Numerische Mathematik 1
Wintersemester 2020, Übungsblatt 9

Ausarbeitung über Moodle bis 4. Dezember 2020. Nach diesem Datum erscheinen die nachträglichen Kommentare und die Lösungen der Teilnehmer.

1. Seien die kanonischen Splines $\{\pi_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ auf Seiten 155-156 im Skriptum definiert. Seien die Differenzen Operatoren

$$V_h f(x) = \frac{\Delta_h^1 f(x)}{h}, \quad R_h f(x) = \frac{\nabla_h^1 f(x)}{h} \quad \text{und} \quad Z_h f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_h^1 f(x-h/2)}{h} + \frac{\delta_h^1 f(x+h/2)}{h}\right)$$

durch Seiten 195 und 198 im Skriptum definiert. Sei $h \in \{h_i\}_{i=1}^5$, $h_i = 1/2^{5+i}$. Für die quadratischen und kubischen Splines seien für die jeweiligen Intervalle $[0,3]$ und $[0,4]$ die Gitterpunkte $\boldsymbol{x}_h = \{ih \in (0,3) : i \in \mathbb{N}\}$. bzw. $\boldsymbol{y}_h = \{ih \in (0,4) : i \in \mathbb{N}\}$ definiert. Sei die Fehler-Norm $\|\cdot\|_{h,p}$ auf Seite 195 im Skriptum definiert. Die Ordnung ω_p eines Approximationsfehlers F_h wird mit

$$\omega_p = \log_2(\text{mean}\{\|F_{h_i}\|_{p,h_i}/\|F_{h_{i+1}}\|_{p,h_{i+1}} : i = 1,\dots,4\})$$

abgeschätzt. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Für $F_h = \pi_2'(\boldsymbol{x}_h) - V_h\pi_2(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_2 = 1.0$ zu 2 signifikanten Ziffern.
(b) Für $F_h = \pi_2'(\boldsymbol{x}_h) - Z_h\pi_2(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_2 = 2.0$ zu 2 signifikanten Ziffern.
(c) Für $F_h = \pi_3'(\boldsymbol{y}_h) - R_h\pi_3(\boldsymbol{y}_h)$ gilt $\omega_1 = 1.0$ zu 2 signifikanten Ziffern.
(d) Für $F_h = \pi_3'(\boldsymbol{y}_h) - Z_h\pi_3(\boldsymbol{y}_h)$ gilt $\omega_\infty = 3.0$ zu 2 signifikanten Ziffern.

Kommentare: Sehen Sie diesen Code. Zu den angegebenen dezimalen Stellen wird mit Matlab berechnet,

```
Quadratischer Spline:
  Vorwaerts Differenzen:     Rueckwaerts Differenzen:     Zentrale Differenzen:
    omega_1   = 0.99868        omega_1   = 0.99868          omega_1   = 2.00000
    omega_2   = 0.99956        omega_2   = 0.99956          omega_2   = 1.50000
    omega_inf = 1.00000        omega_inf = 1.00000          omega_inf = 1.00000

Kubischer Spline:
  Vorwaerts Differenzen:     Rueckwaerts Differenzen:     Zentrale Differenzen:
    omega_1   = 0.99997        omega_1   = 0.99997          omega_1   = 1.99602
    omega_2   = 0.99998        omega_2   = 0.99998          omega_2   = 1.99761
    omega_inf = 0.99735        omega_inf = 0.99735          omega_inf = 2.00000
```

Für Vorwärts und Rückwärts Differenzen liegen alle Ordungungen bei $\omega = 1$, wie auf Seite 193 im Skriptum begründet. Wegen Seite 194 im Skriptum ist die Ordnung $\omega = 2$ für zentrale Differenzen zu erwarten, aber nur wenn die Funktion ausreichend glatt ist. Der kubische Spline liegt in $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, und daher für zentrale Differenzen liegt seine Ordnung bei $\omega = 2$ in allen Normen. Der quadratische Spline liegt aber nur in $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, obwohl er weg von den Stützstellen sehr glatt ist. Also wenn die Approximationsfehler besonders durch die 1-Norm gemittelt werden, wird die Ordnung $\omega_1 = 2$ erreicht. Jedoch ergibt sich $\omega_\infty = 1$ wegen der fehlenden Glattheit an den Stützstellen im schlimmsten Fall.

