t}_j^{(m)} = \bar{t}_{3j-2}^{(3m)} = \bar{t}_j^{(m)} + h/3,$$

gelten für die Mittelpunkt-Regel,

$$N_0(h) = h \sum_{j=1}^{m} y(\bar{t}_j^{(m)})$$

$$N_0(h/3) = \frac{h}{3}\sum_{j=1}^{3m} y(\bar{t}_j^{(3m)}) = \frac{h}{3}\sum_{j=1}^{m} y(\check{t}_j^{(m)}) + \frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{m} y(\bar{t}_j^{(m)}) + \frac{h}{3}\sum_{j=1}^{m} y(\hat{t}_j^{(m)})$$
$$= \frac{1}{3}\left[N_0(h) + h\sum_{j=1}^{m} y(\check{t}_j^{(m)}) + h\sum_{j=1}^{m} y(\hat{t}_j^{(m)})\right]$$

usw.

$$N_0(h/9) = \frac{1}{3}\left[N_0(h/3) + (h/3)\sum_{j=1}^{3m} y(\check{t}_j^{(3m)}) + (h/3)\sum_{j=1}^{3m} y(\hat{t}_j^{(3m)})\right].$$

5. Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Grundregel der Gauß-Legendre Quadratur gegeben durch

$$\int_{-1}^{+1} y(x)dx = G_{n,1}(y; -1, +1) + \mathcal{O}((b-a)^{2n+1}),$$

wobei mit dem Legendre Polynom $P_{n+1} \in \mathcal{P}^{n+1}$

$$G_{n,1}(y; -1, +1) = \sum_{i=0}^{n} a_i y(x_i), \quad a_i = \int_{-1}^{+1} L_{n,i}(x)dx, \quad P_{n+1}(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n+1.$$

Zur Approximation des Integrals $\int_a^b y(t)dt$ sei die zusammengesetzte Gauß-Legendre Quadratur-Regel mit $G_{n,m}(y; a, b)$ bezeichnet, die $n+1$ Auswertungen der Funktion y in jedem von $m \in \mathbb{N}$ gleich großen Teilintervallen verlangt. Die Approximationsfehler für die Funktionen $f(x) = D_x\mathrm{erf}(x)$ und $g(x) = \sqrt{x}$ werden untersucht. Für $m \in \{m_i\}_{i=0}^{2}$, $m_i = 2^i$, wird die Ordnung ω eines Approximationsfehlers F_m mit

$$\omega = \log_2(\mathrm{mean}\{|F_{m_i}|/|F_{m_{i+1}}| : i = 1, \dots, 4\})$$

abgeschätzt. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Für $F_m = \int_0^1 f(x)dx - G_{2,m}(f; 0, 1)$ gilt $\omega = \texttt{6.27}$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(b) Für $F_m = \int_0^1 f(x)dx - G_{4,m}(f; 0, 1)$ gilt $\omega = \texttt{9.9}$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(c) Für $F_m = \int_0^1 g(x)dx - G_{1,m}(g; 0, 1)$ gilt $\omega = \texttt{1.49}$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(d) Für $F_m = \int_0^1 g(x)dx - G_{3,m}(g; 0, 1)$ gilt $\omega = \texttt{1.50}$ zu 3 signifikanten Ziffern.

Kommentare: Sehen Sie diesen Code.

6. Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Grundregel der Gauß-Legendre Quadratur gegeben durch

$$\int_{-1}^{+1} y(x)dx = G_{n,1}(y; -1, +1) + \mathcal{O}(h^{2n+1}),$$

wobei mit dem Legendre Polynom $P_{n+1} \in \mathcal{P}^{n+1}$

$$G_{n,1}(y; -1, +1) = \sum_{i=0}^{n} a_i y(x_i), \quad a_i = \int_{-1}^{+1} L_{n,i}(x)dx, \quad P_{n+1}(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n+1.$$

Zur Approximation des Integrals $\int_a^b y(t)dt$ sei die zusammengesetzte Gauß-Legendre Quadratur-Regel mit $G_{n,m}(y; a, b)$ bezeichnet, die $n+1$ Auswertungen der Funktion y

in jedem von $m \in \mathbb{N}$ gleich großen Teilintervallen verlangt. Die Approximationsfehler für die Funktionen $f(x) = D_x\text{ellipticE}(x, 0.5)$ und $g(x) = D_x\text{ellipticF}(x, 0.99)$ werden untersucht. Für $m \in \{m_i\}_{i=0}^{2}$, $m_i = 2^i$, wird die Ordnung ω eines Approximationsfehlers F_m mit

$$\omega = \log_2(\text{mean}\{|F_{m_i}|/|F_{m_{i+1}}| : i = 1, \ldots, 4\})$$

abgeschätzt. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Für $F_m = \int_0^\pi f(x)dx - G_{1,m}(f; 0, 1)$ gilt $\omega = \texttt{6.06}$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(b) Für $F_m = \int_0^\pi g(x)dx - G_{3,m}(f; 0, 1)$ gilt $\omega = \texttt{12.5}$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(c) Für $F_m = \int_0^\pi g(x)dx - G_{2,m}(g; 0, 1)$ gilt $\omega = \texttt{5.25}$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(d) Für $F_m = \int_0^\pi g(x)dx - G_{4,m}(g; 0, 1)$ gilt $\omega = \texttt{7.50}$ zu 3 signifikanten Ziffern.

