Numerische Mathematik 1 Übungen
Blatt 7 – Bearbeitung bis zum 20.1.2015 bzw. 27.1.2015

Hausaufgaben

Bearbeitung bis zum 20.1.2015

1. Konstruiere folgende Beispiele:

   a. Eine Funktion f, für die das Bisektionsverfahren konvergiert aber keine Nullstelle $f(x^\star) = 0$ findet.

   b. Eine Funktion g, für die die Fixpunkt-Iteration $x_{k+1} = g(x_k)$ nicht konvergiert.

   c. Eine Funktion g und ein Intervall D, wobei $g(D) \subset D$ und es existieren mindestens 2 Fixpunkte für g in D.

2. Sei $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$ mit $g([a,b]) \subset [a,b]$. Angenommen $\exists \gamma \ni |g'(x)| \leq \gamma < 1$, $\forall x \in [a,b]$. Zeige, $\forall x_0 \in [a,b]$ die Fixpunkt-Iteration $x_{k+1} = g(x_k)$ erfüllt

$$|x^\star - x_k| \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma}|x_1 - x_0|, \quad k \geq 1$$

   wobei $x^\star \in [a,b]$ der eindeutige Fixpunkt ist.

Bearbeitung bis zum 27.1.2015

3. Sei $g(x) = xe^{r(1-x)}$, $r \in [1,2)$. Zeige,

   a. $\exists \epsilon > 0 \ni g(B(1,\epsilon)) \subset B(1,\epsilon)$ und

   b. $\exists \gamma \in (0,1) \ni |g'(x)| \leq \gamma$, $\forall x \in B(1,\epsilon)$.

4. Für

$$J_h(\boldsymbol{u}) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N}(u_i - v_i)^2 + \mu h \sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)^2 + \epsilon^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{h}\nabla J_h(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + \frac{\mu}{h^2}D(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} - \frac{\mu}{h^2}D(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{G}_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{u}) = (1-\alpha)\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u})$$

   zeige für $\alpha \in (0,1)$, es gilt $\boldsymbol{G}_{\mathrm{A}}(B) \subset B$ für $B = B_\infty(\boldsymbol{v}, \frac{2\mu}{h})$ und

$$|\boldsymbol{G}'_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{u})\|_\infty \leq 1 - \alpha + \frac{4\alpha\mu}{\epsilon h^2}, \quad \forall \boldsymbol{u} \in B$$

Programmieraufgabe

Alle Kodes sollen an `stephen.keeling@uni-graz.at`
per Email bis zum 25.1.2015 geschickt werden.

1. Seien verrauschte Daten $\boldsymbol{v} = \{v_i\}_{i=0}^N$ gegeben,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^\star + \text{Rauschen}$$

wobei $\boldsymbol{u}^\star$ eine zu rekonstruierende Funktion ist. Für $N > 2$, $h = 1/N$, $\mu > 0$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{N+1}$ und

$$D_i = D_i(\boldsymbol{u}) = \left[\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)^2 + \epsilon^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$D(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} D_1 & -D_1 & & & 0 \\ -D_1 & D_1 + D_2 & -D_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -D_{N-1} & D_{N-1} + D_N & -D_N \\ 0 & & 0 & -D_N & D_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$$

schreiben Sie einen Matlab Kode der Form (`N`$=N$, `mue`$=\mu$, `ep`$=\epsilon$, `u`$=\boldsymbol{u}$, `ustar`$=\boldsymbol{u}^\star$, `v`$=\boldsymbol{v}$)

```
u = FamilienV(N,mue,ep,ustar,v)
```

zur Lösung des nicht linearen Gleichungssystems

$$\left[\frac{\mu}{h^2} D(\boldsymbol{u}) + I\right] \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$$

durch die implizite Fixpunkt-Iteration

$$\left[\frac{\mu}{h^2} D(\boldsymbol{u}_k) + I\right] \boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{v}, \quad k = 0, 1, \dots \quad \boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{v}.$$

Bemerken Sie, der Kode wird mit folgenden Daten getestet:

```
ustar = [zeros(round(N/2),1);ones(N+1-round(N/2),1)];
v = ustar + 0.1*randn(N+1,1);
```