2. Seien die kanonischen Splines $\{\pi_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ auf Seiten 155-156 im Skriptum definiert. Seien die Differenzen Operatoren

$$V_h f(x) = \frac{\Delta_h^1 f(x)}{h}, \quad R_h f(x) = \frac{\nabla_h^1 f(x)}{h} \quad \text{und} \quad Z_h f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_h^1 f(x-h/2)}{h} + \frac{\delta_h^1 f(x+h/2)}{h}\right)$$

durch Seiten 195 und 198 im Skriptum definiert. Sei $h \in \{h_i\}_{i=1}^5$, $h_i = 1/2^{5+i}$. Für die quadratischen und kubischen Splines seien für die jeweiligen Intervalle $[0,3]$ und $[0,4]$ die Gitterpunkte $\boldsymbol{x}_h = \{ih \in (0,3) : i \in \mathbb{N}\}$. bzw. $\boldsymbol{y}_h = \{ih \in (0,4) : i \in \mathbb{N}\}$ definiert. Sei die Fehler-Norm $\|\cdot\|_{h,p}$ auf Seite 195 im Skriptum definiert. Die Ordnung ω_p eines Approximationsfehlers F_h wird mit

$$\omega_p = \log_2(\text{mean}\{\|F_{h_i}\|_{p,h_i}/\|F_{h_{i+1}}\|_{p,h_{i+1}} : i = 1,\ldots,4\})$$

abgeschätzt. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Für $F_h = \pi_2'(\boldsymbol{x}_h) - R_h\pi_2(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_1 = 1.0$ zu 2 signifikanten Ziffern.

(b) Für $F_h = \pi_2'(\boldsymbol{x}_h) - Z_h\pi_2(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_\infty = 1.5$ zu 2 signifikanten Ziffern.

(c) Für $F_h = \pi_3'(\boldsymbol{y}_h) - V_h\pi_3(\boldsymbol{y}_h)$ gilt $\omega_2 = 1.0$ zu 2 signifikanten Ziffern.

(d) Für $F_h = \pi_3'(\boldsymbol{y}_h) - Z_h\pi_3(\boldsymbol{y}_h)$ gilt $\omega_1 = 2.5$ zu 2 signifikanten Ziffern.

Kommentare: Sehen Sie diesen Code. Zu den angegebenen dezimalen Stellen wird mit Matlab berechnet,

```
Quadratischer Spline:
  Vorwaerts Differenzen:     Rueckwaerts Differenzen:     Zentrale Differenzen:
    omega_1   = 0.99868        omega_1   = 0.99868          omega_1   = 2.00000
    omega_2   = 0.99956        omega_2   = 0.99956          omega_2   = 1.50000
    omega_inf = 1.00000        omega_inf = 1.00000          omega_inf = 1.00000

Kubischer Spline:
  Vorwaerts Differenzen:     Rueckwaerts Differenzen:     Zentrale Differenzen:
    omega_1   = 0.99997        omega_1   = 0.99997          omega_1   = 1.99602
    omega_2   = 0.99998        omega_2   = 0.99998          omega_2   = 1.99761
    omega_inf = 0.99735        omega_inf = 0.99735          omega_inf = 2.00000
```

Für Vorwärts und Rückwärts Differenzen liegen alle Ordungungen bei $\omega = 1$, wie auf Seite 193 im Skriptum begründet. Wegen Seite 194 im Skriptum ist die Ordnung $\omega = 2$ für zentrale Differenzen zu erwarten, aber nur wenn die Funktion ausreichend glatt ist. Der kubische Spline liegt in $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, und daher für zentrale Differenzen liegt seine Ordnung bei $\omega = 2$ in allen Normen. Der quadratische Spline liegt aber nur in $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, obwohl er weg von den Stützstellen sehr glatt ist. Also wenn die Approximationsfehler besonders durch die 1-Norm gemittelt werden, wird die Ordnung $\omega_1 = 2$ erreicht. Jedoch ergibt sich $\omega_\infty = 1$ wegen der fehlenden Glattheit an den Stützstellen im schlimmsten Fall.

