Numerische Mathematik 1
Wintersemester 2020, Übungsblatt 1

Ausarbeitung über Moodle bis 9. Oktober 2020. Nach diesem Datum erscheinen die nachträglichen Kommentare und die Lösungen der Teilnehmer.

1. Gegeben sei die Funktion $u(x) = |x|x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an:

   (a) $F(x,h) = [u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)]/h^2$ erfüllt $F(0,h) = \mathcal{O}(h)$ aber nicht $F(0,h) = o(h)$.

   (b) Es gelten $u'(x) = \text{sign}(x)x^2 + 2x|x|$ für $x \neq 0$ und $\lim_{x\to 0} u'(x) = 0$, aber $u'(0)$ existiert nicht.

   (c) Das Taylorpolynom maximalen Grades für u um $x = 0$ is $P(x) = 0$ mit Restterm $R(x) = u^{(2)}(\xi(x))x^2/2$ wobei $\xi(x) = x/3$.

   (d) Laut dem Zwischenwertsatz folgt aus $u^{(3)}(-1)u^{(3)}(+1) < 0$, dass $u^{(3)}$ eine Nullstelle in $(-1, +1)$ hat.

   Kommentare: Die Ableitungen $u^{(k)}(0)$ sind nicht durch die Grenzwerte $\lim_{x\to 0} u^{(k)}(x)$ gegeben sondern durch die Grenzwerte $\lim_{h\to}[u^{k-1}(h) - u^{(k-1)}(0)]/h$. Das Argument ξ im Restterm ist nicht eindeutig, z.B. $\xi(x) = \pm x/3$ und $\xi(x) = |x|/3$ passen auch. Da $u^{(3)}$ in $(-h, 0)$ und in $(0, h)$ existiert, und $u^{(2)}(0) = 0$ gilt, kann der Taylorsatz auf u bis zur dritten Ableitung angewendet, um $F(0,h) = \mathcal{O}(h)$ zu zeigen, wie auf Seiten 18-19 im Skriptum gesehen.

2. Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an:

   (a) $x_k = \text{sinc}(k)$ konvergiert für $k \to \infty$ zu 0 mit einer Konvergenzgeschwindigkeit $\mathcal{O}(1/k)$.

   (b) $y_k = \text{sinc}(1/k)$ konvergiert für $k \to \infty$ zu 1 mit einer Konvergenzgeschwindigkeit $\mathcal{O}(1/k^3)$.

   (c) $u_k = \exp(-1/k)$ konvergiert für $k \to \infty$ zu 1 mit einer Konvergenzgeschwindigkeit $\mathcal{O}(1/k)$ aber nicht $\mathcal{O}(1/k^2)$.

   (d) $v_k = \text{erf}(k)$ konvergiert für $k \to \infty$ zu 1 mit einer Konvergenzgeschwindigkeit $\mathcal{O}(1/k)$ aber nicht $\mathcal{O}(1/k^2)$.

   Kommentare: Es gilt $\lim_{k\to\infty} \text{sinc}(1/k) = \lim_{x\to 0^+} \text{sinc}(x)$, und der letzte Grenzwert wird durch mehrere Anwendungen der Regel von de l'Hôpital bestimmt.

3. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \gg 1$. Wie auf Seite 8 im Skriptum seien Daten $\texttt{ustar} = \boldsymbol{u}^\star = \{u_i^\star\}_{i=1}^N$ und $\texttt{v} = \boldsymbol{v} = \{v_i\}_{i=1}^N$ durch die folgenden Matlab Befehle gegeben

$$\begin{aligned} \texttt{ustar} &= [\texttt{zeros}(\texttt{round}(\texttt{N}/2), 1); \texttt{ones}(\texttt{N} - \texttt{round}(\texttt{N}/2), 1)] \\ \texttt{nu} &= \texttt{0.1} \\ \texttt{v} &= \boldsymbol{u}^\star + \texttt{nu} * \texttt{randn}(\texttt{N}, 1) \end{aligned}$$

wobei $\nu = \texttt{nu}$ die Rauschstufe bezeichnet. Wie auf Seite 13 im Skriptum sei $\boldsymbol{u} = \{u_i\}_{i=1}^N$ die Lösung des linearen Gleichungssystems $(\mu D/h^2 + I)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ mit

$$\begin{gathered} \mu > 0, \quad h = 1/N, \\ \mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^N, \\ I = \mathrm{diag}(\mathbf{1}), \end{gathered} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

Schreiben Sie einen Matlab-Code, um den Wert $\mu_N^\star$ von μ abzuschätzen, der für ein gegebenes N die Matlab-Funktion $\texttt{norm}(\boldsymbol{u}^\star - \boldsymbol{u})$ minimiert. Laut Rechnungen gilt

(a) $\mu_N^\star = \mathcal{O}(1/N^2)$.