Kommentare: Sehen Sie diesen Code.

7. Sei das Skalarprodukt

$$(\phi, \psi) = \int_a^b w(x)\phi(x)\psi(x)dx, \quad \phi, \psi \in \mathcal{C}([a, b]), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$$

bezüglich eines auf $[a, b]$ summierbaren Gewichts $w : [a, b] \to [0, \infty]$, gegeben. Polynome $\{p_m \in \mathcal{P}^m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$, die orthonormal bezüglich des Skalarprodukts sind, werden durch die Gram-Schmidt Orthogonalisierung der Grund-Polynome x^m, $m \in \mathbb{N}_0$, folgendermaßen bestimmt:

$$\begin{array}{l}
\text{for } m = 0, 1, 2, \ldots \\
\quad P_m = x^m \\
\quad \text{for } n = 0, \ldots, m-1 \\
\quad\quad P_m = P_m - (P_m, P_n)P_n \\
\quad \text{end} \\
\quad P_m = P_m/(P_m, P_m)^{\frac{1}{2}} \\
\text{end}
\end{array}$$

Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Mit $a = -1$, $b = +1$, $w(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2}$ ergeben sich

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = 2x, \quad P_2(x) = 4x^2 - 1, \quad P_3(x) = 4x(2x^2 - 1).$$

(b) Mit $a = -1$, $b = +1$, $w(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)$ ergeben sich

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = 2x, \quad P_2(x) = \tfrac{3}{4}(5x^2 - 1), \quad P_3(x) = x(7x^2 - 3)$$

(c) Mit $a = -\infty$, $b = +\infty$, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-x^2)$ ergeben sich

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = 2x, \quad P_2(x) = 2(2x^2 - 1), \quad P_3(x) = 4x(2x^2 - 3).$$

(d) Mit $a = 0$, $b = +\infty$, $w(x) = \exp(-x)$ ergeben sich

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - 1, \quad P_2(x) = (x^2 - 4x + 2)/2, \quad P_3(x) = (x^3 - 9x^2 + 18x - 6)/6.$$

Kommentare: Sehen Sie diesen Code.

8. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $\boldsymbol{x} = \{x_i\}_{i=1}^n$, $x_i = -1 + 2(i-1)/(n-1)$. Für $m < n$ seien die Spalten der Vandermonde Matrix $V = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gegeben durch

$$\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{1} = \{1\}_{i=1}^n, \quad \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{x}^{k-1} = \{x_i^{k-1}\}_{i=1}^n, \quad k = 2, \dots, m.$$

Die Vektoren $\{\boldsymbol{v}_k\}_{k=1}^m$ werden bezüglich des Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$ durch die folgenden Verfahren orthonormalisiert:

Klassisches Gram-Schmidt Verfahren

for $i = 1, \dots, m$
 $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i$
 for $j = 1, \dots, i-1$
  $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_i - (\boldsymbol{u}_j^\top \boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{u}_j$
 end
 $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_i / \|\boldsymbol{u}_i\|_2$
end

Stabilisiertes Gram-Schmidt Verfahren

$\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{v}_j, \quad j = 1, \dots, m$
for $i = 1, \dots, m$
 $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}_i / \|\boldsymbol{w}_i\|_2$
 for $j = i+1, \dots, m$
  $\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{w}_j - (\boldsymbol{w}_i^\top \boldsymbol{w}_j)\boldsymbol{w}_i$
 end
end

Die Vektoren $\{\boldsymbol{u}_k\}_{k=1}^m$ und $\{\boldsymbol{w}_k\}_{k=1}^m$ werden mit den Auswertungen $\boldsymbol{p}_k = P_{k-1}(\boldsymbol{x}) / \|P_{k-1}(\boldsymbol{x})\|_2$, $k \in \mathbb{N}$, verglichen, wobei die Legendre Polynome $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ durch die Rekursionsformel gegeben sind,

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad (k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Seien $U = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m], W = [\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m], P = [\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die Einheitsmatrix. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Für $n = 100$, $m = 10$ gelten:
$\|U^\top U - I\|_\infty <$ `6.0e-12`, $\|W^\top W - I\|_\infty <$ `2.0e-13` und $\|P^\top P - I\|_\infty <$ `6.0e-01`.

(b) Für $n = 100$, $m = 20$ gelten:
$\|U^\top U - I\|_\infty <$ `1.6e-01`, $\|W^\top W - I\|_\infty <$ `2.0e-09` und $\|P^\top P - I\|_\infty <$ `3.0e+00`.

(c) Für $n = 1000$, $m = 10$ gelten:
$\|U - P\|_\infty <$ `1.5e-02` und $\|W - P\|_\infty <$ `1.4e-02`.

(d) Für $n = 1000$, $m = 20$ gelten:
$\|U - P\|_\infty <$ `4.0e-01` und $\|W - P\|_\infty <$ `1.0e-02`.

Kommentare: Sehen Sie diesen Code.