3. In einer Umgebung $B_x = B(x,\epsilon)$ mit einem fixierten $\epsilon > 0$ sei eine Funktion f für die folgenden finiten Differenzen mit $0 < h \ll \epsilon$ definiert. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an:

(a) Für $f \in \mathcal{C}^5(B_x)$ gilt $f^3(x) =$

$$\frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3} - \frac{3h}{2} f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

(b) Für $f \in \mathcal{C}^6(B_x)$ gilt $f^3(x) =$

$$\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} + \frac{h^2}{4} f^{(5)}(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

(c) Für $f \in \mathcal{C}^7(B_x)$ gilt $f^2(x) =$

$$\frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2} - \frac{h^4}{90} f^{(6)}(x) + \mathcal{O}(h^6)$$

(d) Für $f \in \mathcal{C}^7(B_x)$ gilt $f^1(x) =$

$$\frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(x) + \mathcal{O}(h^6)$$

Kommentare: Mit Mathematica wird berechnet für Teil (a),

```
Simplify[(
Series[u[x+0h],{h,0,6}]*(-1)+
Series[u[x+1h],{h,0,6}]*(+3)+
Series[u[x+2h],{h,0,6}]*(-3)+
Series[u[x+3h],{h,0,6}]*(+1)
)/h^3]
= u^(3)[x] + (3/2) u^(4)[x] h + (5/4) u^(5)[x] h^2 + O(h^3)
```

für Teil (b),

```
Simplify[(
Series[u[x+2h],{h,0,8}]*(+1)+
Series[u[x+ h],{h,0,8}]*(-2)+
Series[u[x- h],{h,0,8}]*(+2)+
Series[u[x-2h],{h,0,8}]*(-1)
)/(2h^3)]
= u^(3)[x] + (1/4) u^(5)[x] h^2 + (1/40) u^(7)(x) h^4 + O(h^6)
```

für Teil (c)

```
Simplify[(
Series[u[x+2h],{h,0,10}]*( -1)+
Series[u[x+ h],{h,0,10}]*(+16)+
Series[u[x+0h],{h,0,10}]*(-30)+
Series[u[x- h],{h,0,10}]*(+16)+
Series[u[x-2h],{h,0,10}]*( -1)
)/(12 h^2)]
= u^(2)[x] - (1/90) u^(6)[x] h^4 - (1/1008) u^(8)[x] h^6 + O(h^8)
```

und für Teil (d)

```
Simplify[(
Series[u[x+2h],{h,0,6}]*(-1)+
Series[u[x+ h],{h,0,6}]*(+8)+
Series[u[x- h],{h,0,6}]*(-8)+
Series[u[x-2h],{h,0,6}]*(+1)
)/(12 h)]
= u^(1)[x] - (1/30) u^(5)[x] h^4 - (1/252) u^(7)[x] h^6 + O(h^8)
```

4. In einer Umgebung $B_x = B(x, \epsilon)$ mit einem fixierten $\epsilon > 0$ sei eine Funktion f für die folgenden finiten Differenzen mit $0 < h \ll \epsilon$ definiert. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an:

   (a) Für $f \in \mathcal{C}^4(B_x)$ gilt $f^2(x) =$

   $$\frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2} - hf^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

   (b) Für $f \in \mathcal{C}^6(B_x)$ gilt $f^3(x) =$

   $$\frac{f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h)}{h^3} + \frac{3h}{2} f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

   (c) Für $f \in \mathcal{C}^7(B_x)$ gilt $f^2(x) =$

   $$\frac{35f(x) - 104f(x+h) + 114f(x+2h) - 56f(x+3h) + 11f(x+4h)}{12h^2} + \frac{5h^3}{6} f^{(5)}(x) + \mathcal{O}(h^5)$$

   (d) Für $f \in \mathcal{C}^5(B_x)$ gilt $f^1(x) =$

   $$\frac{11f(x) - 18f(x-h) + 9f(x-2h) - 2f(x-3h)}{6h} + \frac{h^3}{4} f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