(b) $\lim_{N\to\infty} \mu_N^\star \approx \texttt{1.0e-5}$.

(c) $\mu_N^\star$ hängt von der Rauschstufe ν ab.

(d) $\mu_N^\star = \mathcal{O}(1/N)$.

Kommentare: Sehen Sie diesen Code. Anhand der Daten $\{(N_i, \mu_{N_i}^\star) : i = 1, 2, \ldots, m\}$ wird die Potenz p in $\mu_N^\star = cN^p$ oder $\log(\mu_N^\star) = \log(c) + p\log(N)$ durch den Mittelwert der Steigungen $d\log(\mu_N^\star)/d\log(N)$ abgeschätzt:

$$p \approx \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} (\log(\mu_{N_{i+1}}^\star) - \log(\mu_{N_i}^\star))/(\log(N_{i+1}) - \log(N_i))$$

4. Wie auf Seite 12 im Skriptum sei

$$J_h(\boldsymbol{u}) = \tfrac{1}{2} h \sum_{i=1}^N (u_i - v_i)^2 + \mu h \sum_{i=1}^{N-1} \left[\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

eine Approximation des Funktionals auf Seite 15

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \int_0^1 |u(x) - v(x)|^2 dx + \mu \int_0^1 \sqrt{|u'(x)|^2 + \varepsilon^2} dx$$

wobei $\mu, \varepsilon \geq 0$, $N \in \mathbb{N}$, $h = 1/N$, $x_i = (i - \frac{1}{2})h$, $i = 1, \ldots, N$, und

$$\boldsymbol{v} = \{v_i\}_{i=1}^N, \quad v_i = v(x_i), \quad \boldsymbol{u} = \{u_i\}_{i=1}^N, \quad u_i \approx u(x_i).$$

Seien $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^N$, $I = \mathrm{diag}(\mathbf{1})$ und

$$D_i(\boldsymbol{u}) = \left[\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right)^2 + \epsilon^2 \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Kreuzen Sie bei den wahren Behauptungen an:

(a) Für $1 < k < N$ gilt

$$\frac{\partial J_h}{\partial u_k} = h(u_k - v_k) - \mu(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) D_k(\boldsymbol{u})$$

(b) Die Optimalitätsbedingung zur Minimierung von J_h ist $[\mu D(\boldsymbol{u})/h^2 + I]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ wobei

$$D(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} D_1(\boldsymbol{u}) & -D_1(\boldsymbol{u}) & & & \\ -D_1(\boldsymbol{u}) & D_1(\boldsymbol{u})+D_2(\boldsymbol{u}) & -D_2(\boldsymbol{u}) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -D_{N-2}(\boldsymbol{u}) & D_{N-2}(\boldsymbol{u})+D_{N-1}(\boldsymbol{u}) & -D_{N-1}(\boldsymbol{u}) \\ & & & -D_{N-1}(\boldsymbol{u}) & D_{N-1}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix}.$$

(c) Es gilt $J_h \in C^1(\boldsymbol{R}^N)$, $\forall \varepsilon \geq 0$.

(d) Es gilt $\boldsymbol{u}^\top \nabla J_h(\boldsymbol{u}) \geq h\boldsymbol{u}^\top(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})$, $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^N$.

Kommentare: Für $\epsilon = 0$ ist die Funktion

$$J_h(\boldsymbol{u}) = \tfrac{1}{2}h\sum_{i=1}^{N}(u_i - v_i)^2 + \mu\sum_{i=1}^{N-1}|u_i - u_{i-1}|$$

an einer Stelle mit $u_i = u_{i-1}$ nicht differenzierbar. Es gilt $\boldsymbol{u}^\top \nabla J_h(\boldsymbol{u}) \geq h\boldsymbol{u}^\top(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})$, $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^N$, weil $D(\boldsymbol{u})$ immer symmetrisch positiv semidefinit ist.