Numerische Mathematik 1 Übungen
Blatt 6 – Bearbeitung bis zum 9.12.2014 bzw. 16.12.2014

Hausaufgaben

Bearbeitung bis zum 9.12.2014

1. Seien Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{m-1}$ gegeben, wobei $\{x_i\}_{i=0}^{m-1}$ verschieden sind. Mit $\boldsymbol{e} = \langle 1, 1, \ldots, 1\rangle^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x} = \langle x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\rangle^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, sei $V = \{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}\} \in \mathbb{R}^{m\times 2}$ und zeigen Sie, $V^{\mathrm{T}}V$ ist SPD. Zeigen Sie für lineare Regression, die Werte

$$a^\star = \overline{\boldsymbol{y}} - b^\star \overline{\boldsymbol{x}}, \quad b^\star = \frac{\overline{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}} - \overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}}{\overline{\boldsymbol{x}^2} - \overline{\boldsymbol{x}}^2} \quad \text{wobei z.B.} \quad \overline{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} x_i y_i, \quad \overline{\boldsymbol{x}^2} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} x_i^2$$

   sind global minimierend für die Funktion

$$E(a, b) := \sum_{i=0}^{m-1} [y_i - (a + bx_i)]^2.$$

2. Berechnen Sie die Konditionszahlen $\kappa_i(V)$, $i = 1, 2, \infty$, der Vandermonde-Matrix $V = [\boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}] \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ mit $x_i = i$, $i = 1, \ldots, n$, und $n = 3$. Bestimmen Sie mit Matlab die Konditionszahlen $\kappa_2(V^{\mathrm{T}}V)$ und $\kappa_2(V)$ für $n = 10$ und $n = 100$.

Bearbeitung bis zum 16.12.2014

3. Für ein regelmäßiges Gitter konstruieren Sie die lokalen kubisch Hermite Basis Funktionen ϕ_i und ψ_i, die erfüllen

$$\begin{array}{ll} \phi_i(x_j) = \delta_{ij} & \psi_i(x_j) = 0 \\ \phi_i'(x_j) = 0 & \psi_i'(x_j) = \delta_{ij}. \end{array}$$

   Daher

$$H(x) = \sum_{i=0}^{N} \left[f_i \phi_i(x) + \hat{f}_i \psi_i(x) \right]$$

   erfüllt

$$H(x_j) = f_j, \quad H'(x_j) = \hat{f}_j, \quad i = 0, \ldots, N$$

4. Berechnen Sie den kanonischen Spline erster Ordnung direkt von der Faltung. Anhand der expliziten Formeln bestätigen Sie dass der kanonische Spline $k$ter Ordnung, $k = 1, 2, 3$, in $C^{k-1}(\mathbb{R})$ liegt. Konstruieren Sie den quadratischen Spline $s \in C^1(\mathbb{R})$ 2ter Ordnung, der die folgenden Bedingungen erfüllt: $s(x) = 0$, $x \leq 0$, $s(x) = 0$, $x \geq 3$, $s \in \mathcal{P}^2([x_{i-1}, x_i])$, $i = 0, 1, 2, 3$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = 3$, $\sum_{i=0}^{3} s(x_i) = 1$.

Programmieraufgabe

Alle Kodes sollen an `laurent.pfeiffer@uni-graz.at`
per Email bis zum 14.12.2014 geschickt werden.

1. Schreiben Sie einen Matlab Kode

   ```
   [U,S,V,P,B,Q] = familienv(A,kmax,tol)
   ```

   der die Singulärwertzerlegung $A = U^{\mathrm{T}}SV, U \in \mathbb{R}^{m\times m}, V \in \mathbb{R}^{n\times n}, U^{\mathrm{T}}U = I, V^{\mathrm{T}}V = I$, $S = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m, 0, \ldots, 0\} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, der eingegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, berechnet. Zuerst soll die Matrix mit Householder Transformationen so transformiert werden, $PAQ = \langle B^{\mathrm{T}}, 0\rangle^{\mathrm{T}}$, wobei $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P^{\mathrm{T}}P = I$, $Q^{\mathrm{T}}Q = I$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und B ist bidiagonal. Dann sollen die Singulärwerte anhand von B durch Givens Transformationen berechnet werden. Die maximale Anzahl der Iterationen für die Rechnung der Singulärwerte ist `kmax`, und `tol` ist die relative Toleranz zum Abbrechen dieser Iterationen.