Kommentare: Mit Mathematica wird berechnet für Teil (a),

```
Simplify[(
Series[u[x+0h],{h,0,6}]*(+1)+
Series[u[x+1h],{h,0,6}]*(-2)+
Series[u[x+2h],{h,0,6}]*(+1)
)/h^2]
= u^(2)[x] + u^(3)[x] h + (7/12) u^(4)[x] h^2 + O(h^3)
```

für Teil (b)

```
Simplify[(
Series[u[x+0h],{h,0,6}]*(+1)+
Series[u[x-1h],{h,0,6}]*(-3)+
Series[u[x-2h],{h,0,6}]*(+3)+
Series[u[x-3h],{h,0,6}]*(-1)
)/h^3]
= u^(3)[x] + (3/2) u^(4)[x] h + (5/4) u^(5)[x] h^2 + O(h^3)
```

für Teil (c)

```
Simplify[(
Series[u[x+0h],{h,0,10}]*(+ 35) +
Series[u[x+ h],{h,0,10}]*(-104) +
Series[u[x+2h],{h,0,10}]*(+114) +
Series[u[x+3h],{h,0,10}]*(- 56) +
Series[u[x+4h],{h,0,10}]*(+ 11)
)/(12 h^2)]
= u^(2)[x] + (5/6) u^(5)[x] h^3 + (119/90) u^(6)[x] h^4 + O(h^5)
```

und für Teil (d)

```
Simplify[(
Series[u[x   ],{h,0,6}]*(+11)+
Series[u[x- h],{h,0,6}]*(-18)+
Series[u[x-2h],{h,0,6}]*(+ 9)+
Series[u[x-3h],{h,0,6}]*(- 2)
)/(6 h)]
= u^(1)[x] - (1/4) u^(4)[x] h^3 + (3/10) u^(5)[x] h^4 + O(h^5)
```

5. Für $h \in \{h_i\}_{i=1}^6$, $h_i = 1/2^{2+i}$ seien die Gitterpunkte $\boldsymbol{x}_h = \{ih \in [0,1], i \in \mathbb{N}_0\}$ gegeben. Seien die Differenzen Operatoren

$$\begin{aligned} D_h^{(1)} f(x) &= \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} \\ D_h^{(3)} f(x) &= \frac{-f(x) + 3f(x+h) - 3f(x+2h) + f(x+3h)}{h^3} \end{aligned}$$

Sei die Fehler-Norm $\|\cdot\|_{h,p}$ auf Seite 195 im Skriptum definiert. Die Ordnung ω_p eines Approximationsfehlers F_h wird mit

$$\omega_p = \log_2(\text{mean}\{\|F_{h_i}\|_{p,h_i}/\|F_{h_{i+1}}\|_{p,h_{i+1}} : i = 1, \ldots, 4\})$$

abgeschätzt. Diese Konstruktionen werden für die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad g(x) = e^{-x}$$

untersucht. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Für $F_h = f^{(1)}(\boldsymbol{x}_h) - D_h^{(1)} f(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_\infty = 1.89$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(b) Für $F_h = f^{(3)}(\boldsymbol{x}_h) - D_h^{(3)} f(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_2 = 1.01$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(c) Für $F_h = g^{(1)}(\boldsymbol{x}_h) - D_h^{(1)} g(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_2 = 2.00$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(d) Für $F_h = g^{(3)}(\boldsymbol{x}_h) - D_h^{(3)} g(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_1 = 0.947$ zu 3 signifikanten Ziffern.

Kommentare: Sehen Sie diesen Code. Zu den angegebenen dezimalen Stellen wird mit Matlab berechnet,

```
fuer f, p = 1                                      fuer g, p = 1
  f^(1)-D_h^(1) f, omega_1   = 1.97658    g^(1)-D_h^(1) g, omega_1   = 2.01183
  f^(2)-D_h^(2) f, omega_1   = 1.91544    g^(2)-D_h^(2) g, omega_1   = 1.99774
  f^(3)-D_h^(3) f, omega_1   = 0.95921    g^(3)-D_h^(3) g, omega_1   = 1.00876
  f^(4)-D_h^(4) f, omega_1   = 0.91111    g^(4)-D_h^(4) g, omega_1   = 0.99870

fuer f, p = 2                                      fuer g, p = 2
  f^(1)-D_h^(1) f, omega_2   = 1.96358    g^(1)-D_h^(1) g, omega_2   = 1.99506
  f^(2)-D_h^(2) f, omega_2   = 1.89936    g^(2)-D_h^(2) g, omega_2   = 1.98104
  f^(3)-D_h^(3) f, omega_2   = 0.94685    g^(3)-D_h^(3) g, omega_2   = 0.99200
  f^(4)-D_h^(4) f, omega_2   = 0.89643    g^(4)-D_h^(4) g, omega_2   = 0.98200

fuer f, p = inf                                    fuer g, p = inf
  f^(1)-D_h^(1) f, omega_inf = 1.88746    g^(1)-D_h^(1) g, omega_inf = 1.96885
  f^(2)-D_h^(2) f, omega_inf = 1.80687    g^(2)-D_h^(2) g, omega_inf = 1.95497
  f^(3)-D_h^(3) f, omega_inf = 0.85576    g^(3)-D_h^(3) g, omega_inf = 0.96583
  f^(4)-D_h^(4) f, omega_inf = 0.79085    g^(4)-D_h^(4) g, omega_inf = 0.95591
```

Je höher die Ordnung k der Ableitung, desto betragsmäßig größer ist $f^{(k)}$ als $g^{(k)}$, und daher sind die Approximationen der Ableitungen von g genauer als für f.

6. Für $h \in \{h_i\}_{i=1}^5$, $h_i = 1/2^{2+i}$ seien die Gitterpunkte $\boldsymbol{x}_h = \{ih \in [0,1], i \in \mathbb{N}_0\}$ gegeben. Seien die Differenzen Operatoren

$$\begin{aligned} D_h^{(2)} f(x) &= \frac{+2f(x) - 5f(x+h) + 4f(x+2h) - f(x+3h)}{h^2} \\ D_h^{(4)} f(x) &= \frac{+f(x) - 4f(x+h) + 6f(x+2h) - 4f(x+3h) + f(x+4h)}{h^4} \end{aligned}$$

Sei die Fehler-Norm $\|\cdot\|_{h,p}$ auf Seite 195 im Skriptum definiert. Die Ordnung ω_p eines Approximationsfehlers F_h wird mit

$$\omega_p = \log_2(\text{mean}\{\|F_{h_i}\|_{p,h_i}/\|F_{h_{i+1}}\|_{p,h_{i+1}} : i = 1,\dots,4\})$$

abgeschätzt. Diese Konstruktionen werden für die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad g(x) = e^{-x}$$

untersucht. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Für $F_h = f^{(2)}(\boldsymbol{x}_h) - D_h^{(2)} f(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_1 = 2.00$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(b) Für $F_h = f^{(4)}(\boldsymbol{x}_h) - D_h^{(4)} f(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_2 = 0.896$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(c) Für $F_h = g^{(2)}(\boldsymbol{x}_h) - D_h^{(2)} g(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_1 = 1.92$ zu 3 signifikanten Ziffern.

(d) Für $F_h = g^{(4)}(\boldsymbol{x}_h) - D_h^{(4)} g(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_\infty = 0.956$ zu 3 signifikanten Ziffern.

Kommentare: Sehen Sie diesen Code. Zu den angegebenen dezimalen Stellen wird mit Matlab berechnet,

```
fuer f, p = 1                               fuer g, p = 1
  f^(1)-D_h^(1) f, omega_1   = 1.97658    g^(1)-D_h^(1) g, omega_1   = 2.01183
  f^(2)-D_h^(2) f, omega_1   = 1.91544    g^(2)-D_h^(2) g, omega_1   = 1.99774
  f^(3)-D_h^(3) f, omega_1   = 0.95921    g^(3)-D_h^(3) g, omega_1   = 1.00876
  f^(4)-D_h^(4) f, omega_1   = 0.91111    g^(4)-D_h^(4) g, omega_1   = 0.99870

fuer f, p = 2                               fuer g, p = 2
  f^(1)-D_h^(1) f, omega_2   = 1.96358    g^(1)-D_h^(1) g, omega_2   = 1.99506
  f^(2)-D_h^(2) f, omega_2   = 1.89936    g^(2)-D_h^(2) g, omega_2   = 1.98104
  f^(3)-D_h^(3) f, omega_2   = 0.94685    g^(3)-D_h^(3) g, omega_2   = 0.99200
  f^(4)-D_h^(4) f, omega_2   = 0.89643    g^(4)-D_h^(4) g, omega_2   = 0.98200

fuer f, p = inf                             fuer g, p = inf
  f^(1)-D_h^(1) f, omega_inf = 1.88746    g^(1)-D_h^(1) g, omega_inf = 1.96885
  f^(2)-D_h^(2) f, omega_inf = 1.80687    g^(2)-D_h^(2) g, omega_inf = 1.95497
  f^(3)-D_h^(3) f, omega_inf = 0.85576    g^(3)-D_h^(3) g, omega_inf = 0.96583
  f^(4)-D_h^(4) f, omega_inf = 0.79085    g^(4)-D_h^(4) g, omega_inf = 0.95591
```

Je höher die Ordnung k der Ableitung, desto betragsmäßig größer ist $f^{(k)}$ als $g^{(k)}$, und daher sind die Approximationen der Ableitungen von g genauer als für f.

7. Für $h \in \{h_i\}_{i=1}^5$, $h_i = 1/2^{5+i}$ seien die Gitterpunkte $\boldsymbol{x}_h = \{(i+\frac{1}{2})h \in (0,1), i \in \mathbb{N}_0\}$ gegeben. Seien $p \in \mathcal{P}^3([0,1])$ und $u \in \mathcal{P}^7([0,1])$ durch die Bedingungen

$$p(0) = 0, \quad p(1) = 1, \quad p^{(1)}(0) = p^{(1)}(1) = 0$$

$$u(0) = 0, \quad u(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}, \quad u^{(1)}(\tfrac{1}{2}) = 0, \quad u(1) = 1,$$
$$u^{(2)}(0) = u^{(2)}(1) = u^{(3)}(0) = u^{(3)}(1) = 0$$

eindeutig bestimmt. Die Auswertung dieser Polynome soll mit dem Horner Algorithmus in der Form $(a_1 + x(a_2 + x(+\cdots)))/a_0$, $a_k \in \mathbb{Z}$, erfolgen. Mit $N = 1/h$ seien die Matrizen auf $\mathbb{R}^{N\times N}$

$$L = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} +1 & -1 & & & 0 \\ -1 & +2 & -1 & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & -1 & +2 & -1 \\ 0 & & & -1 & +1 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{h^4}\begin{bmatrix} +1 & -2 & +1 & & & & 0 \\ -2 & +5 & -4 & +1 & & & \\ +1 & -4 & +6 & -4 & +1 & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & +1 & -4 & +6 & -4 & +1 \\ & & & +1 & -4 & +5 & -2 \\ 0 & & & & +1 & -2 & +1 \end{bmatrix}$$

$R = \operatorname{diag}\{\frac{1}{2}, 1, \ldots, 1, \frac{1}{2}\}$ und $S = \operatorname{diag}\{\frac{29}{24}, \frac{19}{24}, 1, \ldots, 1, \frac{19}{24}, \frac{29}{24}\}$ definiert. Sei die Fehler-Norm $\|\cdot\|_{h,p}$ auf Seite 195 im Skriptum definiert. Die Ordnung ω_p eines Approximationsfehlers F_h wird mit

$$\omega_p = \log_2(\operatorname{mean}\{\|F_{h_i}\|_{p,h_i}/\|F_{h_{i+1}}\|_{p,h_{i+1}} : i = 1, \ldots, 4\})$$

abgeschätzt. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Für $F_h = Lp(\boldsymbol{x}_h) + Rp^{(2)}(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_1 = 2.0$ zu 2 signifikanten Ziffern.

(b) Für $F_h = Lp(\boldsymbol{x}_h) + Rp^{(2)}(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_2 = 1.5$ zu 2 signifikanten Ziffern.

(c) Für $F_h = Bu(\boldsymbol{x}_h) - Su^{(4)}(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_2 = 1.5$ zu 2 signifikanten Ziffern.

(d) Für $F_h = Bu(\boldsymbol{x}_h) - Su^{(4)}(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_\infty = 0.96$ zu 2 signifikanten Ziffern.

Kommentare: Sehen Sie diesen Code. Mit Mathematica werden berechnet,

```
Simplify[Series[(p[h/2]-p[3h/2])/h^2+p''[h/2],{h,0,2}]]
= -p^(1)[0]/h + O[h]

Simplify[Series[(-p[h/2]+2p[3h/2]-p[5h/2])/h^2+p''[3h/2],{h,0,2}]]
= O[h]^2
```

und

```
Simplify[Series[(u[h/2]-2u[3h/2]+u[5h/2])/h^4-(29/24)u''''[h/2],{h,0,2}]]
= u^(2)[0]/h^2 + (3/2) u^(3)[0]/h + O[h]

Simplify[Series[(-2u[h/2]+5u[3h/2]-4u[5h/2]+u[7h/2])/h^4-(19/24)u''''[3h/2],{h,0,2}]]
= -u^(2)[0]/h^2 - (1/2) u^(3)[0]/h + O[h]

Simplify[Series[(u[h/2]-4u[3h/2]+6u[5h/2]-4u[7h/2]+u[9h/2])/h^4-u''''[5h/2],{h,0,2}]]
= O[h]^2
```

Deswegen mit den Polynomen, die die vorgegebenen Bedingungen erfüllen,

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2(3-2x) \\ u(x) &= x(35 - x^3(560 - x(1344 - x(1120 - 320x))))/19 \end{aligned}$$

gelten $Lp + p^{(2)} = \mathcal{O}(h)$ und $Bu - Su^{(4)} = \mathcal{O}(h)$ am Rand des Intervalls $[0,1]$. Im Inneren des Intervalls gelten $Lp + p^{(2)} = \mathcal{O}(h^2)$ und $Bu - Su^{(4)} = \mathcal{O}(h^2)$. Mit der oben stehenden Horner Form der Polynome werden mit Matlab zu den angegebenen dezimalen Stellen berechnet

```
fuer p:                                fuer u:
  Lq + q^(2), omega_1   = 2.00000       Bq - v^(4), omega_1   = 1.95574
  Lq + q^(2), omega_2   = 1.50000       Bq - v^(4), omega_2   = 1.46176
  Lq + q^(2), omega_inf = 1.00000       Bq - v^(4), omega_inf = 0.95820
```

Mit der 1-Norm werden die Approximationsfehler gemittelt, und die Ordnungen liegen näher bei $\omega = 2$. Mit der ∞-Norm werden die schlimmsten Stellen am Rand des Intervalls betonnt, und die Ordnungen liegen näher bei $\omega = 1$.

8. Für $h \in \{h_i\}_{i=1}^5$, $h_i = 1/2^{5+i}$ seien die Gitterpunkte $\boldsymbol{x}_h = \{ih \in (0,1), i \in \mathbb{N}_0\}$ gegeben. Seien $q \in \mathcal{P}^4([0,1])$ und $v \in \mathcal{P}^7([0,1])$ durch die Bedingungen

$$q(0) = 0, \quad q(\tfrac{1}{2}) = 1, \quad q(1) = 0, \quad q^{(1)}(\tfrac{1}{2}) = q^{(2)}(\tfrac{1}{2}) = 0$$

$$\begin{gathered} v(0) = 0, \quad v(1) = 0, \quad v^{(2)}(0) = v^{(2)}(1) = 0, \\ v(\tfrac{1}{2}) = 1, \quad v^{(1)}(\tfrac{1}{2}) = v^{(2)}(\tfrac{1}{2}) = v^{(3)}(\tfrac{1}{2}) = 0. \end{gathered}$$

eindeutig bestimmt. Die Auswertung dieser Polynome soll mit dem Horner Algorithmus in der Form $(a_1 + x(a_2 + x(+\cdots)))/a_0$, $a_k \in \mathbb{Z}$, erfolgen. Mit $N = 1/h$ seien die Matrizen auf $\mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$

$$L = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} +2 & -1 & & & 0 \\ -1 & +2 & -1 & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & -1 & +2 & -1 \\ 0 & & & -1 & +2 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{h^4}\begin{bmatrix} +5 & -4 & +1 & & & & 0 \\ -4 & +6 & -4 & +1 & & & \\ +1 & -4 & +6 & -4 & +1 & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & +1 & -4 & +6 & -4 & +1 \\ & & & +1 & -4 & +6 & -4 \\ 0 & & & & +1 & -4 & +5 \end{bmatrix}$$

$R = \mathrm{diag}\{\frac{1}{2}, 1, \ldots, 1, \frac{1}{2}\}$ und $S = \mathrm{diag}\{\frac{11}{12}, 1, \ldots, 1, \frac{11}{12}\}$ definiert. Sei die Fehler-Norm $\|\cdot\|_{h,p}$ auf Seite 195 im Skriptum definiert. Die Ordnung ω_p eines Approximationsfehlers F_h wird mit

$$\omega_p = \log_2(\mathrm{mean}\{\|F_{h_i}\|_{p,h_i}/\|F_{h_{i+1}}\|_{p,h_{i+1}} : i = 1, \ldots, 4\})$$

abgeschätzt. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an.

(a) Für $F_h = Lq(\boldsymbol{x}_h) + Rq^{(2)}(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_1 = 2.0$ zu 2 signifikanten Ziffern.
(b) Für $F_h = Lq(\boldsymbol{x}_h) + Rq^{(2)}(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_2 = 2.0$ zu 2 signifikanten Ziffern.
(c) Für $F_h = Bv(\boldsymbol{x}_h) - Sv^{(4)}(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_2 = 1.5$ zu 2 signifikanten Ziffern.
(d) Für $F_h = Bv(\boldsymbol{x}_h) - Sv^{(4)}(\boldsymbol{x}_h)$ gilt $\omega_\infty = 0.97$ zu 2 signifikanten Ziffern.

Kommentare: Sehen Sie diesen Code. Mit Mathematica werden berechnet,

```
Simplify[Series[(2q[h]-q[2h])/h^2+q''[h],{h,0,2}]]
= q[0]/h^2 + O[h]^2

Simplify[Series[(-q[h]+2q[2h]-q[3h])/h^2+q''[2h],{h,0,2}]]
= O[h]^2
```

und

```
Simplify[Series[(5v[h]-4v[2h]+v[3h])/h^4-(11/12)v''''[h],{h,0,2}]]
= 2 v[0] h^4 - v^(2)[0]/h^2 + O[h]

Simplify[Series[(-4v[h]+6v[2h]-4v[3h]+v[4h])/h^4-v''''[2h],{h,0,2}]]
= -v[0]/h^4 + O[h]^2

Simplify[Series[(v[h]-4v[2h]+6v[3h]-4v[4h]+v[5h])/h^4-v''''[3h],{h,0,2}]]
= O[h]^2
```

Deswegen mit den Polynomen, die die vorgegebenen Bedingungen erfüllen,

$$\begin{aligned} q(x) &= 8x(1 - x(3 - x(4 - 2x))) \\ v(x) &= 16x(1 - x^2(10 - x(25 - x(24 - 8x))))/3 \end{aligned}$$

gelten $Lq + q^{(2)} = \mathcal{O}(h^2)$ und $Bv - Sv^{(4)} = \mathcal{O}(h)$ am Rand des Intervalls $[0, 1]$. Im Inneren des Intervalls gelten $Lq + q^{(2)} = \mathcal{O}(h^2)$ und $Bv - Sv^{(4)} = \mathcal{O}(h^2)$. Mit der oben stehenden Horner Form der Polynome werden mit Matlab zu den angegebenen dezimalen Stellen berechnet

```
fuer q:                                    fuer v:
  Lq + q^(2), omega_1   = 1.99468    Bq - v^(4), omega_1   = 1.98253
  Lq + q^(2), omega_2   = 1.99734    Bq - v^(4), omega_2   = 1.49504
  Lq + q^(2), omega_inf = 2.00000    Bq - v^(4), omega_inf = 0.97294
```

Mit der 1-Norm werden die Approximationsfehler gemittelt, und die Ordnungen liegen näher bei $\omega = 2$. Mit der ∞-Norm werden die schlimmsten Stellen am Rand des Intervalls betonnt, und die Ordnungen liegen näher bei $\omega = 1$.